

ねじりによる断面変形を考慮した 梁理論の定式化とその有限要素の開発

構造強度学研究室

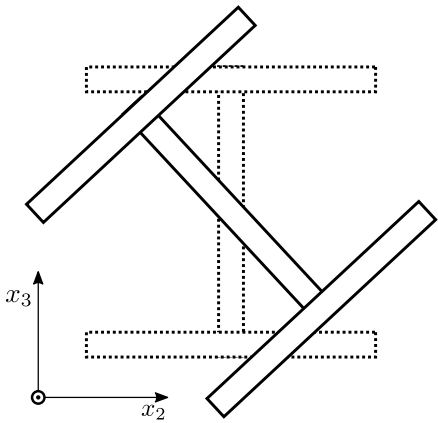
須田 陽平

2023年2月8日

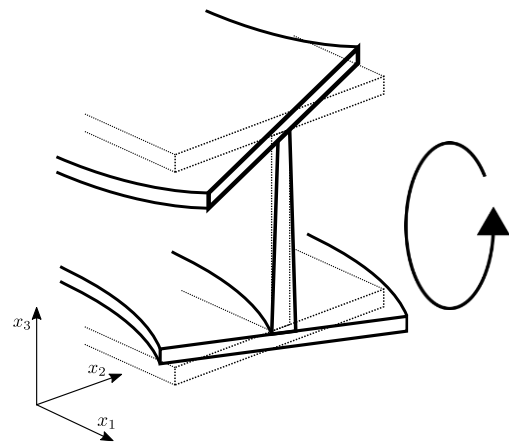
ねじりを受ける梁



ねじりモーメント



断面の回転



ねじり変形

St. Venant (1855) : 梁のねじり理論の基礎をつくる
そり拘束の影響を無視

Vlasov (1967) : そり拘束の影響を考慮した
「曲げねじり理論」を体系化

<曲げねじり理論の変位場>

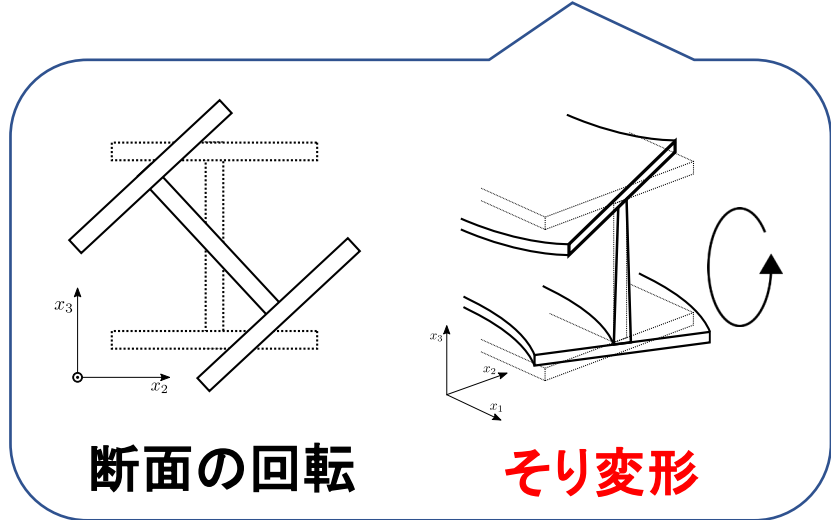
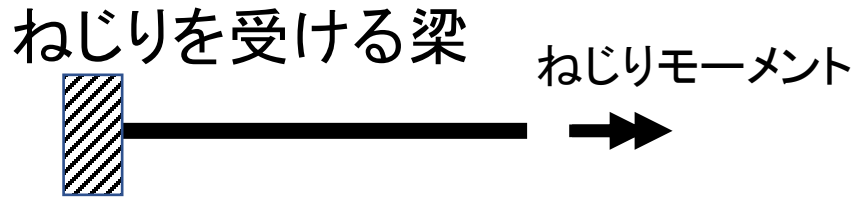
$$u_1 = \omega(x_2, x_3) \varphi'(x_1)$$

$$u_2 = -x_3 \varphi(x_1)$$

$$u_3 = x_2 \varphi(x_1)$$

ω : そり関数
 φ : ねじり角

そり関数を解析的に求める手法も提案
しかし、均質断面に限る



< 曲げねじり理論の変位場 >

$$u_1 = \omega(x_2, x_3) \varphi'(x_1)$$

$$u_2 = -x_3 \varphi(x_1), \quad u_3 = x_2 \varphi(x_1)$$

そり関数 ω を求める手法に関する既往の研究

Vlasov (1967): 扇形面積計算法

薄肉断面のみ対象

Schulz and Filippou (1998):

Gruttmann and Wagner (1999):

そり関数についての2階偏微分
方程式を数値的に解く手法を提案

任意断面が対象であるが非均質断面には適用不可

断面変形を扱った既往の研究

斉木・鄭 (2020): せん断遅れと横せん断変形を
統一的に考慮した梁理論

代表体積要素を用いた半解析的手法により非均質断面も適用可

本研究の目的: 非均質を含む任意断面に適用可能なねじり理論を定式化する

<本提案理論の変位場>

$$u_1 = f_t(x_2, x_3) g_t(x_1)$$

$$u_2 = -x_3 \varphi(x_1)$$

$$u_3 = x_2 \varphi(x_1)$$

<曲げねじり理論の変位場>

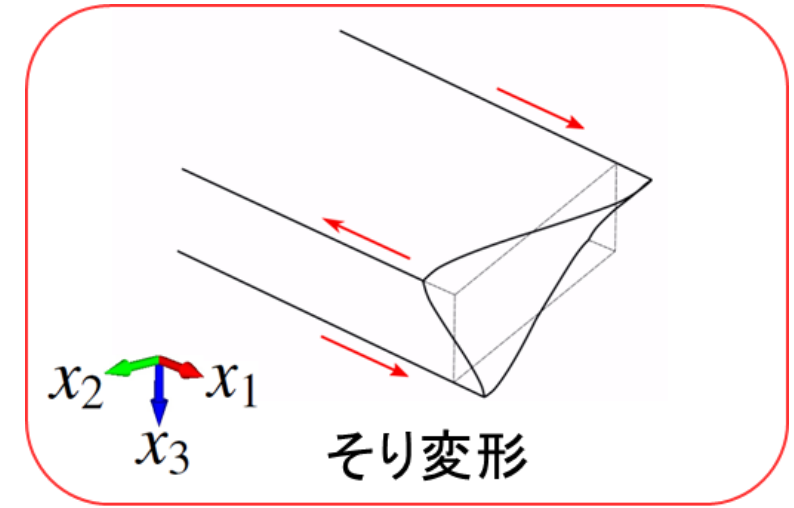
$$u_1 = \omega(x_2, x_3) \varphi'(x_1)$$

$$u_2 = -x_3 \varphi(x_1)$$

$$u_3 = x_2 \varphi(x_1)$$

f_t, ω : そり関数
 φ : ねじり角

そり変位をねじり角とは独立な自由度(断面変形の大きさ g_t)で表す。



仮想仕事式に変位場から求められるひずみを代入し、支配方程式を求める

$$\int_V \{E \epsilon_{11} \delta \epsilon_{11} + G(\gamma_{12} \delta \gamma_{12} + \gamma_{13} \delta \gamma_{13})\} dV = \int_{\partial V} (t_1 \delta u_1 + t_2 \delta u_2 + t_3 \delta u_3) dV$$

<支配方程式と境界条件>

$$R_{t3} g_t' + K_t \varphi'' = 0$$

$$n_i (R_{t3} g_t + K_t \varphi') = \bar{T}_i \quad \text{or} \quad \varphi = \varphi_i$$

$$-R_{t1} g_t'' + R_{t2} g_t + R_{t3} \varphi' = 0$$

$$n_i (R_{t1} g_t') = (\bar{D}_t)_i \quad \text{or} \quad g_t = (g_t)_i$$

断面変形パラメータ

$$K_t := \int_A G \{(x_2)^2 + (x_3)^2\} dA$$

$$R_{t1} := \int_A E f_t^2 dA$$

$$R_{t2} := \int_A G \{(f_{t,2})^2 + (f_{t,3})^2\} dA$$

$$R_{t3} := \int_A G (f_{t,3} x_2 - f_{t,2} x_3) dA$$

本提案理論

変位場

$$u_1 = f_t(x_2, x_3) g_t(x_1)$$

$$u_2 = -x_3 \varphi(x_1), \quad u_3 = x_2 \varphi(x_1)$$

支配方程式

$$R_{t3} g_t' + K_t \varphi'' = 0$$

$$-R_{t1} g_t'' + R_{t2} g_t + R_{t3} \varphi' = 0$$

境界条件

$$n_i (R_{t3} g_t + K_t \varphi') = \bar{T}_i \quad \text{or} \quad \varphi = \varphi_i$$

$$n_i (R_{t1} g_t') = (\bar{D}_t)_i \quad \text{or} \quad g_t = (g_t)_i$$

St. Venant
ねじり剛性

$$K_{teq} = (K_t + R_{t3})$$

$$= \int_A G \{ (x_2)^2 + (x_3)^2 \} dA + \int_A G \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_3} x_2 - \frac{\partial f_t}{\partial x_2} x_3 \right) dA$$

曲げねじり
剛性

$$R_{t1} = \int_A E f_t^2 dA$$

曲げねじり理論

$$u_1 = \omega(x_2, x_3) \varphi'(x_1)$$

$$u_2 = -x_3 \varphi(x_1), \quad u_3 = x_2 \varphi(x_1)$$

$$-EI_\omega \varphi'''' + GJ \varphi'' = 0$$

$$n_i (-EI_\omega \varphi'''' + GJ \varphi') = (\bar{T}_s)_i \quad \text{or} \quad \varphi = \varphi_i$$

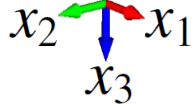
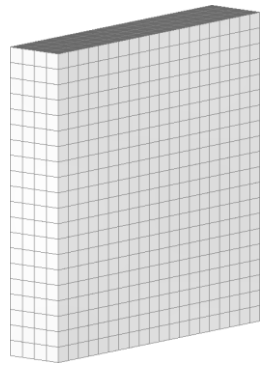
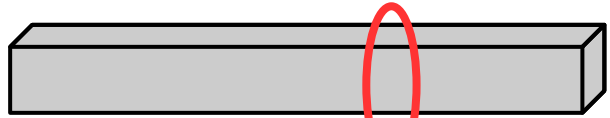
$$n_i (-EI_\omega \varphi'') = (\bar{T}_\omega)_i \quad \text{or} \quad \varphi' = (\varphi')_i$$

$$GJ = G \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} - x_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_3} + x_2 \right)^2 \right\} dA$$

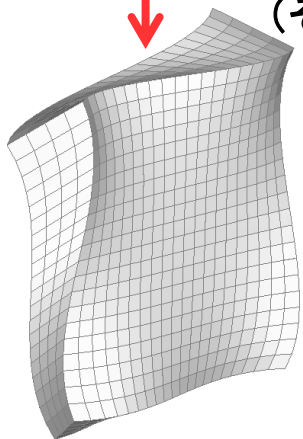
$$EI_\omega = E \int_A \omega^2 dA$$

代表体積要素を用いた半解析的手法

連続体要素に周期境界条件で相対変位を与え、純ねじりを再現 → 断面変形のモードを求めることができる

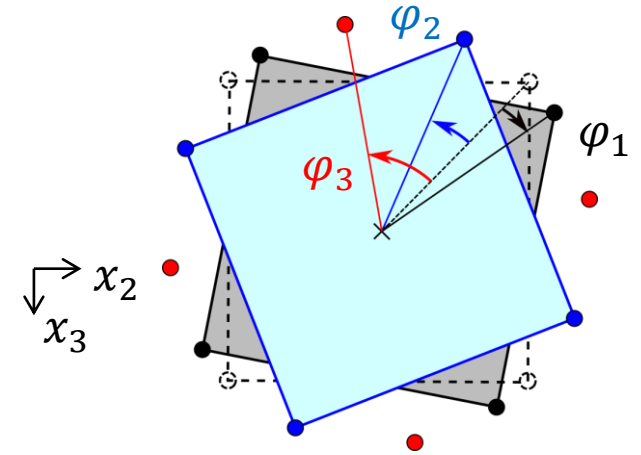
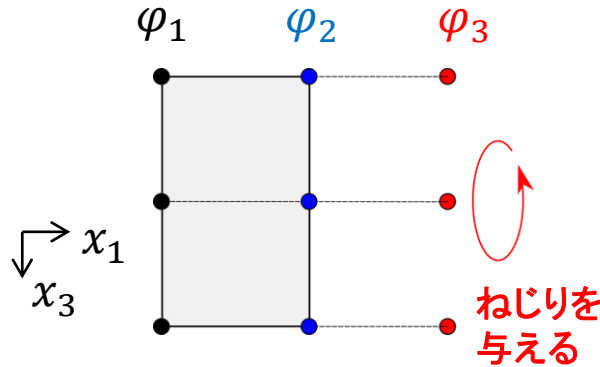


純ねじりを再現
(そりを拘束しない)



断面の x_1 軸方向変位を f_t とする

相対変位 $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3$ (φ_i : 断面のねじり角)



さらに

変形モード f_t を含む断面積分を実行することで
支配方程式を解くのに必要な 断面変形パラメータ
を求める

断面変形パラメータ

$$K_t := \int_A G \{ (x_2)^2 + (x_3)^2 \} dA$$

$$R_{t1} := \int_A E f_t^2 dA$$

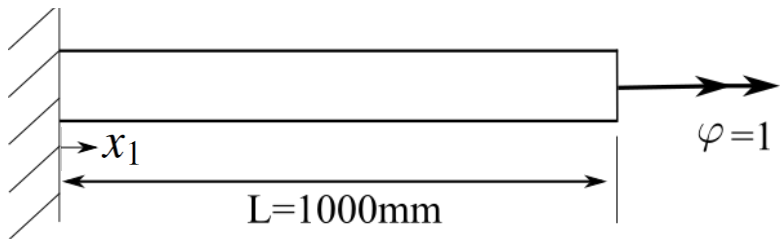
$$R_{t2} := \int_A G \{ (f_{t,2})^2 + (f_{t,3})^2 \} dA$$

$$R_{t3} := \int_A G (f_{t,3} x_2 - f_{t,2} x_3) dA$$

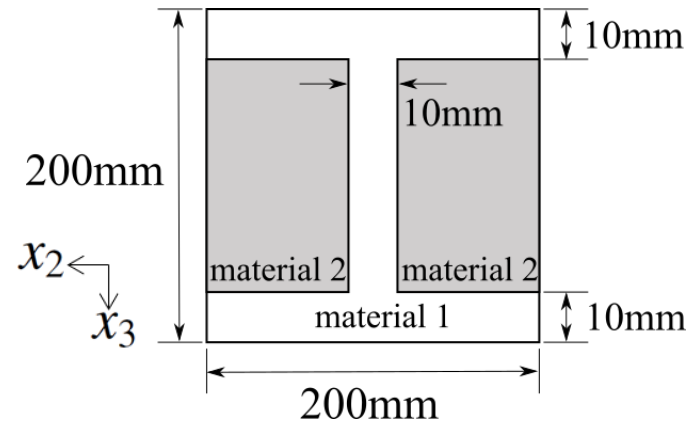
従来理論では適用不可な非均質断面 (SRC断面) で検証を行う

問題設定

<境界値問題>



<断面>

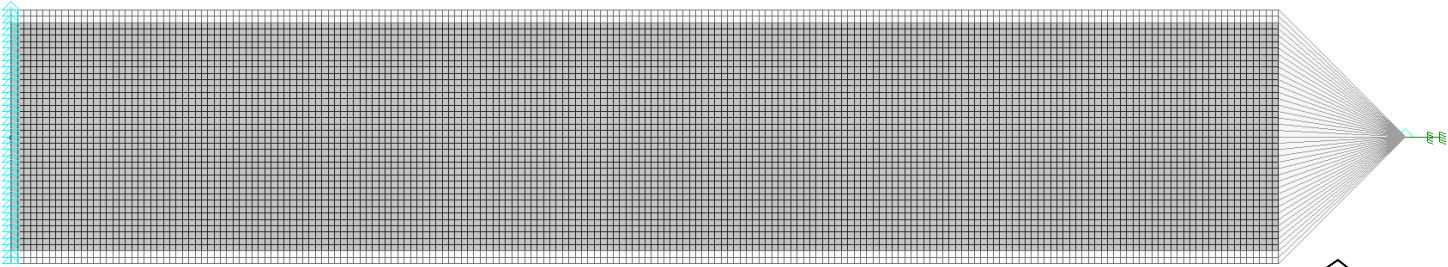


<材料定数>

	弾性係数	せん断弾性係数
material 1	200GPa	100GPa
material 2	20GPa	10GPa

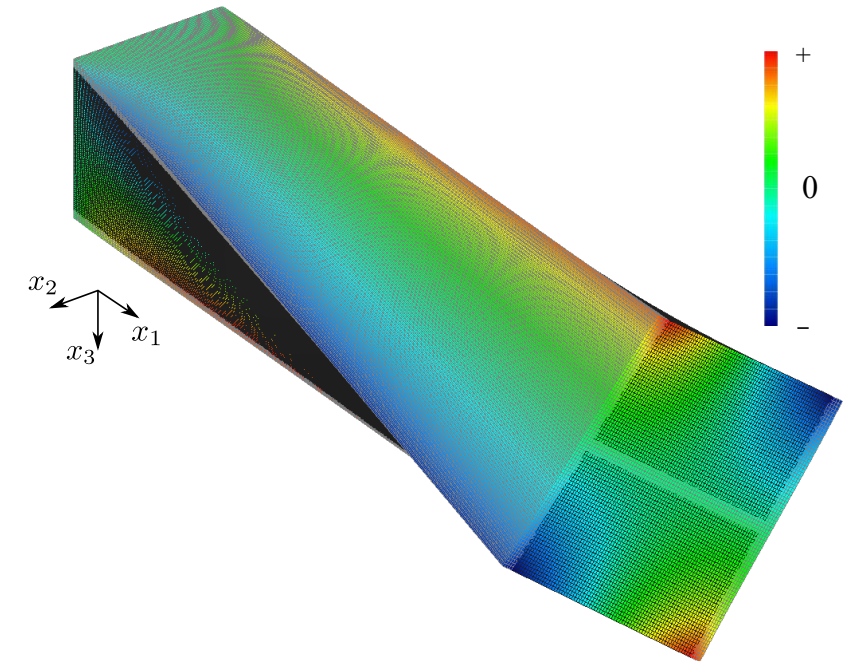
参照解

立方体形状の連続体要素を使用 (Meshsize : 2.5mm)



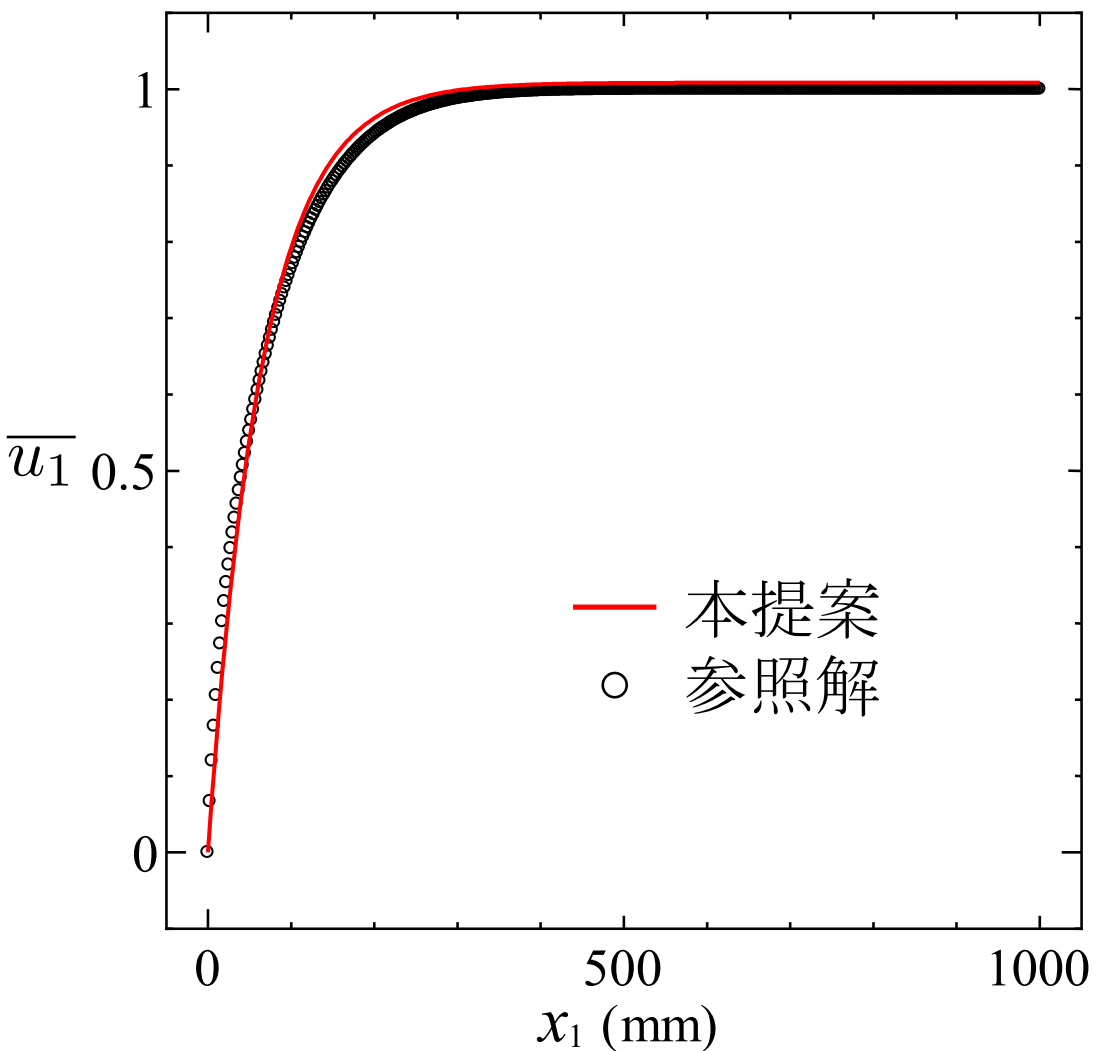
断面の節点を完全拘束

剛体要素を用いて回転変位に伴う u_2, u_3 変位を与える (そり変位は拘束しない)



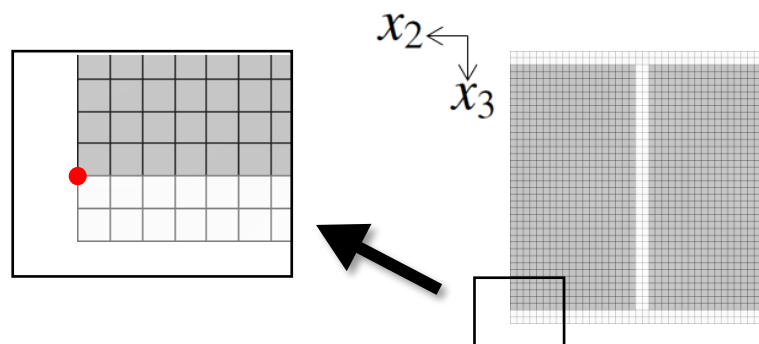
参照解変形図と軸方向変位分布

参照解の最大変位で
無次元化した軸方向変位



着目点

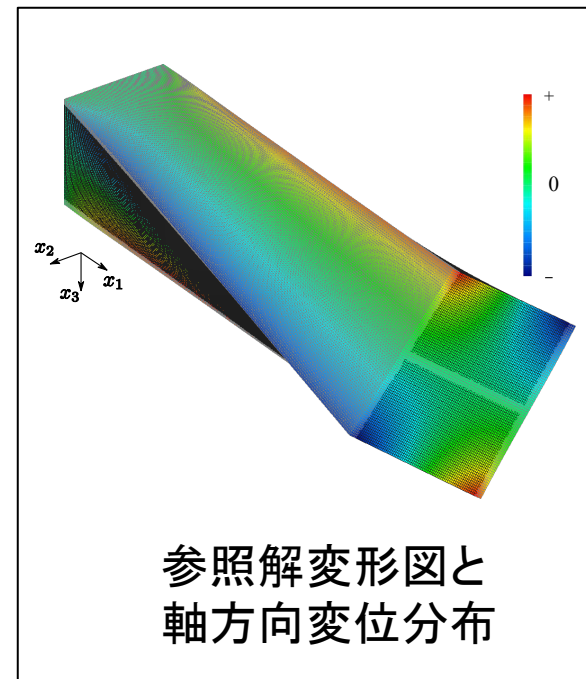
面内で軸方向変位が最大の位置



軸方向変位の比較

最大変位の 相対差	8.50×10^{-3}
L^2 ノルム	1.76×10^{-2}

定量的に一致している

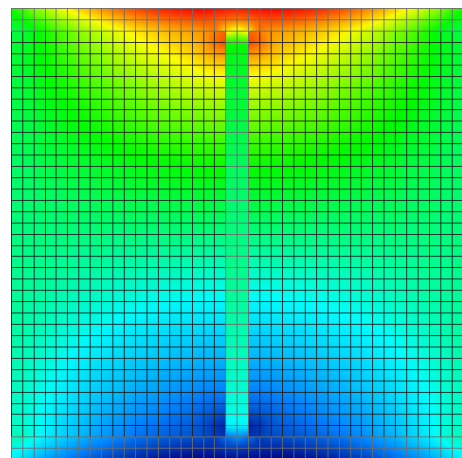


L^2 ノルム定義

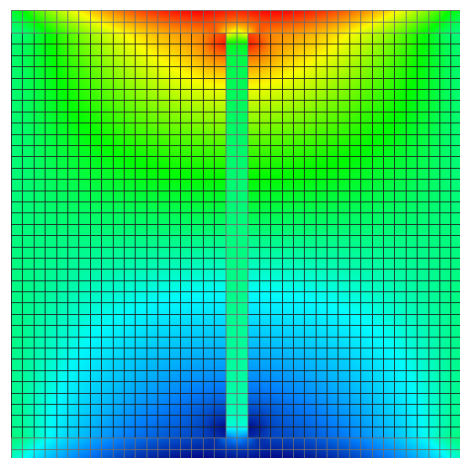
$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p) - (\beta_s)^2 dx_1}{\int_L (\beta_s)^2 dx_1}}$$

本提案 (under β_p) 参照解 (under β_s)

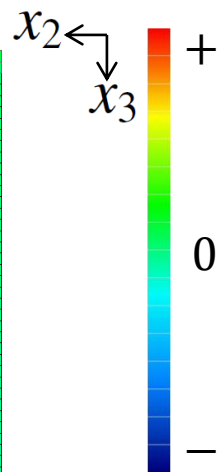
$x_1 = 200\text{mm}$ せん断ひずみ γ_{12} 分布



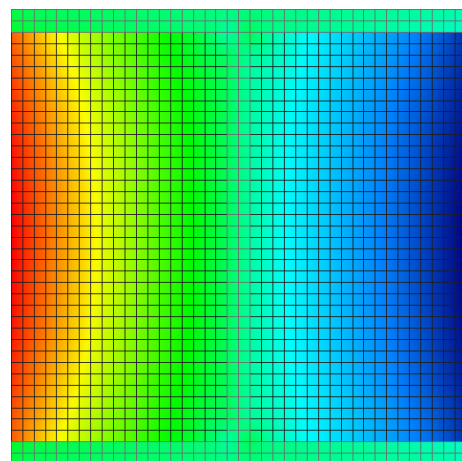
本提案



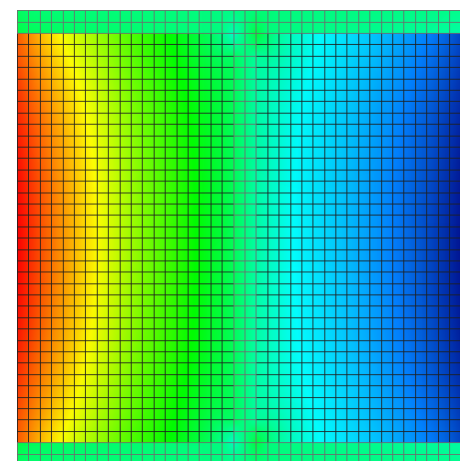
参照解



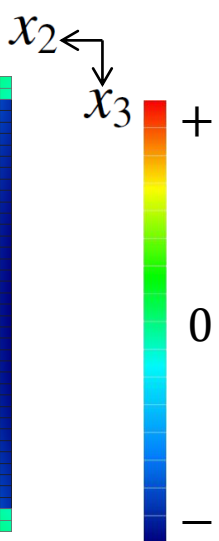
$x_1 = 200\text{mm}$ せん断ひずみ γ_{13} 分布



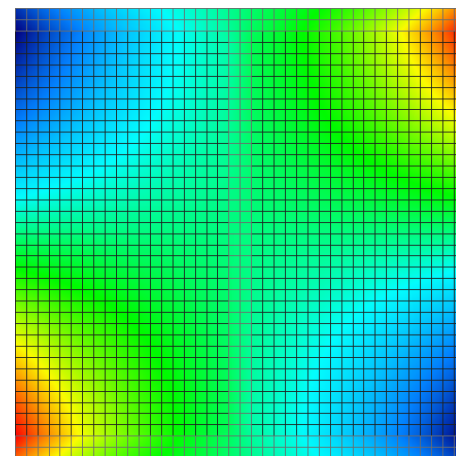
本提案



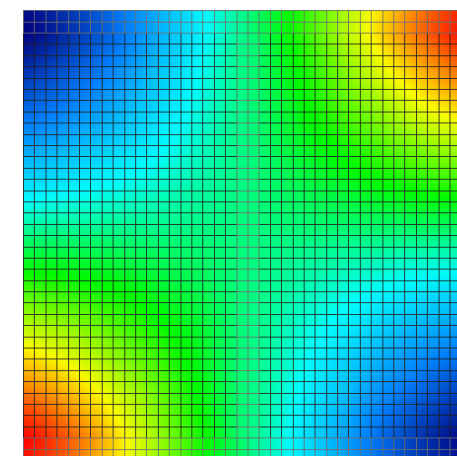
参照解



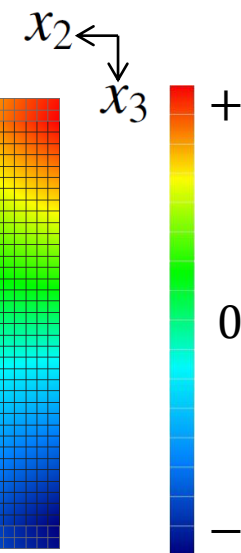
$x_1 = 200\text{mm}$ 軸ひずみ ϵ_{11} 分布



本提案



参照解



せん断ひずみ分布は参照解と定性的に一致していることが分かる

軸ひずみはフランジでわずかな分布の違いが見られた

ねじり角の近似

$$\check{\varphi}(x_1) = \psi_1(x_1)(\varphi)_1^e + \psi_2(x_1)(\varphi)_2^e$$

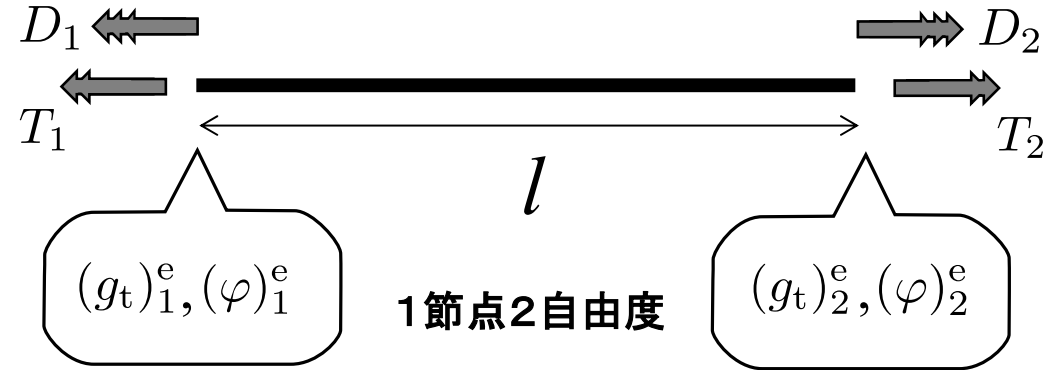
1次の内挿関数

$$\psi_1(x_1) = 1 - \frac{x_1}{l}$$

$$\psi_2(x_1) = \frac{x_1}{l}$$

一般化変位の近似

$$\check{g}_t(x_1) = \psi_1(x_1)(g_t)_1^e + \psi_2(x_1)(g_t)_2^e$$



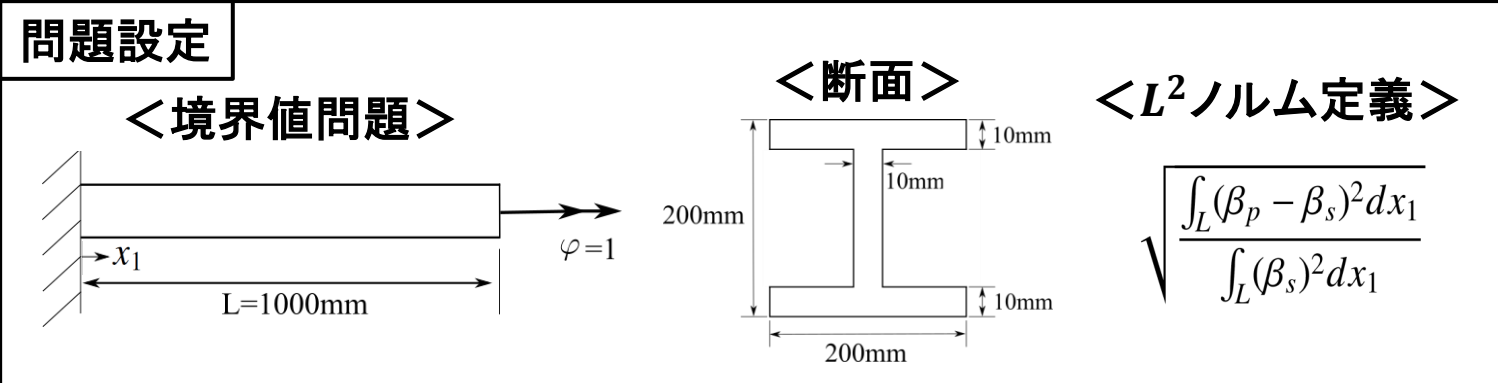
仮想仕事式に変位場から求められるひずみを代入し、要素合成行列を求める

$$\int_V \{E\epsilon_{11}\delta\epsilon_{11} + G(\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13})\}dV = T_1\delta(\varphi)_1^e + T_2\delta(\varphi)_2^e + D_1\delta(g_t)_1^e + D_2\delta(g_t)_2^e$$

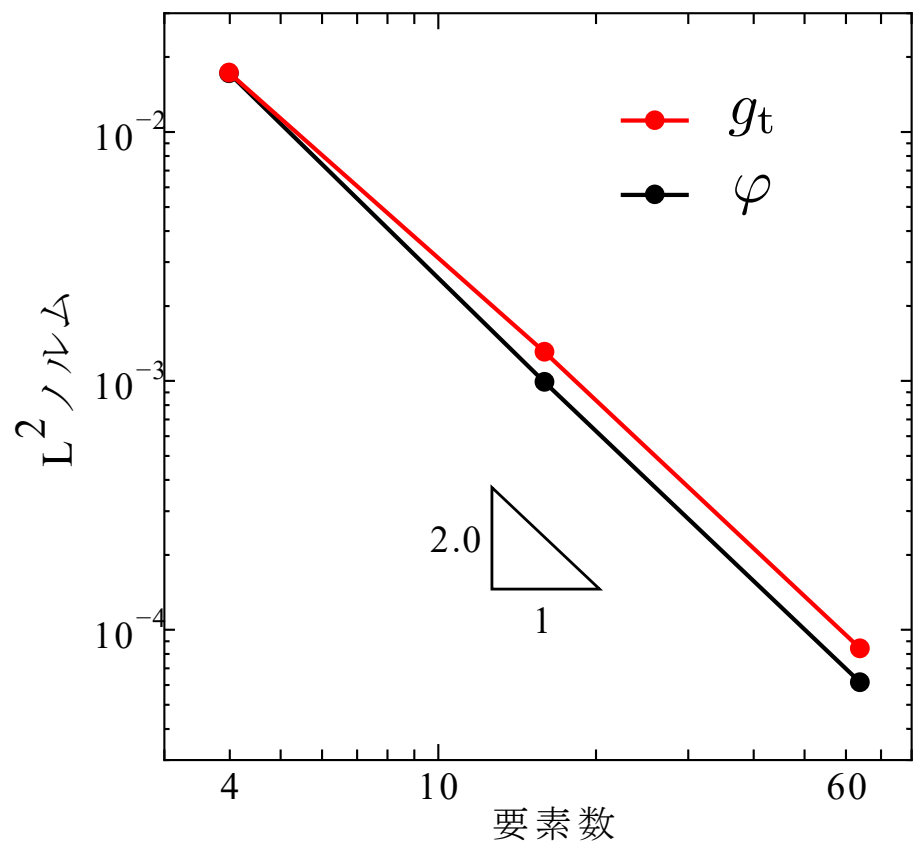
要素剛性行列

$$\begin{pmatrix} \frac{K_t}{l} & -\frac{R_{t3}}{2} & -\frac{K_t}{l} & -\frac{R_{t3}}{2} \\ & \frac{R_{t1}}{l} + \frac{R_{t2}}{3}l & \frac{R_{t3}}{2} & -\frac{R_{t1}}{l} + \frac{R_{t2}}{6}l \\ & & \frac{K_t}{l} & \frac{R_{t3}}{2} \\ \text{symm.} & & & \frac{R_{t1}}{l} + \frac{R_{t2}}{3}l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varphi)_1^e \\ (g_t)_1^e \\ (\varphi)_2^e \\ (g_t)_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ D_1 \\ T_2 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

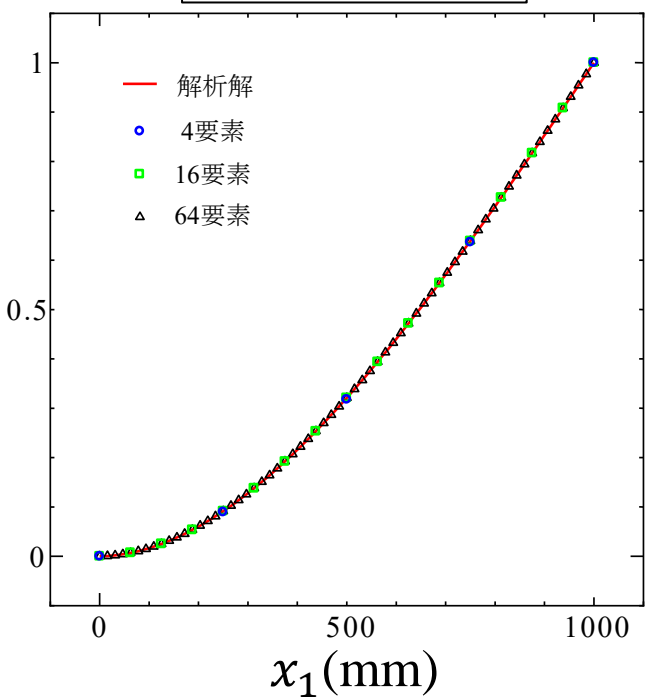
$K_t, R_{t1} \sim R_{t3}$ は
代表体積要素の解析
で求める



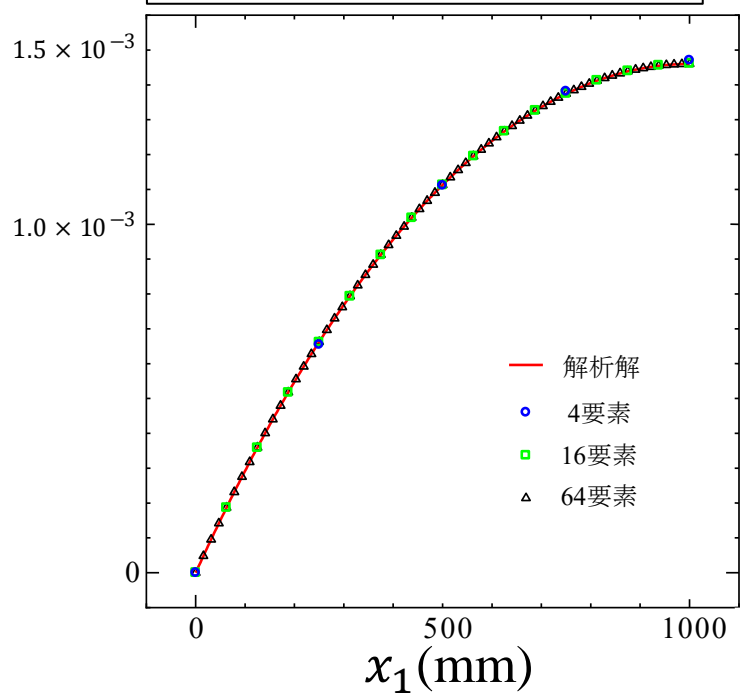
解析解に対する収束



ねじり角φ分布



断面変形の大きさgt分布



**ねじり角, 断面変形の大きさ
ともに2次程度の収束速度である**

ねじりによる断面変形を考慮した梁理論の定式化

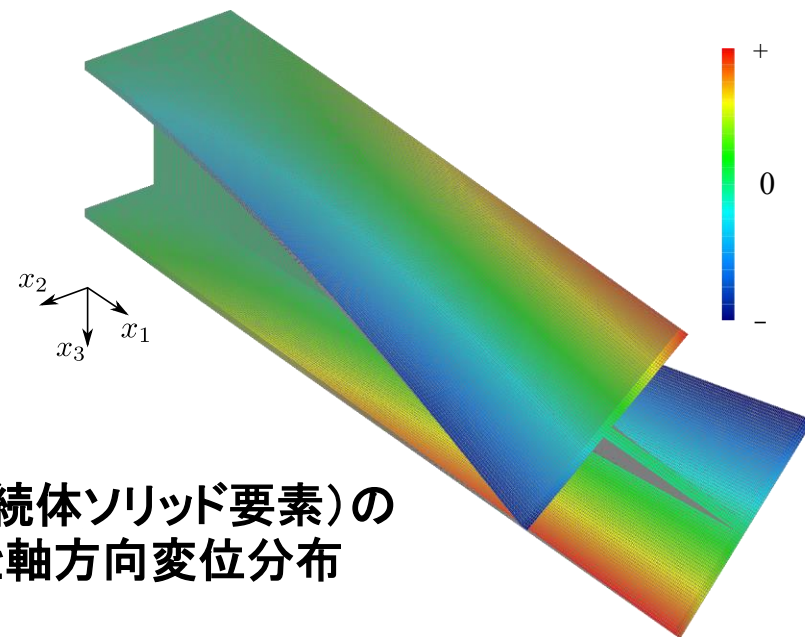
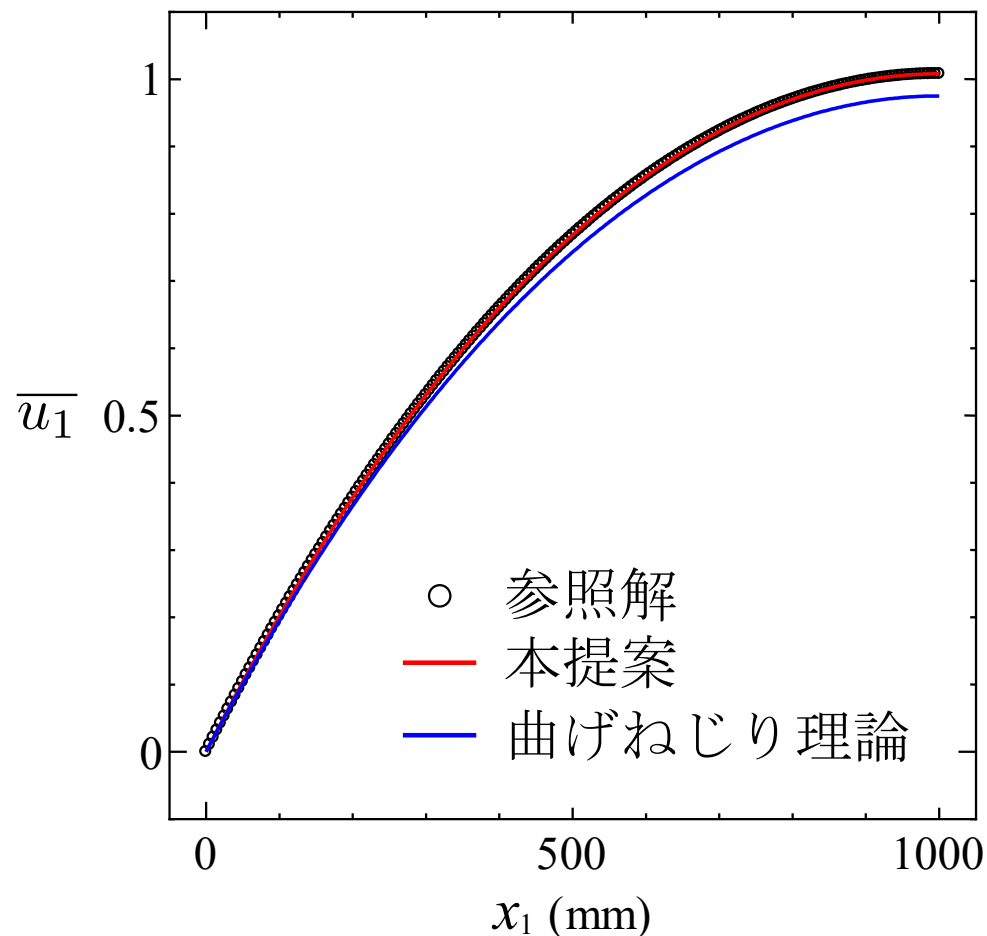
- 従来の理論では適用範囲外の非均質断面で精度を検証した
 - ✓ 軸方向変位が参照解と一致することを確認できた
 - ✓ 断面のひずみ分布が参照解と定性的に一致することを確認できた

定式化した理論をもととする有限要素の開発

- 本理論の解析解に対する有限要素解の収束性を検証した
 - ✓ 「ねじり角」, 「断面変形の大きさ」とともに2次程度の収束速度であることが確認できた

補足スライド:H形断面の検証

参照解の最大変位で
無次元化した軸方向変位



参照解(連続体ソリッド要素)の
変形図と軸方向変位分布

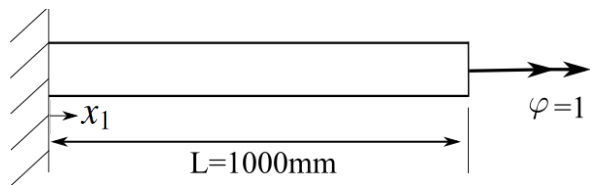
軸方向変位の比較

	本理論	曲げねじり理論
最大変位の 相対差	8.07×10^{-3}	-2.55×10^{-2}
L^2 ノルム	8.36×10^{-3}	2.62×10^{-2}

曲げねじり理論に有利な薄肉断面においても本理論の方が良い精度が得られる

補足スライド: 片持ち梁の解析解

<境界値問題>



• 本提案理論

$$\begin{aligned} R_{t3}g_t' + K_t\varphi'' &= 0 \\ -R_{t1}g_t'' + R_{t2}g_t + R_{t3}\varphi' &= 0 \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \frac{R_{t3}^2\varphi_0}{R_{t3}^2 \tanh \mu l - \mu l K_t R_{t2}} \left(\frac{\sinh \mu l + \sinh \mu(x-l)}{\cosh \mu l} - \frac{\mu K_t R_{t2}}{R_{t3}^2} x \right)$$

$$g_t(x) = \frac{\mu K_t R_{t3} \varphi_0}{R_{t3}^2 \tanh \mu l - \mu l K_t R_{t2}} \left(1 - \frac{\cosh \mu(x-l)}{\cosh \mu l} \right)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{R_{t2} K_{seq}}{K_t R_{t1}}}$$

• 曲げねじり理論

$$-EI_\omega \varphi'''' + GJ \varphi'' = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{\tanh \mu l - \mu l} \left\{ \frac{\sinh \mu l + \sinh \mu(x-l)}{\cosh \mu l} - \mu x \right\}$$

$$\varphi'(x) = \frac{\mu \varphi_0}{\tanh \mu l - \mu l} \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu(x-l)}{\cosh \mu l} \right\}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}}$$

支配方程式

ねじり角

断面変形の
大きさ