

相反定理に基づく効率的な影響線の有限要素解析手法の提案と 鋼床版の疲労寿命評価への適用

Efficient influence line analysis of finite element models based on the reciprocal theory
and fatigue evaluation of an orthotropic steel deck

三井涼平*
Ryohei MITSUI

*構造強度学研究室（指導教員：京谷孝史 教授，研究指導教員：斉木功 准教授）

In the fatigue design of bridges, the influence line is inevitable to properly determine the stress at the point of interest generated by the moving loads. To obtain the influence line for a 3-D finite element model by conventional analysis with unit load requires the same number of analyses as the number of nodes on the surface to which the load is possibly applied. On the other hand, some methods based on the Müller-Breslau principle, which enable us to obtain the influence line by performing the finite element analysis only once, have been proposed. However, the methods require modification of the finite element model at each point of interest because it is necessary to provide a discontinuous displacement to determine the influence line of an internal force. Therefore, this paper proposes an analysis method for influence lines that is based on the reciprocal theorem and does not require model modification. The validity of the proposed method is confirmed by comparing the influence lines obtained by the proposed method with the results of the conventional analysis with unit load for a finite element model discretized with shell elements. Furthermore, it is shown that the proposed method enables more efficient fatigue life evaluation than the conventional method for the example of fatigue problems in an orthotropic steel deck.

Key Words: reciprocal theory, influence line, finite element model, fatigue, orthotropic steel deck

1. はじめに

橋梁の疲労設計では、移動荷重により発生する局所的な応力を適切に把握するために影響線が必要不可欠である。

3次元有限要素モデルに対して通常の単位荷重により影響線を求める場合は、荷重作用面に含まれる節点の数だけ解析を実行する必要がある、非常に多くの手間と時間を要する。例えば、森ら¹⁾は走行車両位置による鋼床版デッキ進展き裂起点の応力の低減可能性を検討するために、3次元有限要素モデルによるき裂起点の応力影響面の利用が効率的であると述べており、1000点を超える載荷位置に対する有限要素解析を行っている。さらに、影響線を可視化するためには解析結果から着目点の応答を床版面に関連付ける必要もある。

一方、構造解析における影響線の解析手法として知られる Müller-Breslau の原理は有限要素モデルにも適用可能であり、一つの着目点に対して一度の解析を実行するだけで影響線を求めることができる。古市ら²⁾は3次元有限要素モデルに対して Müller-Breslau の原理を適用しているが、内力の影響線を求めるためには不連続な変位を与える必要がある、着目点ごとに有限要素モデルを修正しなければならない。この操作は影響線を求めたい着目点ごとに行う必要がある、改善の余地があると考えられる。

そこで本論文では、相反定理に基づき有限要素モデルの修正が不要な影響線の解析手法を提案する。提案手法の妥当性は、通常の単位荷重を載荷した有限要素解と比較することで確認する。また、本提案手法を鋼床版の疲労寿命評価に適用することで従来手法より効率的な評価が可能になることを示した。

2. 相反定理に基づく効率的な影響線の解析

相反定理は、2つの系を考え、それぞれの系において、異なる系の外力・内力をつり合い系として補仮想仕事式を考え、線形弾性体であれば2つの系の内力補仮想仕事等しいことから、2つの系の外力補仮想仕事等しくなるという定理である。系 i での変位と外力をそれぞれ u^i, q^i とすると、相反定理は

$$\int_V u^1 q^2 dV = \int_V u^2 q^1 dV \quad (1)$$

と表される。ここに、上付きの数字はその物理量が定義される系の番号を意味する。本章では、相反定理に基づく効率的な影響線の有限要素解析手法を提案する。

(1) ひずみの影響線

図-1に示すような有限要素モデルを考える。系1には任意位置にある節点 ξ に y 方向単位荷重 $P_\xi^1 = 1$ が作用しており、系2には節点 a, b, c に x 方向荷重 $P_\alpha^2 (\alpha = a, b, c)$ が作用している。節点 ξ の y 方向の変位を v_ξ とし、節

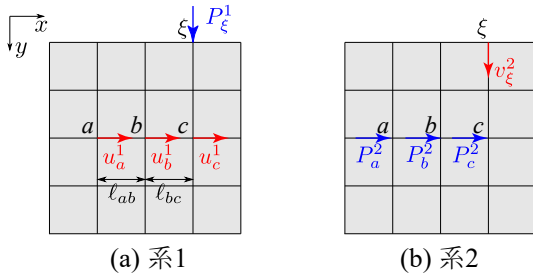


図-1 節点におけるひずみの影響線の解析

点 a, b, c の x 方向の変位を u_α とする.

構造物の設計においては、着目点での応力やひずみを問題とする. 通常の有限要素法では、要素間の変位の連続性は課されるが、その導関数であるひずみは連続性を有さない. したがって、節点でのひずみは一般的には定義されないが、節点をはさむ2つの要素辺におけるひずみの何らかの平均が用いられることも多い. そこで図-1のように着目節点 b とその両隣の節点 a, c の3点の変位を有限要素法の内挿関数ではなく2次関数で内挿した時の b における傾きを b におけるひずみと考えることとする. ab 間の長さを l_{ab} , bc 間の長さを l_{bc} とすると、 b における2次曲線の傾きで定義されるひずみ $(\epsilon_x)_b$ は

$$\begin{aligned} (\epsilon_x)_b &= \frac{l_{bc}(u_b - u_a)}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})} + \frac{l_{ab}(u_c - u_b)}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})} \\ &= \frac{-l_{bc}u_a}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})} + \frac{(l_{bc} - l_{ab})u_b}{l_{ab}l_{bc}} + \frac{l_{ab}u_c}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})} \end{aligned} \quad (2)$$

となる. ここで、系1と2に相反定理を適用すると

$$u_a^1 P_a^2 + u_b^1 P_b^2 + u_c^1 P_c^2 = v_\xi^2 P_\xi^1 \quad (3)$$

が成り立つが、 P_a^2 が

$$\begin{aligned} P_a^2 &= -\frac{l_{bc}}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})} \\ P_b^2 &= \frac{l_{bc} - l_{ab}}{l_{ab}l_{bc}} \\ P_c^2 &= \frac{l_{ab}}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})} \end{aligned} \quad (4)$$

であるとき、式(2)より式(3)の左辺が着目点 b のひずみとなる. したがって、このときの各節点の y 方向変位が着目点 b のひずみ $(\epsilon_x)_b$ の影響線となることが示される.

(2) 応力の影響線

平板の問題では平面応力状態であり、その構成関係は垂直応力を σ_x, σ_y , せん断応力を τ_{xy} , 垂直ひずみを ϵ_x, ϵ_y , せん断ひずみを ϵ_{xy} とすると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

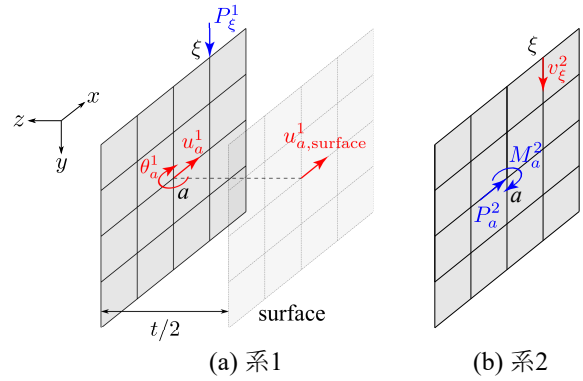


図-2 節点の板表面における変位の影響線の解析

となる. ここに、 E は Young 率、 ν は Poisson 比である. 式(5)より、応力の影響線は2成分のひずみの影響線を重ね合わせることで求められる. 3次元問題においても同様の考え方で影響線を求めることができる.

(3) 平面シェル要素における影響線

平面シェル要素で離散化された有限要素モデルを考える. 平面シェル要素では、曲げの影響を考慮するために板表面における応力やひずみを求める必要がある.

まず、図-2に示すような有限要素モデルで、節点 a の板表面における x 方向変位 $u_{a,surface}^1$ の影響線を求める方法について考える. 系1には任意位置にある節点 ξ に y 方向単位荷重 $P_\xi^1 = 1$ が作用しており、系2には節点 a に x 方向荷重 P_a^2 と y 軸まわり曲げモーメント M_a^2 が作用している. 節点 ξ の y 方向の変位を v_ξ^2 とし、節点 a の x 方向変位を u_a , y 軸まわり回転角を θ_a とする. 板厚を t とすると、板表面における変位 $u_{a,surface}$ は

$$u_{a,surface} = u_a - \frac{t}{2}\theta_a \quad (6)$$

となる. このことと、図-2の系1, 2に適用した相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + \theta_a^1 M_a^2 = v_\xi^2 P_\xi^1 \quad (7)$$

より、節点 a に以下の荷重

$$P_a^2 = 1, \quad M_a^2 = -\frac{t}{2} \quad (8)$$

を与えたときの各節点の y 方向変位が着目点 a の板表面における変位 $u_{a,surface}$ の影響線となることが示される.

節点の板表面におけるひずみや応力においても(1), (2)と同様の考え方で影響線を求めることができる.

3. 提案手法の妥当性の検証

横山ら³⁾の鋼床版の改良モデルを用いて、本手法の妥当性検証を行う. 図-3に示すように、対象構造は3本の主桁および3本の横リブからなる部分モデルとした. 対象構造の断面図を図-4に示す. なお、横リブの板厚は12 mmである. 材料は均質で Young 率 $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, Poisson 比 $\nu = 0.3$ の等方線形弾性体とし、すべての部材を4節点平面シェル要素でモデル

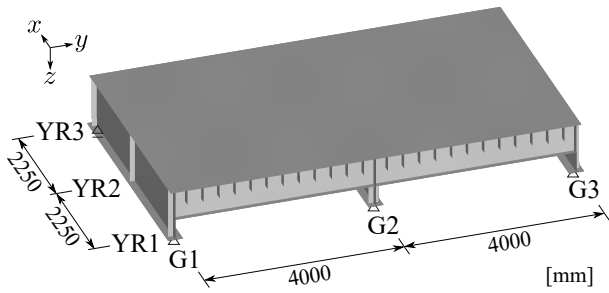
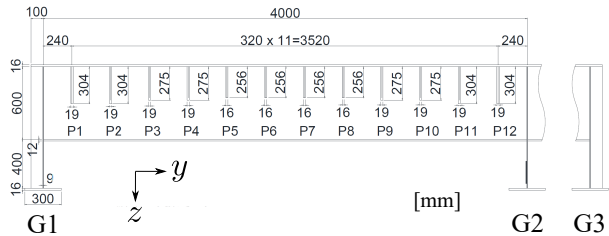


図-3 解析モデル全体図



※G2～G3間はG1～G2間と同構造

図-4 解析モデル断面図

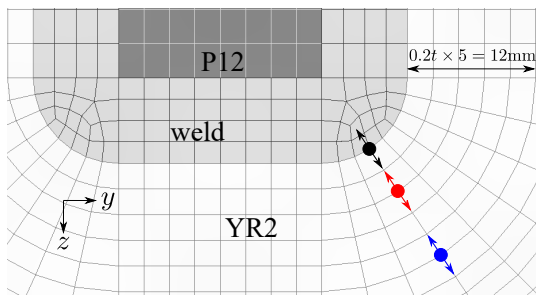


図-5 P12とYR2との交差部近傍の着目点

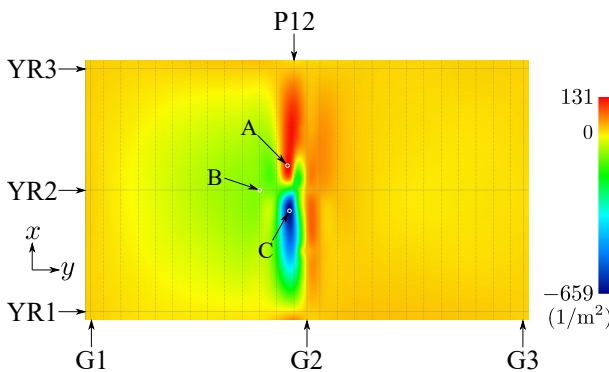


図-6 床版上面での着目点の応力影響線

化した。このとき、総要素数は1,216,498、総節点数は1,215,775となった。橋軸方向をx軸、橋軸直角水平方向をy軸、鉛直下向きをz軸とする。支点では下フランジ下面をz方向に線支持し、他の方向の拘束は剛体運動を拘束する最低限の拘束とした。

着目点は主桁G2に隣接する縦リブP12と横リブYR2との交差部近傍に位置する点とした。図-5に着目点を赤丸で示した。この着目点において、横リブYR1側板表面における溶接止端直角方向の垂直応力の影響線を求めるために、2章に示すように平面応力状態の構成関係を考慮して荷重を載荷した。この解析によって得ら

れた結果から、床版上面の鉛直(z)方向変位、すなわち着目点の溶接止端直角方向垂直応力の影響線コンターを図-6に示す。図には主桁、横リブおよび縦リブ位置も示している。この結果の妥当性を確認するために、図-6に示すA, B, Cの3点を参照点として選び、通常単位荷重載荷の解析を行い、着目点応力との比較を行う。各参照点に単位荷重を載荷したときの着目点応力と、本手法による参照点における影響線の値を表-1にまとめる。なお、単位荷重を載荷したときの節点における応力は2章のように節点の変位と回転角から算出し、相対差は

$$\text{相対差} = \frac{\text{本手法による解} - \text{単位荷重による解}}{\text{単位荷重による解}} \quad (9)$$

と定義した。本手法は単位荷重を載荷する通常的手法と比較し、 $10^{-1}\%$ 程度の精度で一致している。

4. 疲労寿命評価への適用

橋梁の疲労設計においては、車両等の移動荷重により発生する着目点の応力を適切に把握する必要がある。本章では、提案手法を疲労寿命評価に適用することでその効率化を試みる。

鋼床版の縦横リブ交差部の疲労耐久性を評価するため、横関らの研究⁴⁾を参考に継手形状による応力集中を考慮することができる構造ホットスポット応力を用いて溶接部の応力を評価した。本研究では、縦横リブ交差部の溶接部における横リブ側止端部を評価対象とするため、日本鋼構造協会の疲労設計指針⁵⁾に従い、次式によって構造ホットスポット応力 σ_h を算出した。

$$\sigma_h = 1.67\sigma_{0.4t} - 0.67\sigma_{1.0t} \quad (10)$$

ここに、 $\sigma_{0.4t}$ 、 $\sigma_{1.0t}$ はそれぞれ溶接止端から $0.4t$ 、 $1.0t$ の位置における鋼板表面の溶接止端直角方向垂直応力、 t は横リブの板厚である。また、横関ら⁴⁾と同様に、着目部に発生する曲げ応力及び板厚の影響を考慮するために次式により構造ホットスポット応力を補正した。

$$\sigma'_h = \left(\frac{t}{25}\right)^{0.25} (\sigma_{h,m} + 0.8\sigma_{h,b}) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{h,m} &= \frac{\sigma_{h,obv} + \sigma_{h,rev}}{2} \\ \sigma_{h,b} &= \frac{\sigma_{h,obv} - \sigma_{h,rev}}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 σ'_h は補正した構造ホットスポット応力、 $\sigma_{h,m}$ 、 $\sigma_{h,b}$ はそれぞれ構造ホットスポット応力の膜応力成分、曲げ応力成分、 $\sigma_{h,obv}$ 、 $\sigma_{h,rev}$ はそれぞれ表面、裏面の

表-1 着目点応力

参照点	A	B	C
本手法 ($/\text{m}^2$)	131.177	-104.516	-659.335
単位荷重 ($/\text{m}^2$)	131.165	-104.311	-659.228
相対差%	9.3×10^{-3}	2.0×10^{-1}	1.6×10^{-2}

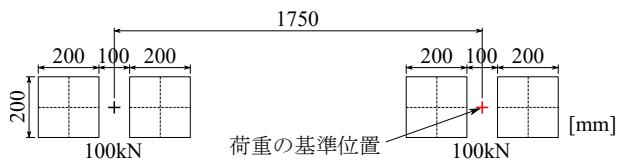


図-7 荷重モデル

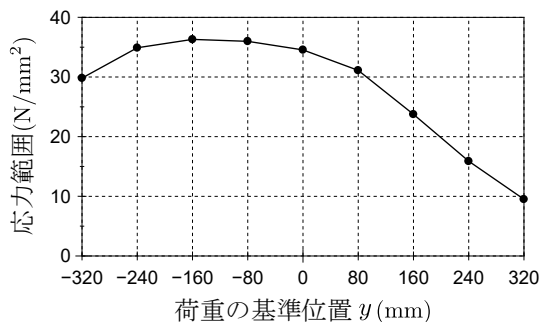


図-8 着目点応力範囲

構造ホットスポット応力である。補正した構造ホットスポット応力 σ'_h は鋼板表面における応力の線形結合で表されるため、それらの影響線を求めるための荷重を組み合わせて作用させることで、一度の解析で影響線を求めることができる。補正した構造ホットスポット応力 σ'_h に対する疲労設計曲線は、日本鋼構造協会⁵⁾を参考に E 等級とし、打ち切り限界 29 N/mm² を考慮した。

解析モデルは図-3 と同様の部分モデルとし、主桁 G2 に隣接する縦リブ P12 と横リブ YR2 との交差部における横リブ YR1 側板表面の横リブ側止端部を評価対象とする。図-5 に着目する溶接止端を黒丸、その溶接止端から 0.4t, 1.0t 離れた位置をそれぞれ赤丸、青丸で示した。平面応力状態の構成関係を考慮して荷重を作用させ、 σ'_h の影響線を求めたところ、定性的には図-6 とほぼ同様となった。

荷重モデルは、道路橋示方書の T 荷重を参考に図-7 に示すようなダブルタイヤを模した等分布荷重とし、図の通りに荷重の基準位置を定義した。荷重の位置は着目部を原点として、橋軸 (x 軸) 方向に ± 2200 mm の区間を 50 mm 間隔、橋軸直角水平 (y 軸) 方向に ± 320 mm の区間を 80 mm 間隔の全 801 ケースとした。なお、等分布荷重により発生する着目部の応力は、影響線と等分布荷重の積を載荷範囲で積分することで求められる。この荷重モデルが橋軸方向に走行したときに生じる補正したホットスポット応力範囲と着目部を原点としたときの荷重の基準位置の関係を図-8 に示す。

横山ら³⁾と同様の条件で設計寿命 100 年の累積疲労損傷比 D を算出した。荷重モデル走行位置の期待値を着目部直上とした場合、累積疲労損傷比 D は 0.197 となった。通常の荷重載荷による従来の方法では全 801 ケースの解析が必要であったが、本手法を用いれば一つの着目点に対して一度の解析を実行するだけで影響線を求めることが可能で、疲労寿命評価を効率的に行うことができる。さらに、従来の手法では載荷範囲の

境界と床版の要素分割が整合している必要があり、一致していない場合には有限要素モデルを修正しなければならない。一方で、本手法のように構造系全体の影響線を得られる手法であれば、荷重作用面の要素分割に制約はなく、あらゆる分布荷重による着目点の応答を求めることができる。したがって、荷重モデルや走行位置の変更などに対しても有限要素モデルの修正や追加の解析は不要で容易に対応することができる。

5. おわりに

本論文では相反定理に基づき節点間の相対変位の影響線を求める方法を提案した。相対変位の影響線はひずみの影響線と等しく、複数成分のひずみの影響線を重ね合わせることで応力の影響線を求めることができる。本手法によれば、一つの着目点に対して一度の解析を実行するだけでよく、着目点の応答を床版面に関連付けるポストプロセスも不要であるため、影響線を容易に視覚化することができる。Müller-Breslau の原理に基づく手法では、内力の影響線を求めるために不連続な変位を与える必要があり、着目点ごとにモデルを修正しなければならないが、本提案手法において必要となる作業は要素長と材料定数から設定できる荷重を作用させるだけで、従来の手法よりも効率的に影響線を求めることができる。

平面シェル要素で離散化した有限要素モデルで単位荷重に対する応答を求め、本手法による影響線の値と比較した。両者の差は最大でも 10% 程度であり、本手法の妥当性を確認することができた。

疲労設計においても本手法を適用することで効率よく疲労寿命を評価できることを示した。本手法によれば構造ホットスポット応力のように応力の線形結合で表すことができる応答は一度の解析を実行するだけで影響線を求めることができる。また、構造系全体の影響線を得られる本手法であれば、荷重モデルや走行位置の変更などに対しても有限要素モデルの修正や追加の解析は不要で容易に対応することができる。

参考文献

- 1) 森猛, 金子想, 林暢彦, 内田大介, 小笠原照夫: 鋼床版デッキ進展き裂の起点を対象とした応力影響面とその利用, 土木学会論文集 A1, Vol. 73, No. 1, pp. 21-31, 2017.
- 2) 古市亨, 松井繁之, 佐光浩継: ミューラー・プレスロウの原理を応用した 3 次元立体 FEM 解析による影響面作成と疲労の一考察, 土木学会論文集 A, Vol. 65, No. 4, pp. 949-954, 2009.
- 3) 横山薫, 鈴木俊光, 橋本幹司, 三木千壽: 主桁に隣接する縦リブに着目した鋼床版縦横リブ交差部の疲労寿命に関する一検討, 土木学会第 71 回年次学術講演会概要集, I-56, 2020.
- 4) 横関耕一, 横山薫, 富永知徳, 三木千壽: 鋼床版縦横リブ交差部構造の高疲労強度化, 土木学会論文集 A1, Vol. 73, No. 1, pp. 206-217, 2017.
- 5) 日本鋼構造協会: 鋼構造物の疲労設計指針・同解説, 技報堂出版, 2012.

(2023 年 2 月 1 日 提出)