

令和3年度技術研究発表会

せん断遅れによる付加的な応力評価のための 機械学習による断面特性推定

東北大学 工学部

青木洋樹

研究背景

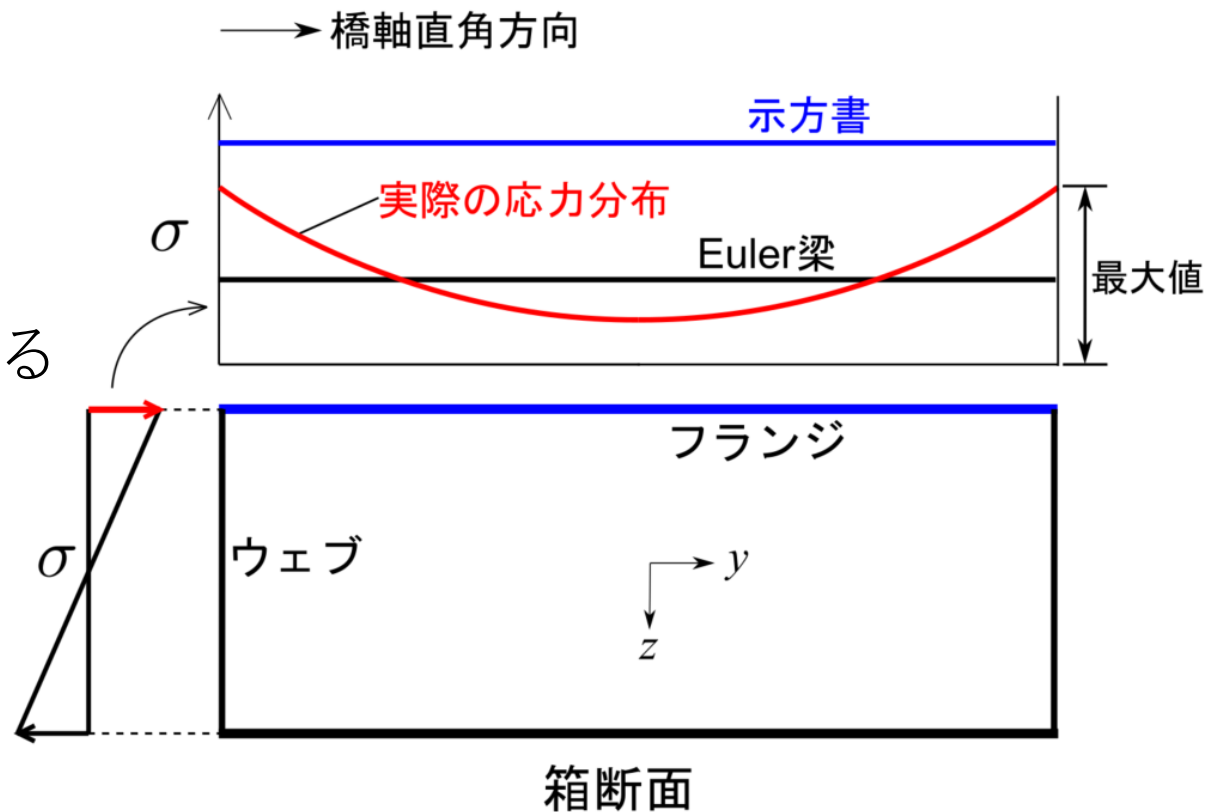
せん断遅れ

曲げ応力の橋軸直角方向分布は一様ではなく、ウェブ上の曲げ応力はEuler梁よりも大きくなる



道路橋示方書

見かけの曲げ剛性を小さくすることで考慮



2021 齊木・鄭：断面変形を考慮した梁理論

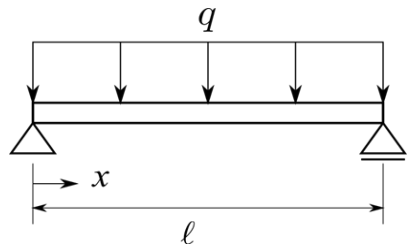
せん断遅れは曲げではなく、断面変形によって生じる

断面変形を考慮した梁理論

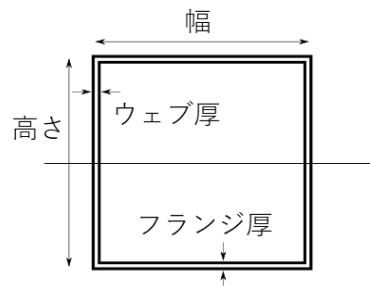
2021 齊木・鄭：断面変形を考慮した梁理論

検討対象

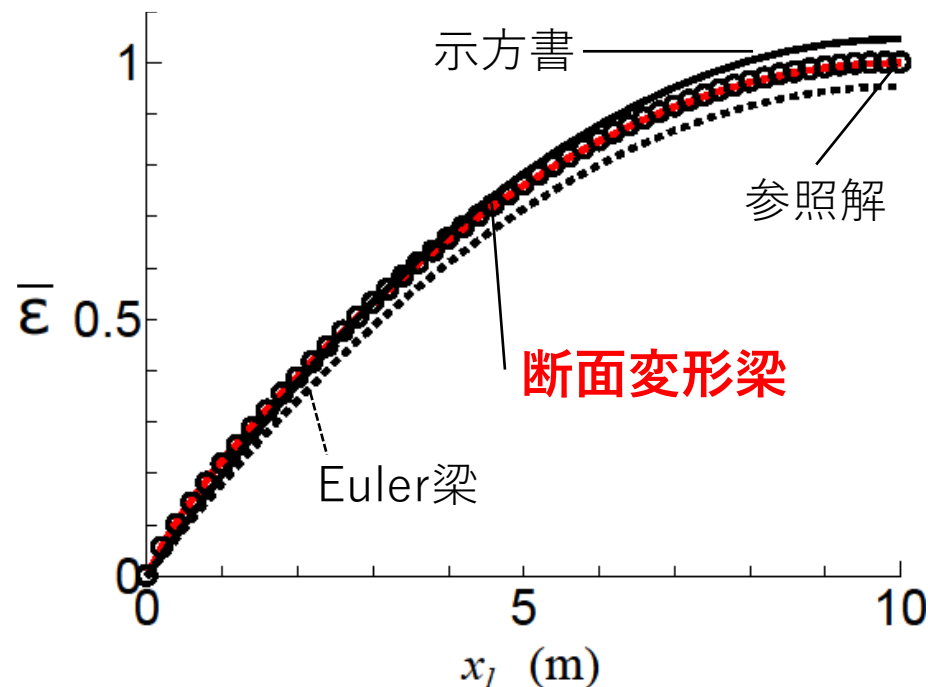
等分布荷重を受ける単純梁



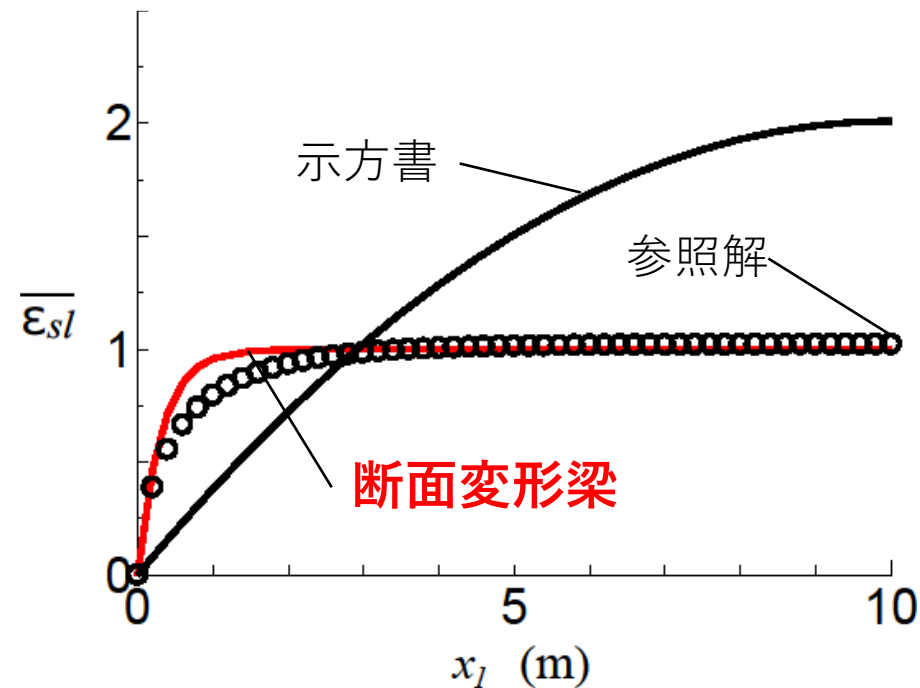
均質薄肉箱断面



上フランジ上面の軸方向ひずみ



付加的な軸ひずみ



示方書よりも軸方向ひずみをよい精度で再現できる



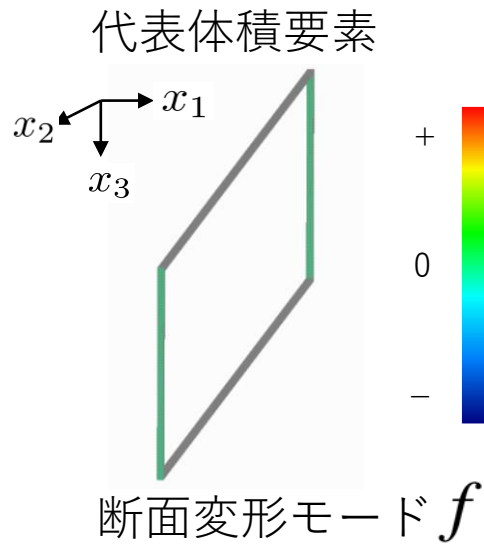
設計での使用を目指す

断面変形を考慮した梁理論

梁の軸方向変位場

$$u_1 = \text{曲げ変形} + \text{断面変形モード } f \times \text{断面変形の大きさ } g$$

有限要素解析により f を得る



断面変形パラメタが求まる

断面変形パラメタ

$$K_{seq} = \int_A G f_{,3} dA$$

f の断面積分から決定

軸ひずみやたわみが求まる

ex) 等分布荷重を載荷した
単純梁における軸ひずみ

< 軸方向ひずみ >

曲げによる軸ひずみ $-\frac{qf}{K_{seq}}$

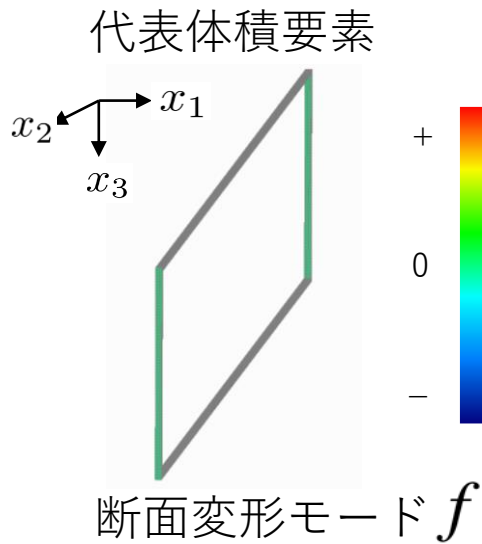
付加的なひずみ

断面変形を考慮した梁理論

梁の軸方向変位場

$$u_1 = \text{曲げ変形} + \text{断面変形モード } f \times \text{断面変形の大きさ } g$$

有限要素解析により f を得る



設計段階では簡易化したい

断面変形パラメタが求まる

断面変形パラメタ

$$K_{seq} = \int_A G f_{,3} dA$$

f の断面積分から決定

軸ひずみやたわみが求まる

ex) 等分布荷重を載荷した
単純梁における軸ひずみ

< 軸方向ひずみ >

曲げによる軸ひずみ $-\frac{qf}{K_{seq}}$

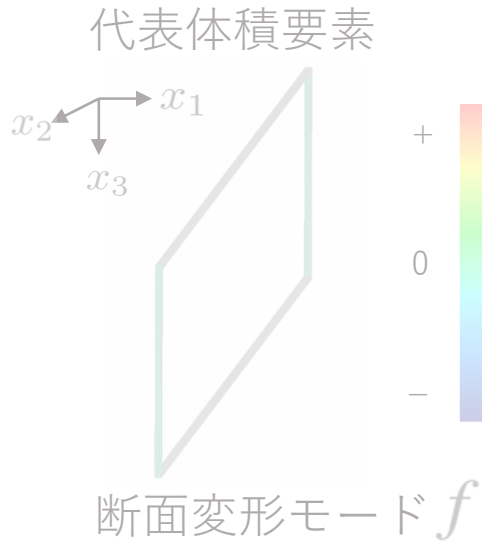
付加的なひずみ

断面変形を考慮した梁理論

梁の軸方向変位場

$$u_1 = \text{曲げ変形} + \text{断面変形モード } f \times \text{断面変形の大きさ } g$$

有限要素解析により f を得る



断面変形パラメタが求まる

断面変形パラメタ

$$K_{seq} = \int_A G f_{,3} dA$$

~~f の断面積分から決定~~

パラメタを推定する

軸ひずみやたわみが求まる

ex) 等分布荷重を載荷した
単純梁における軸ひずみ

< 軸方向ひずみ >

曲げによる軸ひずみ $-\frac{qf}{K_{seq}}$

付加的なひずみ

機械学習を用いる

線形回帰

2021 三井・斉木：せん断遅れによる付加的な応力の評価

➡ 線形回帰による断面パラメタ推定法

線形回帰

$$y(x) = w^T \phi(x)$$

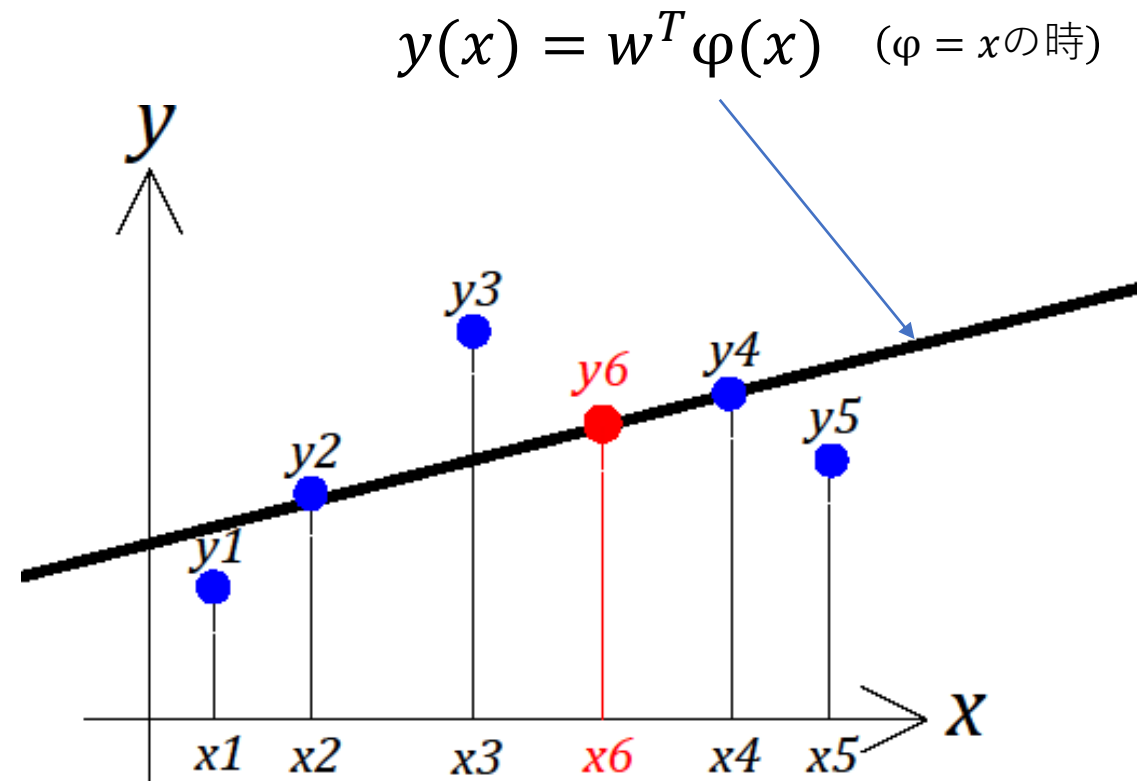
w : 重みベクトル

$\phi(x)$: 基底関数

既知のデータから重みベクトル w を求める



新しい x に対する y を得る



ガウス過程

Gaussian procession

5/8

ガウス過程 : 出力 y の値はガウス分布に従うと仮定

カーネル関数

→ 「入力 x が似ていれば出力 y も似ている」ことを共分散 K で表現

RBFカーネル $k(x, x') = \theta_1 \exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{\theta_2}\right)$ → x 同士の類似度を表す

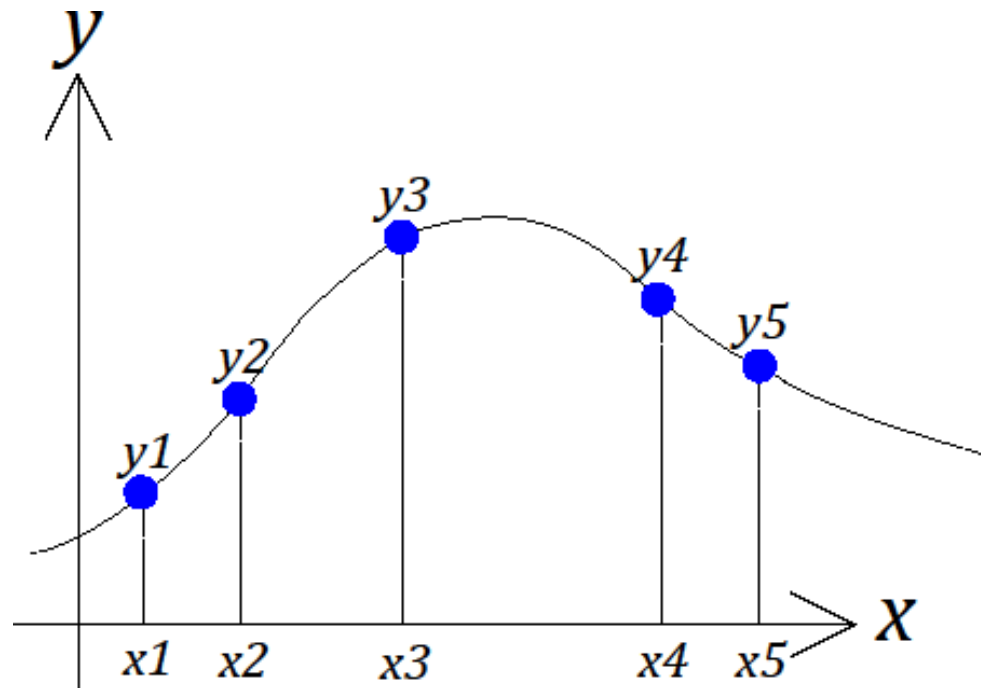
既知の値

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$$

共分散行列 K のガウス分布を仮定

共分散行列

$$K = \begin{matrix} & x_1 & \cdots & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right] \end{matrix}$$



ガウス過程

Gaussian procession

5/8

ガウス過程 : 出力 y の値はガウス分布に従うと仮定

カーネル関数

→ 「入力 x が似ていれば出力 y も似ている」ことを共分散 K で表現

RBFカーネル $k(x, x') = \theta_1 \exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{\theta_2}\right)$ → x 同士の類似度を表す

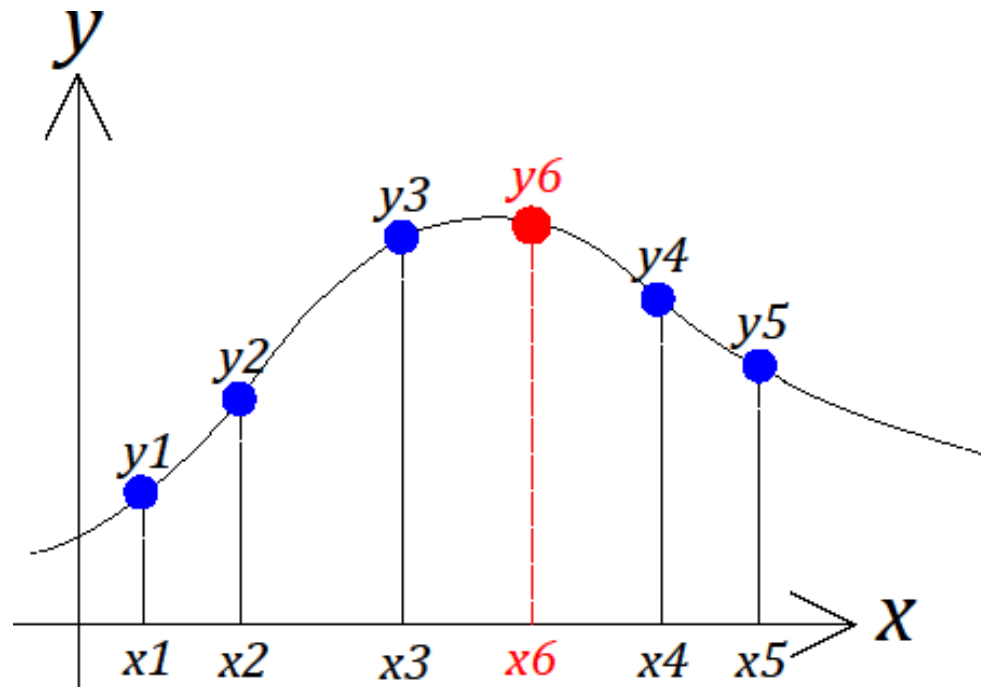
既知の値

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$$

共分散行列 K のガウス分布を仮定

新しい出力

$$y_6 \begin{cases} \text{平均} & k_*^T K^{-1} y \\ \text{分散} & k_{**} - k_*^T K^{-1} k_* \end{cases}$$



パラメタの推定

軸ひずみの解析解

$$\varepsilon_{11} = \text{曲げによる軸ひずみ} - \frac{qf}{K_{seq}}$$

付加的な軸ひずみ

$\frac{f}{K_{seq}}$ が得られればよい

$\frac{f_{max}}{K_{seq}}$ を推定する

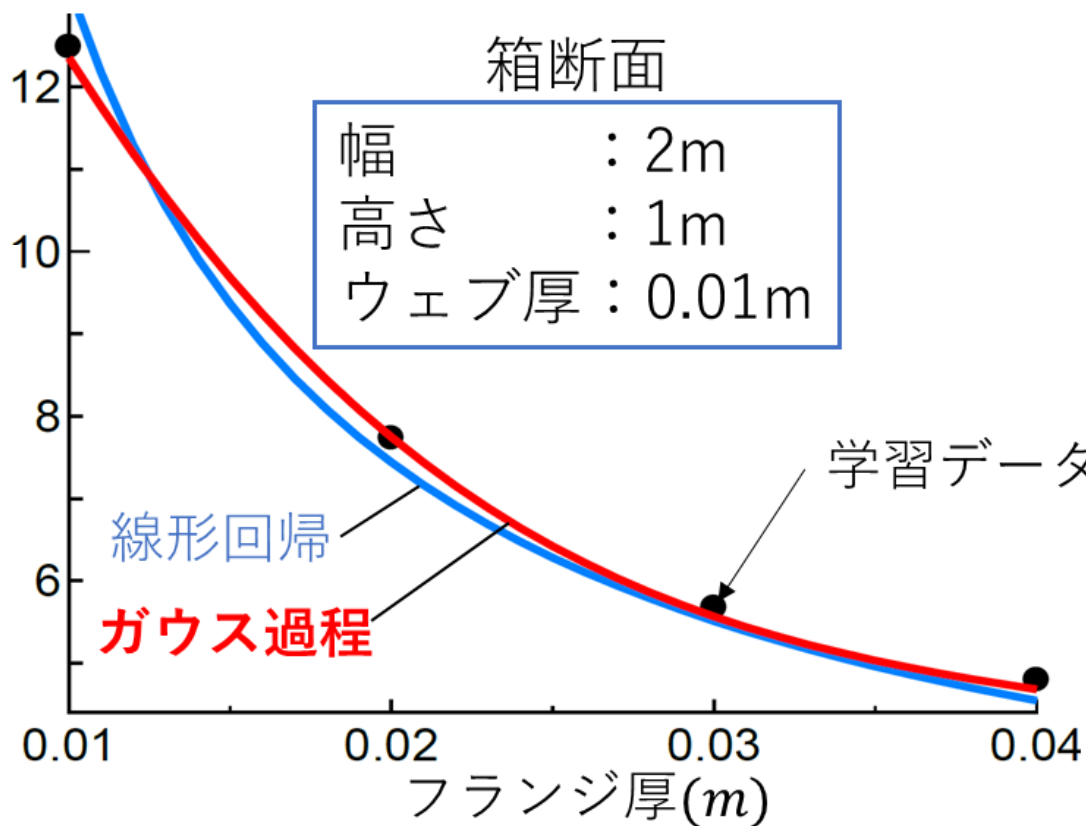
f_{max} : フランジ上面の最大値

パラメタ推定の一例

フランジ厚を変化させたとき
箱断面

幅 : 2m
高さ : 1m
ウェブ厚 : 0.01m

付加的なひずみ



ガウス過程の方が当てはまりがよい

軸ひずみで精度検証

検証用データ20個について

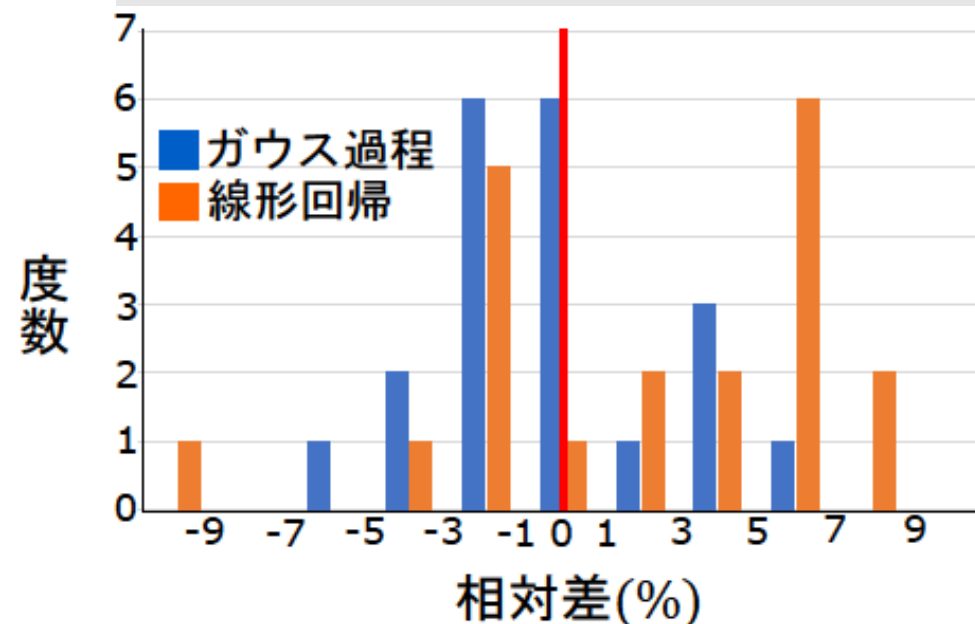
推定したパラメタから軸ひずみを求め、断面変形梁理論による解と比較

軸ひずみ相対差の絶対値平均(支間中央)

ガウス過程	6.7×10^{-4}
線形回帰	1.3×10^{-3}
示方書	0.21

半分程度
の相対差

軸ひずみ相対差の分布(支間中央)



線形回帰の半分程度の
相対差で推定できた

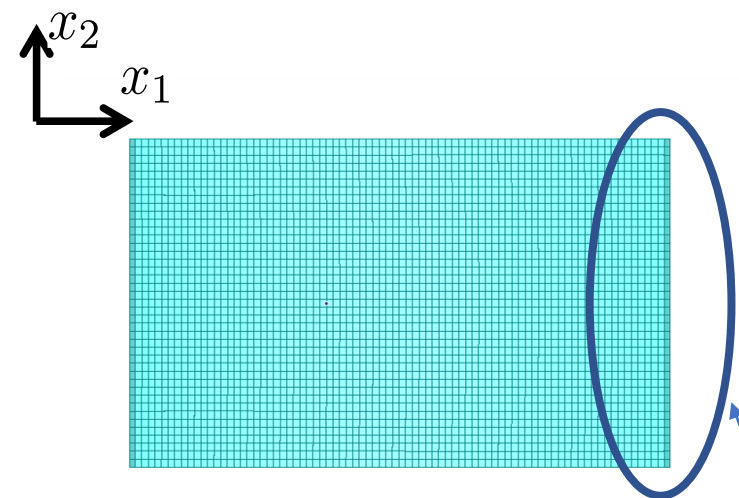
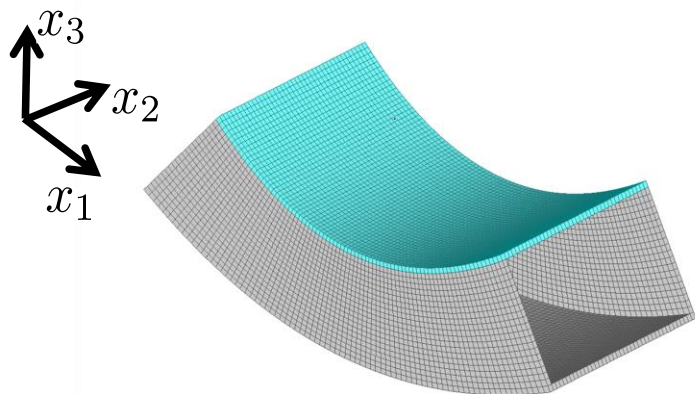
ガウス過程の方が
ばらつきも小さい

箱断面を対象に，齊木・鄭のせん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮できる梁理論で用いる断面変形パラメタを機械学習により推定した。
推定したパラメタから軸ひずみを算出し，道路橋示方書やこれまでに提案された線形回帰による方法と比較した。

- ガウス過程によって断面変形パラメタを推定することで，代表体積要素の有限要素解析を行わずに精度よく断面変形梁理論を再現できた。
- 本手法は道路橋示方書や線形回帰による手法よりも精度よく付加的なひずみを評価できた。
- 断面変形パラメタは学習データを増やすことでさらに精度よく推定できると考えられる。

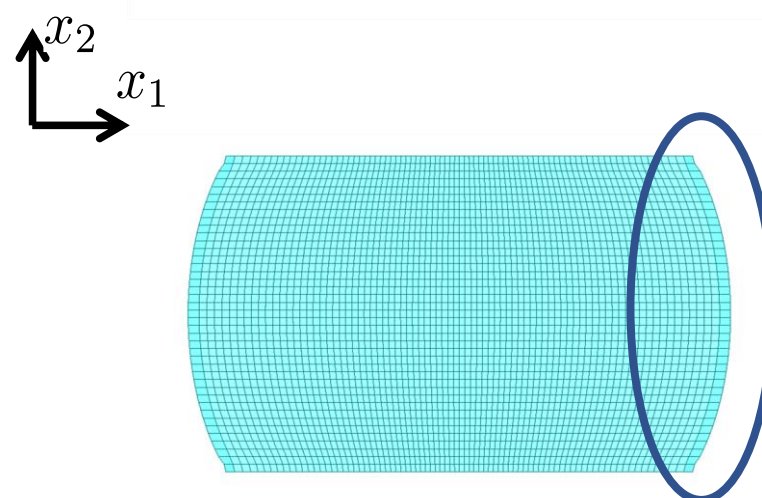
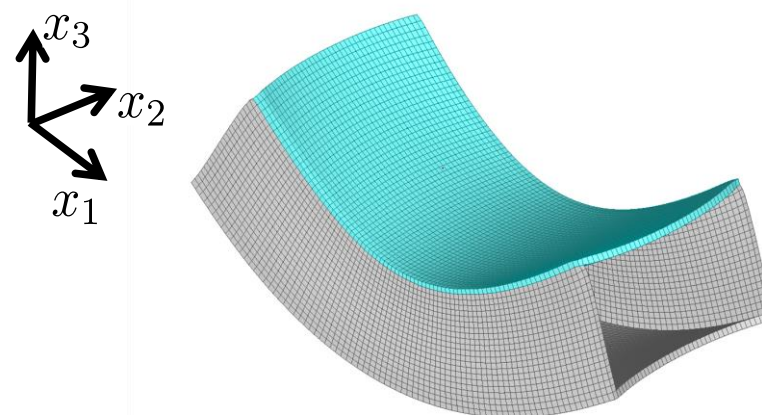
せん断遅れ

平面保持の仮定あり
(Eulerの梁理論)



軸方向変位一定

平面保持の仮定なし



軸方向変位一定でない

道路橋示方書の有効幅

道路橋示方書・同解説, II 鋼橋・鋼部材編, 13.3 フランジ

$$\lambda = b \left. \begin{array}{l} \left(\frac{b}{l} \leq 0.05 \right) \\ \left(0.05 < \frac{b}{l} < 0.30 \right) \\ \left(0.30 \leq \frac{b}{l} \right) \end{array} \right\} \dots (13.3.1) \quad \rightarrow \quad \text{幅と支間のみで
せん断遅れを
考慮している}$$

$\lambda = b$

$= \left\{ 1.1 - 2 \left(\frac{b}{l} \right) \right\} b$

$= 0.15l$

λ : フランジの片側有効幅 (mm) (図-13.3.1)

b : 腹板の間隔の 1/2 又は片持部のフランジの突出幅 (mm) (図-13.3.1)

l : 等価支間長 (mm) (表-13.3.1)

断面変形パラメータ

11/8

$$R_1 := \int_A E x_3 f \, dA \quad R_2 := \int_A E f^2 \, dA$$

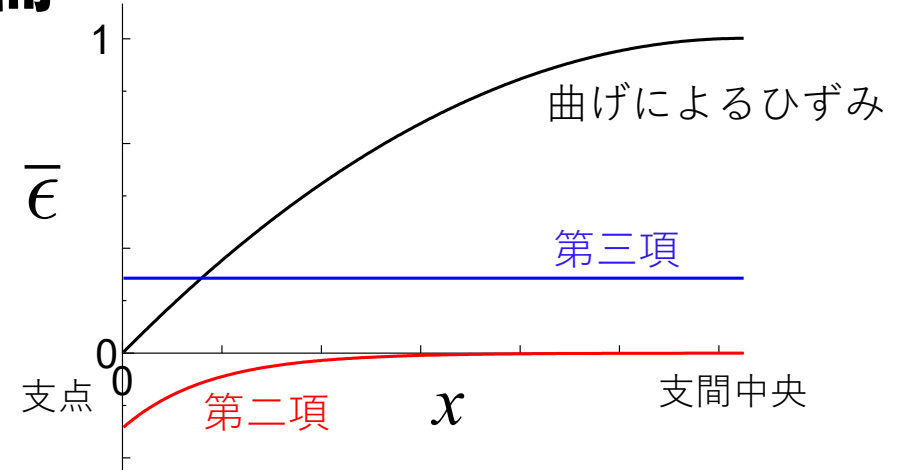
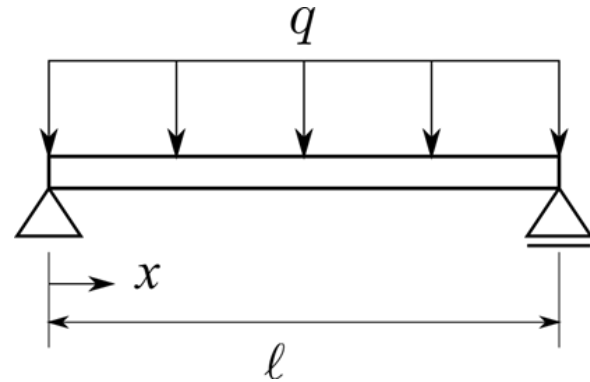
$$R_3 := \int_A G \left\{ (f_{,2})^2 + (f_{,3})^2 \right\} \, dA \quad R_4 := \int_A G f_{,3} \, dA$$

E : ヤング率 G : せん断弾性係数

$$K_{\text{seq}} := K_s - \frac{(R_4)^2}{R_3} \quad k := \sqrt{\frac{R_3}{R_2} - \frac{(R_4)^2}{K_s R_2}}$$

K_s : せん断剛性

断面変形を考慮した梁理論



軸ひずみの解析解

$$\epsilon_{11} = \text{曲げによる軸ひずみ} + \underbrace{\frac{qf}{K_{\text{seq}}} \frac{\exp(kx) + \exp(kl) \exp(-kx)}{1 + \exp(kl)} - \frac{qf}{K_{\text{seq}}}}_{\text{付加的な軸ひずみ}}$$

→せん断遅れによる付加的なひずみは、 $\frac{f}{K_{\text{seq}}}$ と k によって決定

① 支間中央部において、付加的なひずみは第三項の定数が支配的

② 最大ひずみに注目



$$\frac{f_{\text{max}}}{K_{\text{seq}}} \text{ (定数項) の推定について述べる}$$

f_{max} : フランジ上面の最大値

ガウス過程

Gaussian procession

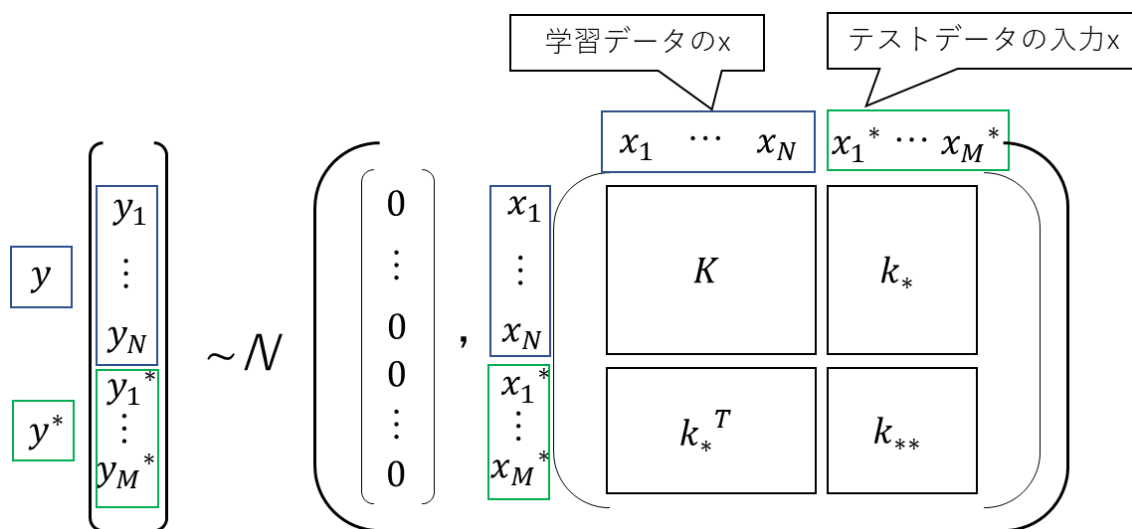
カーネル関数

RBFカーネル $k(x, x') = \theta_1 \exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{\theta_2}\right)$

$$K(n, n') = k(x_n, x_{n'}) \quad (n = 1, \dots, N, \quad n' = 1, \dots, N)$$

$$k_*(n, m) = k(x_n, x_m) \quad (n = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M)$$

$$k_{**}(m, m') = k(x_m, x_{m'}) \quad (m = 1, \dots, M, \quad m' = 1, \dots, M)$$



出力yがガウス分布に従うと仮定



$$y^* \begin{cases} \text{平均} & k_*^T K^{-1} y \\ \text{分散} & k_{**} - k_*^T K^{-1} k_* \end{cases}$$

ハイパーパラメタの決定

RBFカーネル $k(x, x') = \theta_1 \exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{\theta_2}\right)$

θ_1, θ_2 はハイパーパラメタ  最尤推定する


Kは θ に依存  K_θ

入力 x から出力 y を得る確率は $p(\mathbf{y} | X, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{y} | \mathbf{0}, \mathbf{K}_\theta)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{|\mathbf{K}_\theta|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K}_\theta^{-1} \mathbf{y}\right)$$

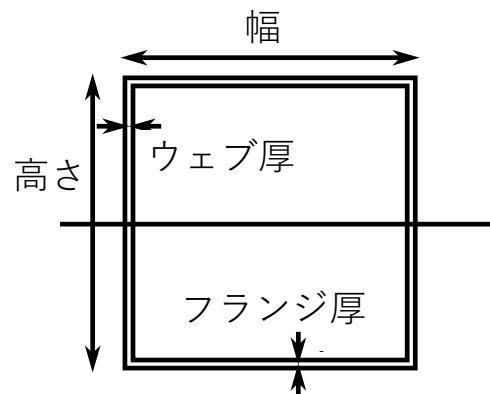
対数を取ると $\log p(\mathbf{y} | X, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{K}_\theta| - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K}_\theta^{-1} \mathbf{y}$

$$\propto -\log |\mathbf{K}_\theta| - \mathbf{y}^T \mathbf{K}_\theta^{-1} \mathbf{y}$$

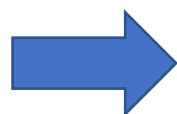
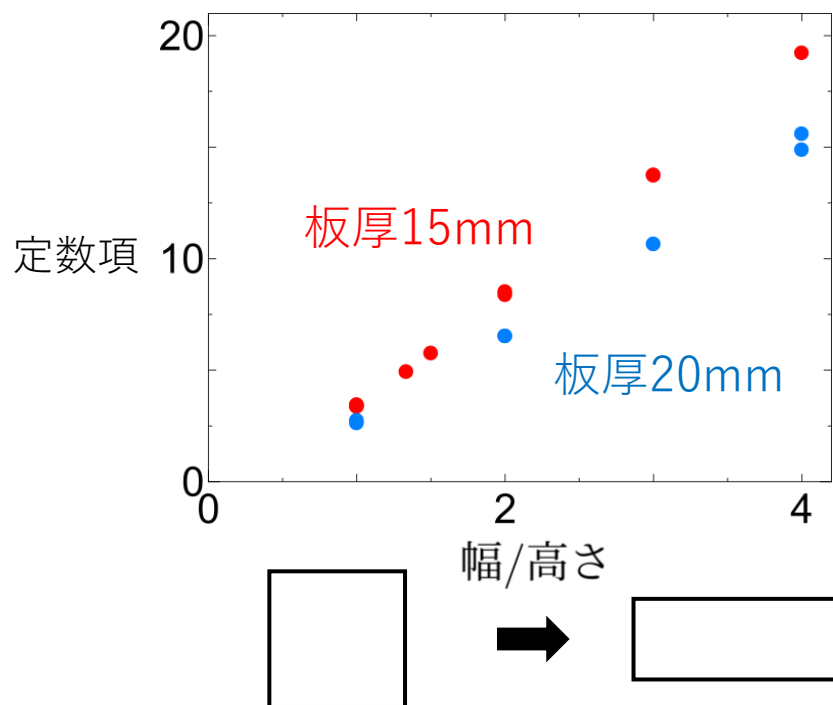
 最大になる θ を求める

線形回帰による推定式

検討対象：均質薄肉箱断面



高さ：0.5～4m 板厚：10～40mm
幅/高さ：1～4



線形の関係を見つけ出し、基底関数とする。
($1/t_f, t_w$ についても同様)

$$\frac{f_{max}}{K_{seq}/G} = 0.075 \frac{b}{h} \frac{1}{t_f} - 0.71 \frac{1}{t_f} t_w + 0.58 \frac{b}{h} - 0.027 \frac{1}{t_f} - 17t_w + 0.66$$