せん断遅れによる付加的な応力評価のための機械学習による断面特性推定

Estimation of cross-sectional characteristics by machine learning for evaluation of additional stress due to shear lag

青木洋樹 *
Hiroki AOKI

*構造強度学研究室（指導教員：京谷孝史　教授，研究指導教員：斉木功　准教授）

幅広フランジを持つ梁のフランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布は，せん断遅れのために一様ではなく，ウェブ上の曲げ応力は初等梁理論よりも大きくなる．道路橋示方書ではせん断遅れによる付加的な応力を，有効幅を用いて見かけ上の曲げ剛性を小さくすることで考慮している．しかしせん断遅れは曲げではなく, せん断変形に起因する断面変形によって生じることが分かっている．これまでにせん断による断面変形の自由度を持つ梁理論が提案され，この断面変形梁理論では 3 つの断面パラメタを導入することで，せん断遅れによる付加的な応力を正確に求めることができる．しかし，断面パラメタの決定には断面の有限要素解析を行う必要がある．本研究ではせん断遅れによる付加的な応力を簡易的かつ高精度で算定するために，有限要素解析の代わりに機械学習を用いた断面パラメタの推定を試みた．

Key Words: *shear lag, deformation of cross section, machine learning, Gaussian process*

1. はじめに

幅広フランジを持つ梁のフランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布は，せん断遅れのために一様ではなく，ウェブ上の曲げ応力は初等梁理論よりも大きくなる．道路橋示方書ではせん断遅れによる付加的な応力を, 有効幅を用いて見かけ上の曲げ剛性を小さくすることで考慮している．しかし，これまでの研究からせん断遅れは曲げではなく，せん断変形に起因する断面変形によって生じることが分かっている．

斉木・鄭[1] は，せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮できる梁理論を提案している．以後これを断面変形梁理論と呼ぶ．この方法では，代表体積要素に一様せん断変形を与えたときの軸方向変位をそのまま断面変形モード f として，f から決定される断面パラメタを用いることで，せん断遅れによる付加的な応力を正確に求められる．しかし断面パラメタを求めるには断面の有限要素解析が必要である．設計段階ではより簡易的な手法が求められるため，三井・斉木[2] は，断面形状を変化させてパラメトリックスタディを実施し，有限要素解析を行わずに付加的な応力評価をするための，線形回帰による断面パラメタ推定式を提案した．しかし断面パラメタと断面形状の関係は複雑であり，線形回帰による推定式の精度には限界がある．

そこで本研究では，非線形な関係にも対応可能な機械学習を用いた, 付加的な応力の評価をするための断面パラメタ推定法を提案する．

2. 断面変形を考慮した梁の軸ひずみ

断面変形梁理論[1] によれば**図–1** のように単純支持されて等分布荷重 q を受けるときの軸ひずみの解析解は,

$$\epsilon_{11} = \frac{qz}{K_\mathrm{b}}\left(\frac{1}{2}\ell x - \frac{1}{2}x^2\right) + q\frac{f}{K_\mathrm{seq}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{k\ell}{2}}\mathrm{e}^{kx} + \mathrm{e}^{\frac{k\ell}{2}}\mathrm{e}^{-kx}}{\mathrm{e}^{\frac{k\ell}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{k\ell}{2}}} - q\frac{f}{K_\mathrm{seq}} \tag{1}$$

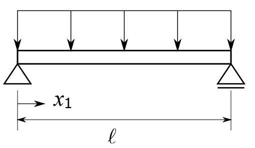
と表される．ここに，e は Napier 数，K_b は曲げ剛性, k，K_seq は断面変形に関するパラメタ R_2，R_3 から得られるパラメタであり，K_s をせん断剛性 GA として

$$k^2 = \frac{R_3 K_\mathrm{seq}}{K_\mathrm{s} R_2}, \quad K_\mathrm{seq} = K_\mathrm{s} - R_3 \tag{2}$$

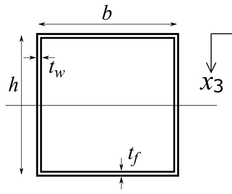
という関係がある[1]．ここに R_2，R_3 は

$$R_2 := \int_A E f^2 dA, \quad R_3 := \int_A G\left\{(f_{,2})^2 + (f_{,3})^2\right\} dA \tag{3}$$

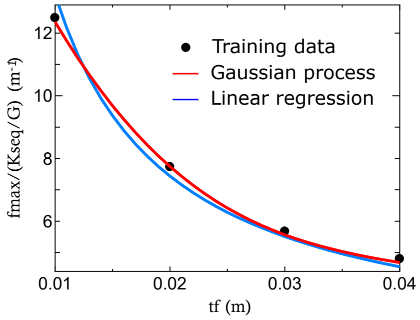
と定義されており，支配方程式導出の過程で断面変形モード f から得られる[1]．E はヤング率，G はせん断弾性係数，A は断面である．$(\cdot)_{,i}$ は梁軸方向を x_1，梁軸直角水平方向を x_2，鉛直方向を x_3 とした時の x_i に関する偏導関数を表す．右辺の第 1 項は Euler-Bernoulli 梁の曲げによるひずみ，第 2 項以降が断面変形に起因する付加的なひずみである．式 (1) に示すように，付加的な軸ひずみは f/K_seq と k によって決まる．なお，支持条件や荷重条件を変えても，上記の 2 つの変数によって断面変形に起因する付加的なひずみが決定されることは確認できている．



図–1 等分布荷重を受ける単純梁



図–2 箱断面



図–3 断面パラメタ推定の一例

表–1 ウェブ上軸ひずみの相対差の絶対値平均（支間中央）

本提案	線形回帰	示方書
6.7×10^{-4}	1.3×10^{-3}	2.1×10^{-1}

3. ガウス過程による断面パラメタ推定

せん断遅れと横せん断による断面変形が，曲げに対して無視できない影響をおよぼす典型的な部材として，**図–2** に示す単一材料の箱断面を選択する．b は断面の幅，h は断面の高さ，t_f はフランジ厚，t_w はウェブ厚を表す．この箱断面に対して，断面変形梁理論で採用する変位場に必要な断面変形モード f を求めるために，代表体積要素に単位の横せん断変形を与えた[3)]．代表体積要素は 1 次 6 面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した．

本研究では断面形状を入力値，それらに対する断面パラメタを出力値として学習に使用する，教師あり学習の回帰モデルを構築した．まず，M 個の入力値からなる一般的な線形モデルは

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

と表される．$\boldsymbol{x}$ は入力ベクトル，$\boldsymbol{w}$ は M 次元の重みベクトル，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ は基底関数である．$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ をあらかじめ設定し，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の学習データより $\boldsymbol{w}$ を推定するパラメトリックアプローチに対し，カーネル関数 k を導入することで $\boldsymbol{w}$ を求めず学習データに対する $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ を求めるノンパラメトリックアプローチをカーネル法と称する．本研究ではカーネル法の一方法であるガウス過程回帰をモデルに用いた[4)]．ガウス過程回帰はベイズ推定を用いる手法であり，出力が確率的に得られるモデルである．カーネル関数 k にはガウス (RBF) カーネル

$$k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \theta_1 \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}{\theta_2}\right) + \theta_3\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \tag{5}$$

を用いた．θ_i はハイパーパラメータであり，最尤推定を行うことで決定した．学習データ同士の類似度を表す行列を K，推定したい入力と学習データの類似度を表す行列を $\boldsymbol{k}_*$ とすると，推定する出力の期待値は

$$E[\boldsymbol{y}^*] = \boldsymbol{k}_*^{\mathrm{T}}K^{-1}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

と表される．K，$\boldsymbol{k}_*$ はカーネル関数から求められる．

本研究ではガウス過程を用いて，$f_{\max}/K_{\mathrm{seq}}$，$R_2$，$R_3$ を出力 $\boldsymbol{y}$ として推定した．$f_{\max}$ はフランジ上面の断面変形モード f の最大値であり，その位置で付加的なひずみが最大となる．これらの 3 つのパラメタが推定できれば，断面変形を考慮したたわみや軸ひずみの評価ができる．$f_{\max}/K_{\mathrm{seq}}$ の推定では b/h，t_f，t_w を入力 $\boldsymbol{x}$ とし，R_2，R_3 の推定では，b，h，t_f，t_w を入力 $\boldsymbol{x}$ とした．$f_{\max}/K_{\mathrm{seq}}$ の推定における入力値は，三井・斉木[2)] によるパラメトリックスタディを参照して決定した．

ここに，断面パラメタ推定の一例を**図–3** 示す．b = 2 m，h = 1 m，t_w = 0.01 m とし，0.01 m ≦ t_f ≦ 0.04 m の範囲で t_f を変化させて $f_{\max}/K_{\mathrm{seq}}$ を推定したものである．**図–3** から，ガウス過程の方が学習データに対する当てはまりが良いことがわかる．

4. 付加的なひずみの評価

ガウス過程の回帰モデルの推定能力を検証するために，学習データとは別にテストデータを 20 種類用意した．精度の検証として**図–1** に示す単純支持梁の境界値問題を考え，ℓ = 20 m として，推定したパラメタから求めた軸ひずみを，断面変形梁理論[1)] によるものと比較する．なお，比較対象とした断面変形梁理論[1)] による軸ひずみが，通常の連続体ソリッド要素による数値解析結果を高い精度で再現できることはわかっている[1)2)]．推定精度は，三井・斉木[2)] により提案された線形回帰による方法と，道路橋示方書で比較した．なお，道路橋示方書によるひずみは有効幅を用いて断面形状を定義し，Euler 梁により求めた．断面変形梁理論[1)] を基準とした 20 種類のテストデータの支間中央における軸ひずみの相対差の絶対値平均を**表–1** に示す．ガウス過程による推定を用いることで，示方書や線形回帰による方法よりもよい精度で断面変形梁理論[1)] による軸ひずみを再現できた．

参考文献

1) 斉木功，鄭勲：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.
2) 三井涼平，斉木功：断面変形梁理論に基づくせん断遅れによる付加的な応力の評価，令和 2 年度東北支部技術研究発表会，I-30.
3) 斉木功，藤本竜太，山本剛大：非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察，土木学会論文集 A2, Vol.74, pp.I_3-I_11, 2018.
4) 持橋大地，大羽成征：ガウス過程と機械学習，講談社，2019.

(2022 年 2 月 7 日 提出)