断面変形を考慮した梁の動的特性に関する基礎的検討

Fundamental study on dynamic properties of a beam considering cross-sectional deformation

星屋美優 *
Miyu HOSHIYA

*構造強度学研究室（指導教員：京谷孝史 教授，研究指導教員：斉木功 准教授）

For analysis of framed structure, the use of beam elements can reduce the number of degrees of freedom and can improve the efficiency of the analysis compared with the use of the continuum elements. However, for members where the cross-sectional deformation cannot be neglected, such as thin-walled or composite cross-sections, the use of beam elements based on elementary beam theory deteriorates the accuracy of the analysis because of its assumption that the cross-section remains plane. For the dynamic problems, when the wave-length of bending vibration becomes shorter according to an increase of the order of vibration modes, the effect of shear deformation on the dynamic property of the beam becomes relatively large. Although the cross-sectional deformation caused by the shear of the beam, its effect on the dynamic property of the beam has not been studied enough so far. In this study, the dynamic problems of a beam with cross-sectional deformation are formulated. With the proposed beam, the effect of the cross-sectional deformation on the dynamic property of the beam is clarified by comparing the results with those obtained by the conventional beam theory through a series of numerical analyses.

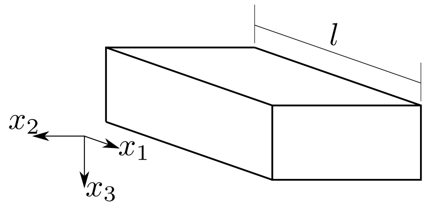
Key Words: *shear lag, deformation of cross-section, periodic boundary condition, finite element method, natural vibration analysis*

1. はじめに

橋梁等の構造解析において，梁要素によりモデル化できれば，連続体要素でモデル化した場合よりも自由度を低減でき，効率的に解析できる．しかし，薄肉断面や複合断面のような断面変形が無視できない部材においては，断面平面保持を仮定した一般的な梁要素を使用すると，解析精度が低下する．支間に比べて桁高や幅が小さくない場合，断面変形の影響が大きくなることが知られている．

梁の断面変形はせん断遅れや横せん断といった要因ごとに研究がなされたが，近年では，均質化梁理論により任意断面のフランジのせん断遅れやウェブの面外せん断変形などの断面変形を考慮した梁理論が開発されている[1),2)]．

動的問題を考える場合，高次の振動モードでは曲げの波長が短くなる．そのため，せん断変形の影響が相対的に大きくなることが知られており，Timoshenko 梁の動的特性に関する研究[3),4)] が盛んに行われてきた．しかしながら，断面変形が梁の動的特性に及ぼす影響は明らかにされていない．そこで，本研究では断面変形を考慮した梁に動的特性を組み込んで定式化し，従来の梁との精度を比較することで，断面変形が動的問題に及ぼす影響を検証する．



図–1 正規直交座標系の設定

2. 支配方程式の定式化

(1) 変位場の設定

図–1 に示すような長さ l の x_1 方向に一様な断面の梁を解析対象とし，正規直交座標系を設定する．x_1 方向の解析対象領域を $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq l\}$，断面の解析対象領域を A とする．梁断面の重心を x_2, x_3 の原点とし，x_1-x_3 面の運動のみを考慮するものとする．時刻 t のときの梁の x_1 軸方向変位場を断面回転による変位と断面変形によるものの和として考えると，

$$u_1 = x_3 \theta(x_1, t) + f(x_2, x_3) g(x_1, t) \tag{1}$$

と表すことができる．ここで，$\theta(x_1, t)$ は梁の断面の回転，$g(x_1, t)$ は断面変形の大きさである．また，$f(x_2, x_3)$ は梁の横せん断による断面の面外ゆがみ変位の分布を表す関数であり，周期境界条件のもとで梁の代表体積要素に横せん断変形を与えた際の断面の任意の点の x_1 方向変位とする[5)]．x_2 軸方向変位場は，$u_2 = 0$，$u_3 = u_3(x_1, t)$ とすると，ひずみは

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3\theta' + fg' \tag{2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \tag{3}$$

$$\epsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{4}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_{,2}g \tag{5}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \tag{6}$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \tilde{\gamma} + f_{,3}g \tag{7}$$

と表すことができる．ここで，$(\cdot)'$ は x_1 に関する導関数，$(\cdot)_{,i}$ は x_i に関する偏導関数を表す．また，$\tilde{\gamma} = \theta + u_3{}'$ は梁の横せん断ひずみである．

(2) 仮想仕事式

解析対象領域を $V := L \times A$ とし，慣性力と単位軸方向長さ当たりの x_3 方向の分布荷重 $q(x_1, t)$，境界条件としての表面力 $p_i (i = 1, 3)$ を考慮した仮想仕事式は，

$$\int_V \Big\{ E\epsilon_1\delta\epsilon_1 + G(\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13}) + \rho(\ddot{u}_1\delta u_1 + \ddot{u}_3\delta u_3) \Big\} \, \mathrm{d}V = \int_L q\delta u_3 \, \mathrm{d}x_1 + \left\{ \int_A (p_1\delta u_1 + p_3\delta u_3) \, \mathrm{d}A \right\} \Bigg|_{x_1=0} \tag{8}$$

と表せる．ここで，$(\dot{\cdot})$ は時間導関数である．上式に式 (1)〜(7) を代入し変形すると，

$$\begin{aligned} &\int_V \Big[E\Big\{ (x_3^2\theta' + fg'x_3)\delta\theta' + (x_3\theta' f + f^2g')\delta g' \Big\} \\ &+ G\Big\{ (f_{,2})^2 g\delta g + (\tilde{\gamma} + f_{,3}g)(\delta\tilde{\gamma} + f_{,3}\delta g) \Big\} \\ &+ \rho\Big\{ (x_3\ddot{\theta} + f\ddot{g})(x_3\delta\theta + f\delta g) + \ddot{u}_3\delta u_3 \Big\} \Big] \, \mathrm{d}V \\ &= \int_L q\delta u_3 \, \mathrm{d}x_1 + \left\{ \int_A (p_1x_3\delta\theta + p_1f\delta g + p_3\delta u_3) \, \mathrm{d}A \right\} \Bigg|_{x_1=0} \end{aligned} \tag{9}$$

となる．断面積分を実行すると，弱形式の支配方程式

$$\begin{aligned} &\int_L \Big\{ (K_\mathrm{b}\theta' + R_1g')(\delta\tilde{\gamma}' - \delta u_3'') + (R_1\theta' + R_2g')\delta g' \\ &+ (K_\mathrm{s}\tilde{\gamma} + R_4g)\delta\tilde{\gamma} + (R_4\tilde{\gamma} + R_3g)\delta g \\ &+ (M_\mathrm{r}\ddot{\theta} + M_\mathrm{r}\ddot{g})(\delta\tilde{\gamma} - \delta u_3') + (M_\mathrm{r}\ddot{\theta} + M_\mathrm{t}\ddot{g})\delta g + M_\mathrm{t}\ddot{u}_3\delta u_3 \Big\} \, \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_L q\delta u_3 \, \mathrm{d}x_1 + \Big\{ \overline{M}(\delta\tilde{\gamma} - \delta u_3') + \overline{D}\delta g + \overline{Q}\delta u_3 \Big\} \Big|_{x_1=0,l} \end{aligned} \tag{10}$$

が得られる．ここで，パラメータ K_b，K_s，R_i，L_i および端部断面に作用する外力の合応力 $\overline{M}$，$\overline{D}$，$\overline{Q}$ は，

$$\begin{aligned} &K_\mathrm{b} := \int_A E(x_3)^2 \, \mathrm{d}A, \quad K_\mathrm{s} := \int_A G \, \mathrm{d}A, \\ &R_1 := \int_A Ex_3f \, \mathrm{d}A, \quad R_2 := \int_A Ef^2 \, \mathrm{d}A, \\ &R_3 := \int_A G\Big\{ (f_{,2})^2 + (f_{,3})^2 \Big\} \, \mathrm{d}A, \quad R_4 := \int_A Gf_{,3} \, \mathrm{d}A, \\ &M_\mathrm{r} := \int_A \rho(x_3)^2 \, \mathrm{d}A, \quad M_\mathrm{t} := \int_A \rho \, \mathrm{d}A, \\ &L_1 := \int_A \rho x_3 f \, \mathrm{d}A, \quad L_2 := \int_A \rho f^2 \, \mathrm{d}A, \\ &\overline{M} := \int_A x_3p_1 \, \mathrm{d}A, \quad \overline{D} := \int_A p_1 f \, \mathrm{d}A, \\ &\overline{Q} := \int_A p_3 \, \mathrm{d}A \end{aligned} \tag{11}$$

と定義した．

式 (10) の δu_3，$\delta\tilde{\gamma}$，δg に関する項を取り出し，それぞれ部分積分を行うと，強形式の支配方程式は，

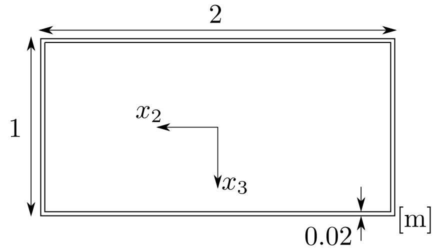
$$-K_\mathrm{b}\theta''' - R_1g''' + M_\mathrm{r}\ddot{\theta}' + L_1\ddot{g}' + M_\mathrm{t}\ddot{u}_3 - q = 0 \tag{12}$$

$$-K_\mathrm{b}\theta'' - R_1g'' + K_\mathrm{s}\tilde{\gamma} + R_4g + M_\mathrm{r}\ddot{\theta} + L_1\ddot{g} = 0 \tag{13}$$

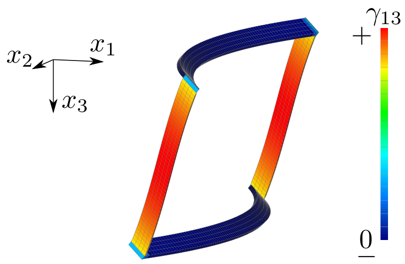
$$-R_1\theta'' - R_2g'' + R_4\tilde{\gamma} + R_3g + L_1\ddot{\theta} + L_2\ddot{g} = 0 \tag{14}$$

となる．

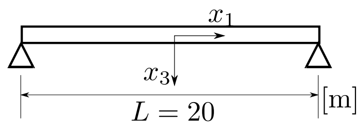
3. 箱断面梁による精度検証



図–2 解析対象の梁の断面図

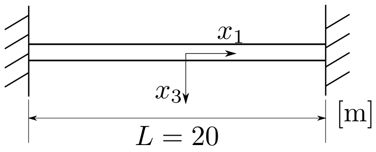


図–3 代表体積要素の変形

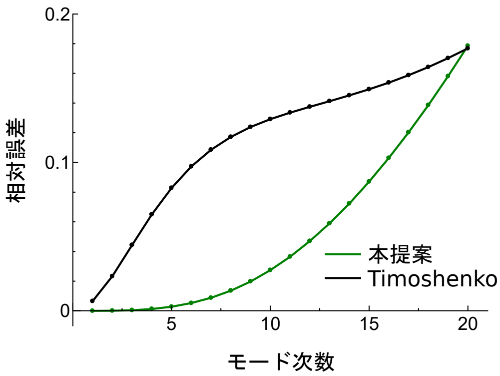


図–4 単純支持

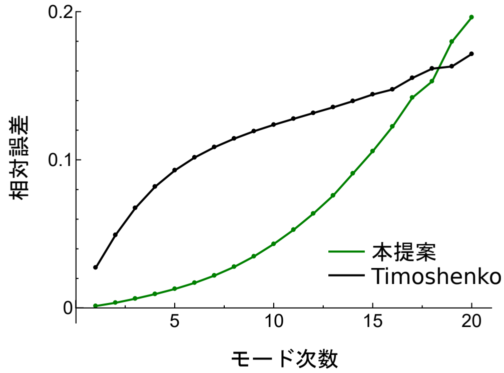
図–2 に対象とする梁の断面を示す．幅 b = 2 m，高さ h = 1 m，板厚はフランジ，ウェブともに 20 mm の箱断面とした．材料定数は Young 率 2.0×10^{11} N/m^2，Poisson 比 0，密度 1000 kg/m^3 とした．この断面に対し



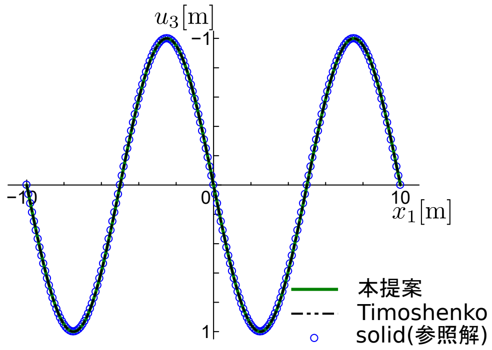
図–5 両端固定



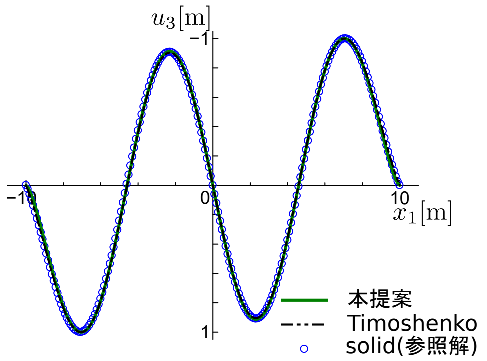
図–6 モードと固有振動数の相対誤差（単純支持）



図–7 モードと固有振動数の相対誤差（両端固定）



図–8 4 次モードの u_3（単純支持）



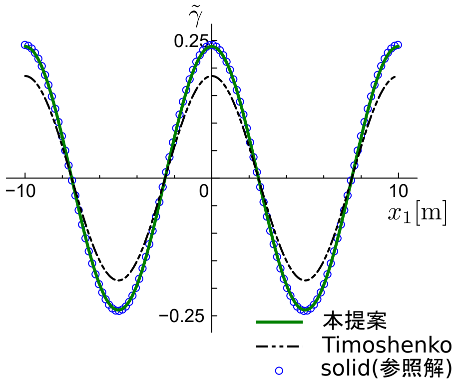
図–9 4 次モードの u_3（両端固定）

て，代表体積要素に単位の横せん断変形を与えたときの変形を**図–3**に示す．フランジ部でせん断遅れが発生していることが確認できる．単純支持では，**図–4**に示すように，支間長は $L = 20\,\mathrm{m}$ とし端部で x_3 方向に拘束した．また，両端固定では，**図–5**に示すように，支間長は $L = 20\,\mathrm{m}$ とし端部で全方向および断面変形 g を拘束した．連続体要素のみを用いたモデル（solid モデル）の結果を参照解として，本提案に基づく梁要素を用いたモデルと，Timoshenko 梁要素を用いたモデルの解析結果を比較した．

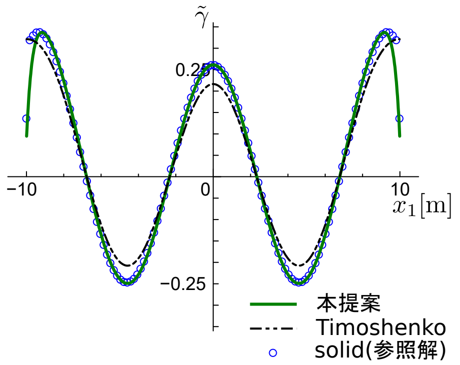
解析モデルの要素分割は，solid モデルには 8 節点 6 面体アイソパラメトリック要素を用い要素分割は板厚方向，x_1 方向ともに 20 mm とした．solid モデルでは，フランジのみが大きくたわむモードが発生するため，フランジのたわみを拘束するために，フランジを直交異方性材料とし，ヤング率 E_2 とせん断弾性係数 G_{23} の値を大きく設定した．梁要素はすべて x_1 方向に要素長を $l = 20\,\mathrm{mm}$ とした．本提案および Timoshenko モデルの総要素数は 1,000，総節点数は 1,001，solid モデルの総要素数は 296,000，総節点数は 592,592 である．なお，Timoshenko 梁のせん断補正係数 κ はせん断遅れを拘束したときの代表体積要素のせん断力を Q と横せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$ の関係から $\kappa = 0.335$ と設定した[6]．2 種類の拘束条件で固有振動解析したときのモード次数と固有振動数の参照解との相対誤差を**図–6, 7**に示す．**図–6, 7**より，モード次数が小さいとき，本提案は Timoshenko モデルと比較して固有振動数が参照解に近いが，次数が大きくなるにつれて Timoshenko モデルが本提案よりも参照解に近くなっていることが確認できる．これは，モードの次数が大きくなると曲げの波長が短くなることで，断面変形が拘束されせん断剛性が大きくなるため，Timoshenko 梁のせん断剛性が実際よりも小さく評価されていることが原因だと考えられる．

単純支持と両端固定の 2 次モード，4 次モードの x_3 方向変位 u_3 の x_1 方向分布を**図–8, 9**に示す．なお，固有ベクトルは，x_3 方向変位 u_3 の最大値が 1 となるように正規化した．単純支持（**図–8**）では本提案，Timoshenko モデルともに参照解に定性的に一致しているが，両端固定（**図–9**）では本提案が固定端付近でたわみ角 $\vartheta = -\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}x_1}$ が参照解と比較して小さくなっている．これは，参照解において，固定端で局所的な変形が発生し，本提案において，固定端での断面変形の拘束が参照解よりも大きく影響したためであると考えられる．

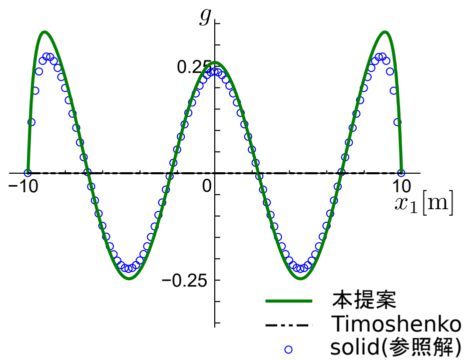
単純支持と両端固定の 2 次モード，4 次モードの平均横せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$ の x_1 方向分布を**図–10, 11**に示す．**図–10, 11**より，2 種類の拘束条件いずれにおいても，フ



図–10 4 次モードの $\tilde{\gamma}$（単純支持）



図–11 4 次モードの $\tilde{\gamma}$（両端固定）



図–12 4 次モードの g（両端固定）

ランジ部のせん断遅れ変形が大きいため，Timoshenko モデルは参照解と比較して $\tilde{\gamma}$ の絶対値が小さいことが分かる．本提案では，単純支持（**図–10**）では参照解と定性的に一致しているが，両端固定（**図–11**）では，Timoshenko モデルと比較すると精度はよいものの，固定端付近で参照解と異なる分布となっている．これは，本提案では参照解における固定端での局所的な変形が表現できないためであると考えられる．

両端固定の 4 次モードの断面変形の大きさ g の x_1 方向分布を**図–12** に示す．Timoshenko モデルでは断面変形を自由度の持たないため，ゼロとなっている．**図–12** より，本提案では参照解と定性的に一致しているが，最大値の相対誤差は，2.10×10^{-2} であった．断面変形の分布の違いにより，平均横せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$（**図–11**）の固定端付近での分布の違いが生じていると考えられる．また，支間中央部において，本提案が参照解よりも大きくなっていることが分かる．これは，本提案では断面変形が生じる際にせん断遅れ変形が生じるが，参照解では**図–3** とは異なる，せん断遅れ変形が抑えられた断面変形が生じており，本提案では，参照解と同等の平均横せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$ が生じるために，より断面変形大きくなっているためであると考えられる．

4. 結論

本研究では，断面変形を考慮した梁の動的問題の定式化および梁要素の開発を行った．また，従来の梁要素と比較することで，断面変形が梁の振動特性に及ぼす影響を考察した．

- モード次数が大きくなると，曲げの波長が短くなり断面の変形が拘束されることにより，低次モードと比較してせん断剛性が大きくなる．このため，断面平面保持を仮定しており，せん断剛性を一律に決めている従来の梁要素では，実際よりもせん断剛性が小さく評価される．
- せん断遅れの影響が大きい箱断面では，低次モードにおいては断面変形の影響が大きく，断面の幅 2 m に対し，波長 4 m 程度のとき，本提案と従来の梁要素の固有振動数の参照解との相対誤差の差が最も大きくなった．また，モード次数が大きくなると，せん断剛性が大きくなるにつれて，本提案の精度が低下した．
- 固定端付近では断面変形の拘束の影響で平均横せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$ は小さくなる．本提案では参照解に近い平均横せん断ひずみの分布が得られたが，従来の梁要素ではこの分布は表現できない．
- 本提案はモード次数が大きくなるにつれて固有振動数の参照解との相対誤差が大きくなるため，断面の幅よりも波長が小さくなるような高次モードへの適用については課題がある．

参考文献

1) 斉木　功，西井大樹，山本剛大：任意断面梁のせん断遅れを考慮できる梁要素，日本計算工学会論文集，Vol.2018, p.20180013, 2018.
2) 斉木　功, 鄭　勳, 山本剛大：断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2，Vol.75, pp.I_3-I_12, 2019.
3) Thomas, J. and Abbas, B. A.: Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam, *J. Sound Vibr.*, Vol.41, pp.291-299, 1975.
4) Han, S. M., Benaroya, H. and Wey, T.: Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories, *J. Sound Vibr.*, Vol.225, pp.935-988, 1999.
5) 斉木　功, 鄭　勳：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2，Vol.77, pp.I_1-I_11, 2021.
6) 斉木　功，新井晃朋，山本剛大，岩熊哲夫：非均質断面梁のせん断剛性評価に関する一考察， 土木学会論文集 A2，Vol.73, pp.I_23-I_31.

(2021 年 2 月 3 日 提出)