

Poisson 効果を考慮した一般化梁の定式化と その有限要素の開発

Generalized beam theory considering cross-sectional deformation due to Poisson's effect
and its finite element

田淵航*
Ko TABUCHI

*構造強度学研究室（指導教員：京谷孝史 教授，研究指導教員：斉木功 准教授）

Beam elements, which are finite elements based on beam theory, are sometimes used for structural analysis of large structures such as bridges. The reason for this is that the number of degrees of freedom can be greatly reduced in the beam element compared to the continuum finite element. The elementary beam theory is based on the assumption that members are slender and do not deform in cross-section. However, since members handled in practice are not necessarily slender, it is useful to improve the accuracy of the beam theory by considering cross-sectional deformation. Many beam theories have been proposed that incorporate cross-sectional deformations associated with shear, such as transverse shear deformation and shear lag, into the displacement field. However, to the best of the author's knowledge, there are few beam theories that incorporate the cross-sectional deformations associated with bending and axial forces caused by Poisson's effect into the displacement field. In this study, we propose a beam theory that incorporates the cross-sectional deformation due to Poisson's effect. The results show that the accuracy is improved compared to the conventional method that does not take Poisson's effect into account.

Key Words: Poisson's effect, Timoshenko beam, cross-sectional deformation, shear lag, transverse shear

1. はじめに

Bernoulli-Euler による初等梁理論は、梁の変位場を仮定することで、連続体のつり合い式を軸線の運動だけで表す理論である。橋梁のような大規模構造物の構造解析には梁理論に基づく有限要素である梁要素を用いることがある。これは、連続体有限要素と比較すると梁要素の方が自由度を大幅に削減できるためである。梁理論は部材が細長く断面変形しないという仮定の上に成り立っているが、実務で扱う部材は必ずしも細長くないため、断面変形を考慮することで梁理論の精度を向上させることは有用である。

斉木・鄭¹⁾は有限要素離散化した代表体積要素に単位横せん断変形を与えることで得られる断面変形モードを変位場に組み込んだ梁理論を提案している。斉木・鄭¹⁾の手法（以下、従来の手法）を用いれば、非均質断面も含めた任意断面の横せん断変形とせん断遅れを統一的に考慮することが可能である。また、従来の手法ではせん断に伴う断面変形をせん断力とは独立に考慮しており、片持ち梁の支点部や連続梁の中間支点といったせん断力とせん断に伴う断面変形が比例しない箇所での精度を向上させている。ただし、従来の手法は Poisson 効果による断面変形の影響を考慮していない。

積層梁や鋼コンクリート複合断面を有する梁のような、Poisson 比の異なる材料を組み合わせで作られた非均質断面を有する梁の変形においては、Poisson 効果の影響を無視できないことが予想される。Schaefer et al.²⁾は Poisson 効果によるひずみを考慮した梁理論を定式化し、ひずみセンサの測定値から梁の形状を再構成する方法を提案しているが、非均質断面梁は対象として

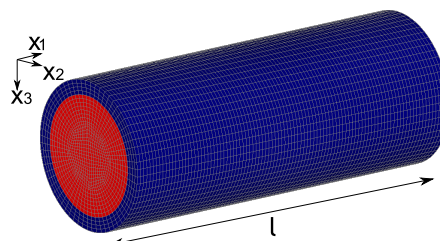


図-1 解析対象と座標・領域の設定

いない。

本研究では従来¹⁾の手法に倣い、曲げや軸変形に伴う Poisson 効果による断面変形を曲げや軸変形とは独立に考慮した梁理論を提案する。

2. Poisson 効果を考慮した梁理論の定式化

(1) 問題と変位場の設定

図-1 に示すような長さ l の長さ方向に一樣な任意形状断面の梁を解析対象とする。梁軸方向を x_1 、梁軸直角水平方向を x_2 、鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する。解析対象の梁軸方向領域を $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq l\}$ 、断面の領域を S とする。断面に x_2 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸と x_3 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸との交点を x_2, x_3 の原点とする。

従来¹⁾の手法では任意形状断面の全断面領域において、せん断遅れに起因する x_1 軸方向変位と横せん断に起因する x_1 軸方向変位の両者を統合して断面変形の変位場を $f_s(x_2, x_3)$ と定義している。本論文ではこの変位場に加えて、Poisson 効果による $x_2 - x_3$ 面内方向の断面変形の変位場を考慮することを提案する。

梁の軸線の x_1 軸方向変位を $\bar{u}_1(x_1)$ 、たわみを $\bar{u}_3(x_1)$ 、

回転を $\theta(x_1)$, せん断遅れと横せん断に起因する軸方向の断面変形の変位場 $f_s(x_2, x_3)$ に対する一般化変位を $g_s(x_1)$, Poisson 効果に起因する曲げによる面内方向の断面変形の変位場 $f_b(x_2, x_3)$ (x_2 方向の成分 f_{b2} と x_3 方向の成分 f_{b3} を持つ) に対する一般化変位を $g_b(x_1)$, Poisson 効果に起因する軸変形による面内方向の断面変形の変位場 $f_a(x_2, x_3)$ (x_2 方向の成分 f_{a2} と x_3 方向の成分 f_{a3} を持つ) に対する一般化変位を $g_a(x_1)$ とすると, 梁の x_1, x_2, x_3 方向変位場はそれぞれ

$$u_1 = \tilde{u}_1(x_1) + x_3\theta(x_1) + f_s(x_2, x_3)g_s(x_1) \quad (1)$$

$$u_2 = f_{b2}(x_2, x_3)g_b(x_1) + f_{a2}(x_2, x_3)g_a(x_1) \quad (2)$$

$$u_3 = \tilde{u}_3(x_1) + f_{b3}(x_2, x_3)g_b(x_1) + f_{a3}(x_2, x_3)g_a(x_1) \quad (3)$$

と表すことができる.

梁の断面の平均的な横せん断変形 $\tilde{\gamma}(x_1)$ を Timoshenko 梁と同様に断面の回転とたわみ角の差として

$$\tilde{\gamma}(x_1) := \theta(x_1) - (-\tilde{u}_3(x_1)') \quad (4)$$

と定義する. ここで, $:=$ は定義, $(\cdot)'$ は x_1 に関する導関数を表す. 変位場から導かれるひずみは

$$\epsilon_{11} = x_3\theta' + f_s s' + \tilde{u}_1' \quad (5)$$

$$\epsilon_{22} = f_{b2,2}g_b + f_{a2,2}g_a \quad (6)$$

$$\epsilon_{33} = f_{b3,3}g_b + f_{a3,3}g_a \quad (7)$$

$$\gamma_{12} = f_{s,2}g_s + f_{b2}g_b' + f_{a2}g_a' \quad (8)$$

$$\gamma_{23} = (f_{b2,3} + f_{b3,2})g_b + (f_{a2,3} + f_{a3,2})g_a \quad (9)$$

$$\gamma_{13} = \tilde{\gamma} + f_{s,3}g_s + f_{b3}g_b' + f_{a3}g_a' \quad (10)$$

となる. ここで, $(\cdot)_{,i}$ は x_i に関する偏導関数を表す.

(2) 全ポテンシャルエネルギー停留原理による支配方程式の導出

解析領域を $V := L \times S$ とし, 単位 x_1 軸方向長さ当たりの x_3 方向の分布荷重 $q(x_1)$ と単位 x_1 軸方向長さ当たりの x_1 方向の分布荷重 $p(x_1)$ を考慮した梁の全ポテンシャルエネルギー Π は

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_V \{A(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2) + 2B(\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\epsilon_{11}) \\ & + G(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{13}^2)\} dV - \int_L q\tilde{u}_3 dx_1 - \int_L p\tilde{u}_1 dx_1 \end{aligned} \quad (11)$$

と表される. ここで G はせん断弾性係数であり, A, B は Young 率 E および Poisson 比 ν を用いて

$$A = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad B = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (12)$$

と定義した. 式 (11) に式 (5)~(10) を代入して全ポテンシャルエネルギー停留原理を適用し, さらに断面積分を実行すると最終的に, $u_1, u_3, \theta, g_s, g_b, g_a$ に関する以下の支配方程式

$$K_a \tilde{u}_1' + R_{14}\theta' + R_{15}g_s' + R_{16}g_b + R_{17}g_a - N = 0 \quad (13)$$

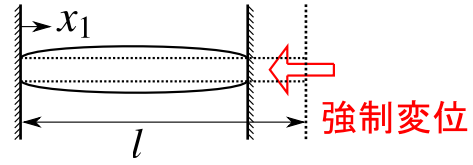


図-2 軸変形を受ける両端固定梁

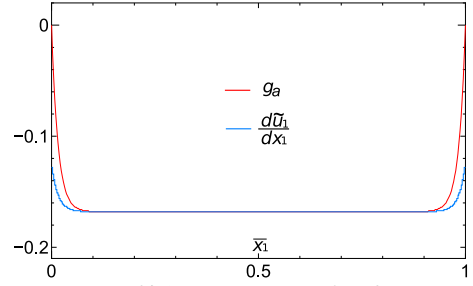


図-3 軸変形を受ける両端固定梁

$$-R_{14}\tilde{u}_1' - K_b\theta' - R_1g_s' - R_6g_b - R_{18}g_a + M = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -R_{14}\tilde{u}_1'' - K_b\theta'' + K_s\tilde{\gamma} + R_4g_s \\ - R_1g_s'' + (R_7 - R_6)g_b' + (R_{19} - R_{18})g_a' = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -R_{15}\tilde{u}_1'' - R_1\theta'' + R_4\tilde{\gamma} + R_3g_s \\ - R_2g_s'' + (R_9 - R_8)g_b' + (R_{21} - R_{20})g_a' = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} R_{16}\tilde{u}_1'' + R_6\theta' - R_7\tilde{\gamma}' \\ + (R_8 - R_9)g_s' + (R_{11} + R_{12} + R_{13})g_b \\ - R_{10}g_b'' + (R_{22} + R_{23} + R_{24})g_a - R_{25}g_a'' = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} R_{17}\tilde{u}_1'' + R_{18}\theta' - R_{19}\tilde{\gamma}' \\ + (R_{20} - R_{21})g_s' + (R_{22} + R_{23} + R_{24})g_b \\ - R_{25}g_b'' + (R_{27} + R_{28} + R_{29})g_a - R_{26}g_a'' = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる. ここで N は軸力, M は曲げモーメントを表す. また, K_s, K_a, K_b はそれぞれせん断剛性, Poisson 変形を拘束した際の軸剛性, Poisson 変形を拘束した際の曲げ剛性であり,

$$K_s := \int_S G dS, \quad K_a := \int_S A dS, \quad K_b := \int_S A x_3^2 dS \quad (19)$$

と定義した. R_i ($i = 1, \dots, 4, 6, \dots, 29$) は断面変形に関するパラメタである. これらのパラメタの値は代表体積要素の有限要素解析および数値積分で求める.

3. 均質矩形充実断面梁による検証

(1) 断面の設定

単一材料の矩形充実断面の梁を解析対象として, 提案した梁理論の精度を検証する. 材料は等方弾性体とし, Young 率を $E = 200\text{GPa}$, Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした. 断面形状は 1 辺の長さが 0.5m の正方形とする. 代表体積要素は 1 辺の長さが $1/80\text{m}$ の立方体形状の 1 次 6 面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した.

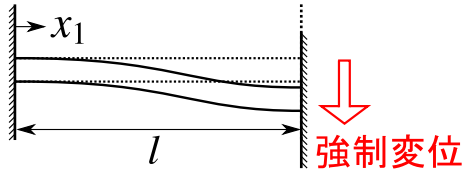


図-4 曲げとせん断を受ける両端固定梁

(2) 軸変形を受ける両端固定梁

図-2に示すような、軸変形を受ける両端固定梁を対象として精度を検証する。長さ $l = 4.8\text{m}$ とし、細長比は約 17 である。本提案手法による解は、式 (13)~(18) を有限要素離散化し、数値的に求めている。要素寸法は参照解とする連続体有限要素の x_1 軸方向の要素寸法と等しくなるように設定した。両端の \bar{u}_3 , θ , g_s , g_b , g_a を 0 とすることで埋込端を再現している。左端の \bar{u}_1 は 0 とし、右端に強制変位 $\bar{u}_1 = -0.8$ を与えることで梁を圧縮している。

参照解とした連続体有限要素によるモデルについて説明する。要素寸法は代表体積要素と同じ 1 辺 $1/80\text{m}$ の立方体とした。両端の断面上の節点を全て完全拘束することで埋込端を再現している。右端の断面上の全ての節点に強制変位 $u_1 = -0.8$ を与えることで梁を圧縮している。

本手法による x_1 軸方向ひずみ \bar{u}_1' と軸変形に伴う断面変形の大きさを表す一般化変位 g_a を図-3に示す。横軸は長さ l で正規化された x_1 座標 \bar{x}_1 を表す。図-3より、端支点部を除けば、 \bar{u}_1' と g_a はほぼ一致することから、軸変形に伴う断面変形の大きさは概ね x_1 軸方向ひずみ \bar{u}_1' に比例することが確認できる。しかし、固定端においては x_1 軸方向ひずみは生じるものの、Poisson 効果による断面変形は拘束される。本手法における軸変形に伴う断面変形の大きさを表す一般化変位 g_a の絶対値は固定端に近づくにつれて急激な低下を示し、固定端で 0 となっており、固定端における断面変形の拘束を適切に再現することができる。

本手法による \bar{u}_1 と従来¹⁾の手法による \bar{u}_1 それぞれについて、参照解による $u_1(x_1, 0, 0)$ に対する相対差 L^2 ノルムを求めて比較を行った。ここで、相対差 L^2 ノルムは、各手法による解 β_p と参照解 β_s との差の L^2 ノルムを参照解の L^2 ノルムで無次元化し、

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p - \beta_s)^2 dx_1}{\int_L (\beta_s)^2 dx_1}} \quad (20)$$

と定義した。本手法の参照解に対する相対差 L^2 ノルムは $1.02 \times 10^{-1}\%$ 、従来¹⁾の手法の参照解に対する相対差 L^2 ノルムは $3.76 \times 10^{-1}\%$ であり、本手法の相対差 L^2 ノルムは従来¹⁾の手法の相対差 L^2 ノルムの 1/4 程度となった。Poisson 比の影響をせん断弾性係数に反映するのみで、Poisson 効果を考慮していない従来¹⁾の手法と比較して本手法の方が参照解に対する精度が良いことがわかる。

(3) 曲げとせん断を受ける両端固定梁

図-4に示すような、曲げとせん断を受ける両端固定梁を対象として精度を検証する。長さや要素寸法は(2)と同じである。両端の u_1 , θ , g_s , g_b , g_a を 0 とすることで埋込端を再現している。左端の u_3 は 0 とし、右端

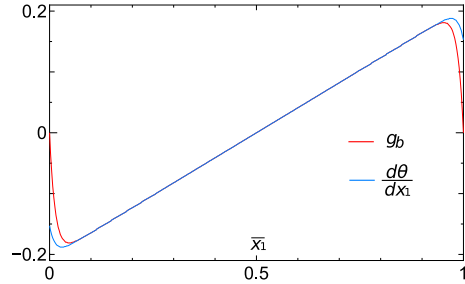


図-5 曲げとせん断を受ける両端固定梁の g_b と \bar{u}_1'

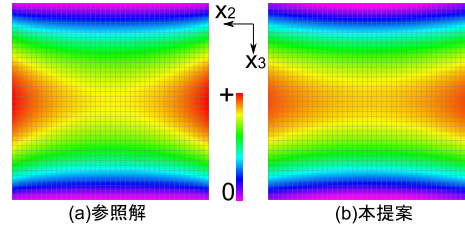


図-6 曲げとせん断を受ける両端固定梁の $x_1 = 1.8\text{m}$ に位置する断面の γ_{13} 分布

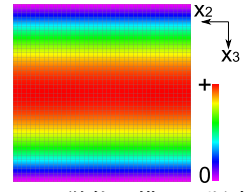


図-7 単位の横せん断変形を与えた代表体積要素の γ_{13} 分布

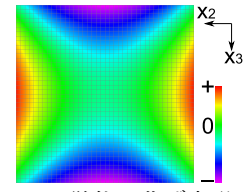


図-8 単位の曲げ変形を与えた代表体積要素の u_3 分布

に強制変位 $u_3 = 0.8$ を与えることで梁に曲げとせん断を与えている。

参照解とした連続体有限要素によるモデルは、両端の断面上の節点を全て完全拘束することで埋込端を再現している。また、右端の断面上の全ての節点に強制変位 $u_3 = 0.8$ を与えることで梁に曲げとせん断を与えている。

本手法による曲率 θ と曲げに伴う断面変形の大きさを表す一般化変位 g_b を図-5に示す。図-5より、端支点部を除けば、 θ と g_b はほぼ一致することから、曲げに伴う断面変形の大きさは概ね曲率 θ に比例することが確認できる。しかし、固定端においては曲率は生じるものの、Poisson 効果による断面変形は拘束される。本手法における軸変形に伴う断面変形の大きさを表す一般化変位 g_b の絶対値は固定端に近づくにつれて急激な低下を示し、固定端で 0 となっており、固定端における断面変形の拘束を適切に再現することができる。

本手法による \bar{u}_3 と従来¹⁾の手法による \bar{u}_3 それぞれについて、参照解による $u_3(x_1, 0, 0)$ に対する相対差 L^2 ノルムを求めて比較を行った。本手法の参照解に対する相対差 L^2 ノルムは $6.36 \times 10^{-2}\%$ 、従来¹⁾の手法の参照解に対する相対差 L^2 ノルムは $1.31 \times 10^{-1}\%$ であり、本手法の相対差 L^2 ノルムは従来¹⁾の手法の相対差 L^2 ノルムの 1/2 程度となった。本手法の方が従来¹⁾の手法よりも参照解に対する精度が良いことがわかる。

図-6に $x_1 = 1.8\text{m}$ ($\bar{x}_1 = 3/8$) の断面における横せん断ひずみ γ_{13} 分布を示す。同図 (a) は参照解、同図 (b) は本手法による解である。同図 (a), (b) 双方において、

γ_{13} は上下端でほぼ 0 となり, $x_3 = 0$ に近づくにつれて大きくなる傾向を示しており, x_2 方向にも非一様な分布となっている. このことから本手法と参照解の γ_{13} 分布は定性的に一致していることがわかる.

曲げとせん断を受けた際の γ_{13} 分布の x_2 方向の非一様性は非零のポアソン比を有する梁に特有の性質である. この性質は Gruttmann & Wagner³⁾ によって既に報告されているが, そのメカニズムは明らかにされていない. 以下では, この非一様性が生じる理由を式 (10) に示した γ_{13} の定義に含まれている付加的な横せん断ひずみ $f_{b3}g'_b$ の影響として説明することを試みる.

図-7 は代表体積要素に単位の横せん断変形を与えた際の γ_{13} 分布である. これは $f_{s,3}$ の分布を意味する. γ_{13} は上下端でほぼ 0 となり, $x_3 = 0$ に近づくにつれて大きくなる傾向を示しているが, x_2 方向の非一様性は現れていない. これは Poisson 比が 0 の場合と同様の傾向である.

図-8 は代表体積要素に単位の曲げ変形を与えた際の u_3 分布である. これは f_{b3} の分布を意味する. f_{b3} は x_2 方向に非一様な分布を示していることがわかる. Poisson 比が 0 の場合は Poisson 効果による断面変形は生じないためこのような分布にはならない. 式 (10) に示した γ_{13} の定義は断面内で一定の値を示す $\tilde{\gamma}$ に $f_{s,3}g_s$ と $f_{b3}g'_b$ を加えることで γ_{13} が表現できることを意味している. 以上より, γ_{13} 分布の x_2 方向の非一様性は Poisson 効果による x_3 方向の断面変形 f_{b3} の持つ x_2 方向の非一様性の影響によって生ずると説明することができる. また, γ_{13} 分布の非一様性の程度はせん断に伴う断面変形の大きさ g_s ではなく, Poisson 効果による曲げに伴う断面変形の大きさの勾配 g'_b に左右されるということが確認できる.

4. 非均質断面梁による検証

(1) 断面の設定

図-1 に示す円形非均質断面の梁を解析対象として, 提案した梁理論の精度を検証する. 赤色で示す円柱部の材料を材料 1, 青色で示す円管部の材料を材料 2 とした. 材料はともに等方弾性体とし, Young 率を $E_1 = E_2 = 200\text{GPa}$ とした. 材料 1 の Poisson 比は $\nu_1 = 0.49$, 材料 2 の Poisson 比は $\nu_2 = 0$ とした. また, 寸法については, 内径を 0.4m, 外径を 0.5m とした. 代表体積要素は 1 辺の長さがおおよそ 1/80m 程度の 1 次 6 面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した. 代表体積要素の有限要素解析から得られる断面の平均的な曲げ剛性は, Young 率と断面二次モーメントの積で求められる曲げ剛性よりも 7.4%ほど大きく, 代表体積要素の有限要素解析から得られる断面の平均的な軸剛性は, Young 率と断面積の積で求められる軸剛性よりも 6.7%ほど大きい. このことから, Poisson 効果を考慮していない従来¹⁾の手法は図-1 に示すような非均質断面の平均的な曲げ剛性や軸剛性を過小評価してしまうことが確認できる.

(2) 軸変形を受ける両端固定梁

図-2 に示すような, 軸変形を受ける両端固定梁を対象として精度を検証する. 長さ $l = 4.8\text{m}$ とし, 細長比は約 19 である.

図-9 に $x_1 = 1.8\text{m}$ ($\bar{x}_1 = 3/8$) の断面における面積ひずみ ϵ_s 分布を示す. 同図 (a) は参照解, 同図 (b) は本手法に

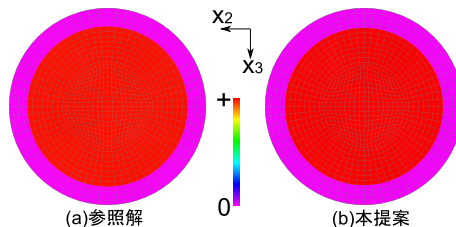


図-9 軸変形を受ける両端固定梁の $x_1 = 1.8\text{m}$ に位置する断面の ϵ_s 分布

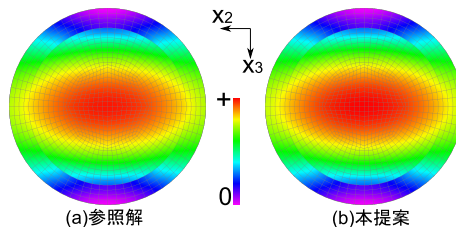


図-10 軸変形を受ける両端固定梁の $x_1 = 1.8\text{m}$ に位置する断面の γ_{13} 分布

よる解である. ただし, 面積ひずみは $\epsilon_s = (\epsilon_{22} + \epsilon_{33})/2$ と定義する. 本手法と参照解の ϵ_s 分布は定性的に一致していることがわかる. 本手法では, 断面内の変形がないと仮定している従来¹⁾の手法では再現できない Poisson 効果による断面内のひずみを再現することができる.

(3) 曲げとせん断を受ける両端固定梁

図-4 に示すような, 曲げとせん断を受ける両端固定梁を対象として精度を検証する. 長さや要素寸法は (2) と同じである.

図-10 に $x_1 = 1.8\text{m}$ ($\bar{x}_1 = 3/8$) の断面における横せん断ひずみ γ_{13} 分布を示す. 同図 (a) は参照解, 同図 (b) は本手法による解である. 本手法と参照解の γ_{13} 分布は定性的に一致していることがわかる.

5. まとめ

本論文では Poisson 効果を考慮可能な梁理論を構築した. 均質矩形充実断面梁に対して本理論を適用し, 連続体要素による数値解析結果を参照解として比較を行った. その結果, Poisson 効果を考慮していない従来¹⁾の手法と比較して精度が改善されることを示した. また, 断面内の γ_{13} ひずみ分布に関しても, Poisson 比が 0 でない断面に特有の x_2 方向に非一様な分布を再現することができた.

参考文献

- 1) 齊木 功, 鄭 勳: せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.
- 2) Schaefer, P.-L., Chagnon, G., Moreau-Gaudry, A.: 3D small strain large deflection beam shape sensing including poisson effect, *Engineering Structures*, Vol.209, 109948, 2020.
- 3) Gruttmann, F., Wagner, W.: Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary sheaped cross-sections, *Computational Mechanics*, Vol.27, pp.199-207, 2001.

(2021年2月3日提出)