

せん断に伴う断面変形を考慮した梁理論の
一般化に関する検討

鄭勛

構造強度学研究室

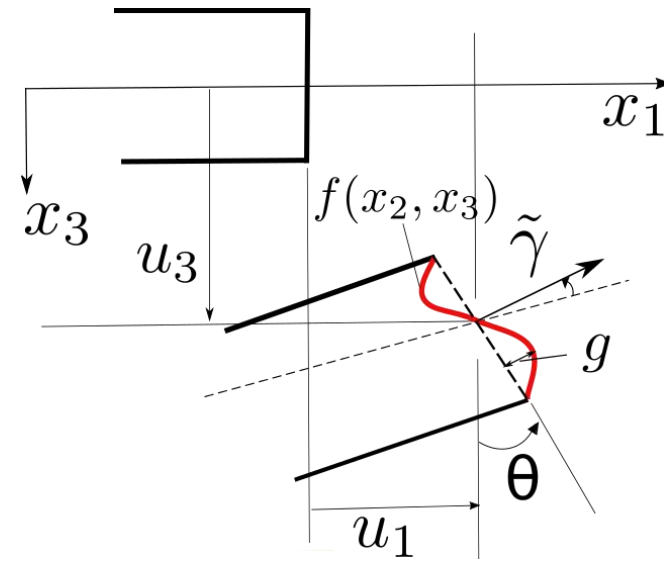
2019年2月7日

研究背景

理論基礎

Timoshenko 梁理論による梁のせん断変形を断面内で一定と仮定

→ 断面は平面ではなくなり変形する



せん断剛性の研究

せん断補正係数で断面変形を考慮

→ せん断力とせん断変形を比例と仮定

FEAによるせん断補正係数の研究

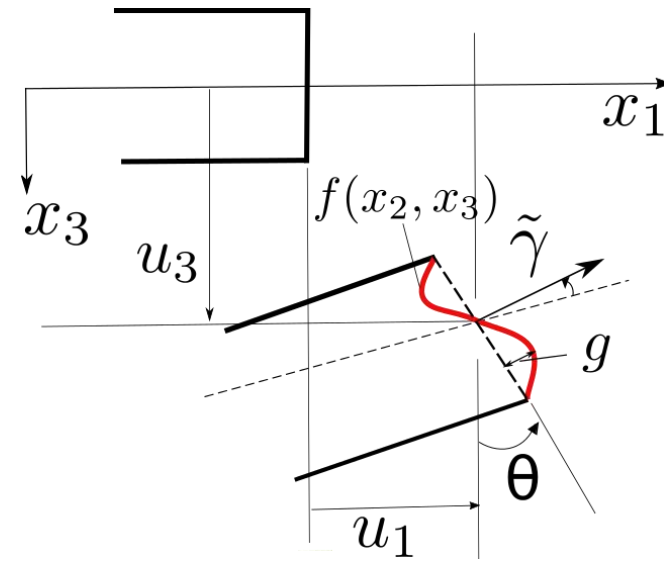
- | | |
|------|---------------------------------|
| 2001 | Gruttmann: エネルギーの等価性に基づくせん断補正係数 |
| 2010 | Dong: そり変位に基づくせん断補正係数 |
| 2018 | 齊木: 均質化理論に基づく非均質断面のせん断補正係数 |

研究背景

理論基礎

Timoshenko 梁理論による梁のせん断変形を断面内で一定と仮定

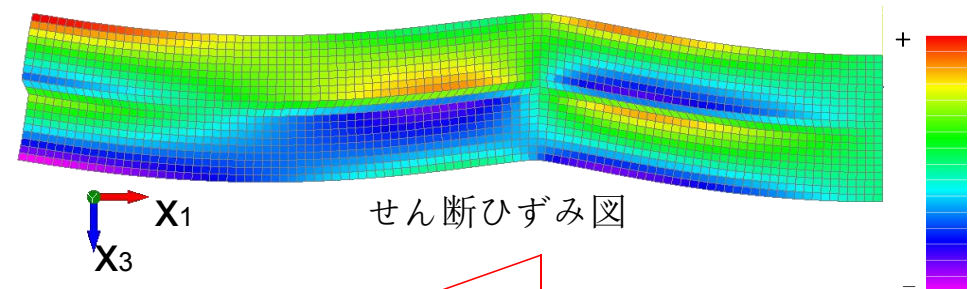
→ 断面は平面ではなくなり変形する



せん断剛性の研究

せん断補正係数で断面変形を考慮

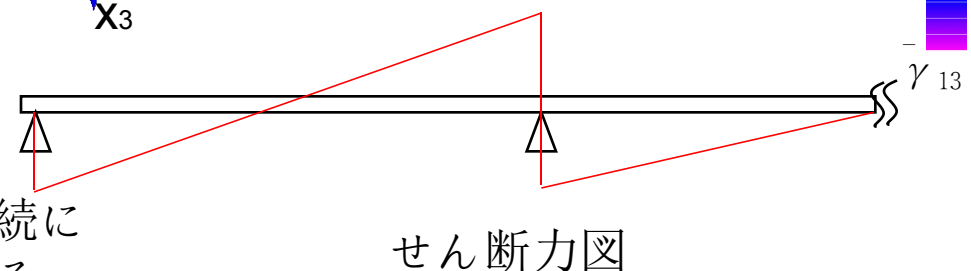
→せん断力とせん断変形を比例と仮定



問題点

連続梁の中間支持点で、せん断力が不連続に変化する場合でも断面変形が連続的になる

→ せん断変形とせん断力を比例しない

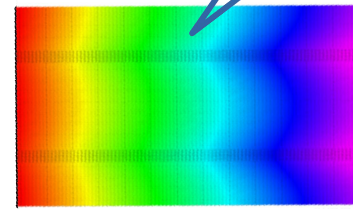


本研究ではせん断変形をせん断力と独立に考慮する

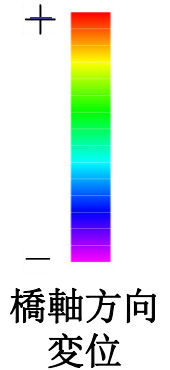
研究背景



ウェブから
離れると
変位が小さい
(遅れる)



軸方向



床版平面図

せん断遅れ

薄肉幅広構造で面内せん断変形により断面が変形する

既往の研究

- 1946 Reissner: 変位分布を放物線状と仮定した解析的手法
- 2002 Prokic: 反り関数を離散化した有限要素
- 2016 西井: 均質化梁理論を用いた半解析的手法

本研究

面外せん断とせん断遅れを組み合わせた梁理論と有限要素を提案

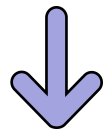
面外せん断とせん断遅れによる断面変形を考慮した梁理論

x_1 軸方向変位:

$$u_1 = \underbrace{\text{高さ} \times \text{回転}}_{\text{曲げ変形}} + \underbrace{f \times g}_{\text{断面変形}}$$

f : 面外せん断にともなう断面のゆがみモード

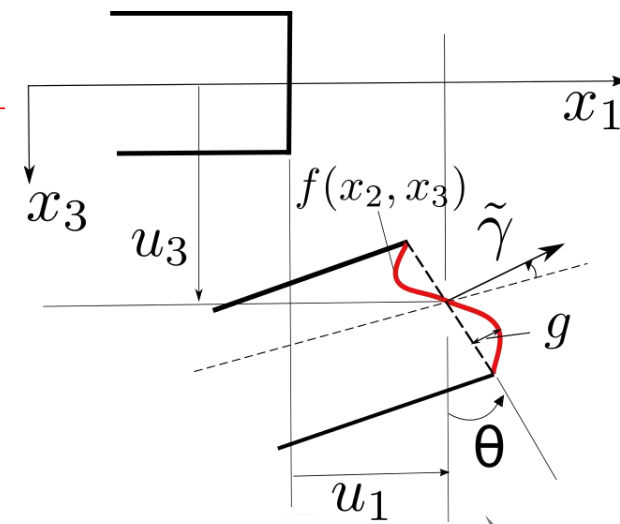
g : 断面変形の大きさ



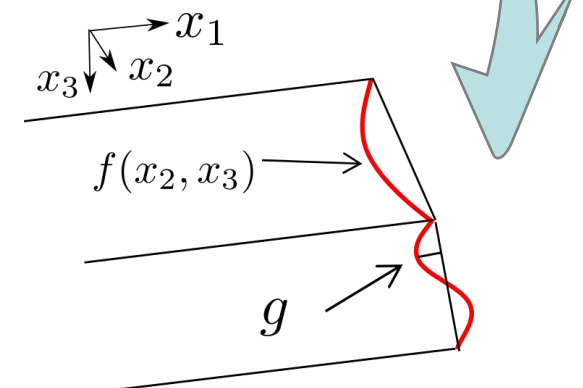
本提案:

$$u_1 = x_3 \left(\underbrace{\tilde{\gamma}(x_1)}_{\text{面外せん断ひずみ}} - \frac{du_3(x_1)}{dx_1} \right) + \underbrace{f(x_2, x_3)g(x_1)}_{\text{断面変形}}$$

$\tilde{\gamma}$: 面外せん断ひずみ



梁の断面回転



断面変形の3次元図

中間発表からの変更点

面外せん断による断面変形を考慮した梁理論

$$u_1 = x_3 \left(\tilde{\gamma}(x_1) - \frac{du_3(x_1)}{dx_1} \right) + f(x_3)g(x_1)$$

面外せん断とせん断遅れによる断面変形を考慮した梁理論

$$u_1 = x_3 \left(\tilde{\gamma}(x_1) - \frac{du_3(x_1)}{dx_1} \right) + f(x_2, x_3)g(x_1)$$

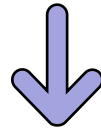
せん断遅れによる断面変形分布
関数 f の x_2 方向分布も考える

梁の変分問題

(ひずみエネルギー) - (外力ポテンシャル) = 全ポテンシャルエネルギー

$$\text{梁のひずみエネルギー } \Pi_e = \frac{1}{2} \int_V (E\varepsilon^2 + G\gamma_{12}^2 + G\gamma_{13}^2) dV$$

$$\text{分布荷重 } q \text{ によるポテンシャル } \Pi_{ext} = \int_L qu_3 dx_1$$



停留条件 $\delta\Pi = 0$ から微分方程式(3式)導出

モーメント
つり合い式
(u_3 変分)

$$-K_b \frac{d\theta}{dx_1} - R_1 \frac{dg}{dx_1} + M = 0$$

せん断力
つり合い式
($\tilde{\gamma}$ 変分)

$$K_s \tilde{\gamma} - K_b \frac{d^2\theta}{dx_1^2} - R_1 \frac{d^2g}{dx_1^2} + R_4 g = 0$$

軸方向応力
つり合い式
(g 変分)

$$-R_1 \frac{d^2\theta}{dx_1^2} - R_2 \frac{d^2g}{dx_1^2} + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g = 0$$

E: Young率
G: せん断弾性係数
 ε : 軸ひずみ

γ_{13} : $x_1 - x_3$ 断面せん断ひずみ
 γ_{12} : $x_1 - x_2$ 断面せん断ひずみ

断面パラメータ

$$K_s := \int_A G dS \quad K_b := \int_A E x_3^2 dS$$

$$R_1 := \int_S E x_3 f dS \quad R_2 := \int_S E f^2 dS$$

$$R_3 := \int_S G \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dS$$

$$R_4 := \int_S G \left(\frac{df_1}{dx_3} \right) dS \quad \theta := \tilde{\gamma} - \frac{du_3}{dx_1}$$

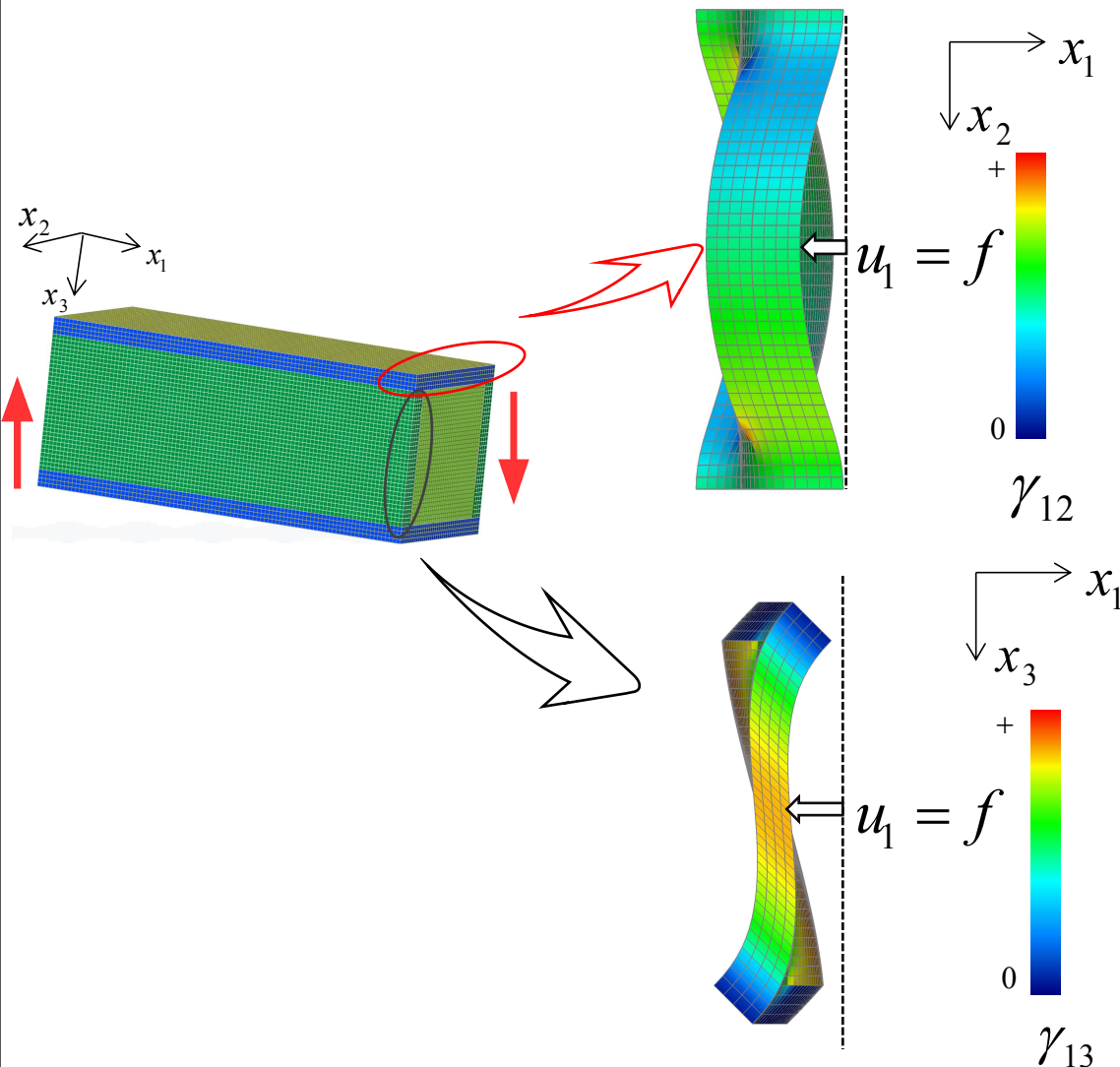
梁の代表体積要素
(周期境界)のFEM解析



均質化梁理論の適用

均質化梁理論による曲げとせん断を独立に与える

→ せん断変形を数値的に解析できる



代表体積要素に周期境界条件でせん断変形を数値的に解析



代表体積要素に x_1 軸方向変位は面外せん断とせん断遅れに伴う断面のゆがみモード f を表す。

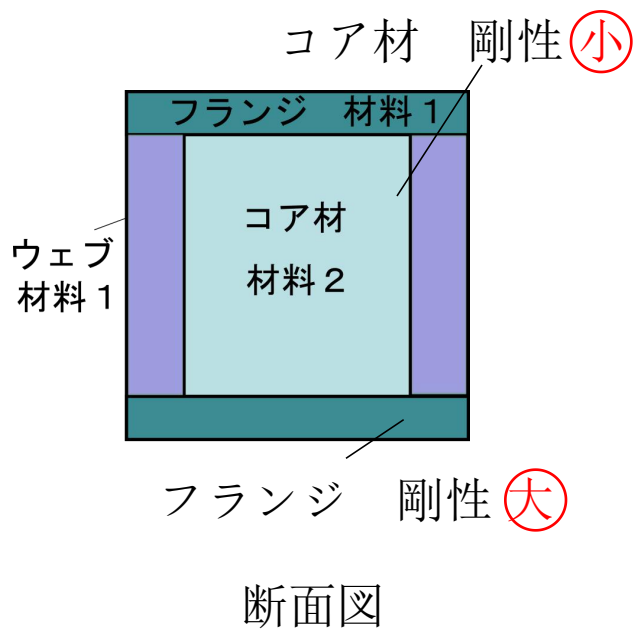
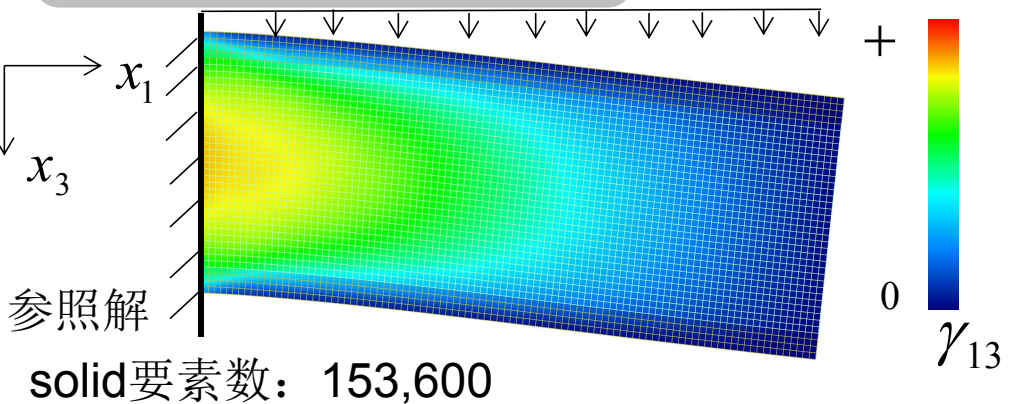


変位の数値解から断面パラメータを計算

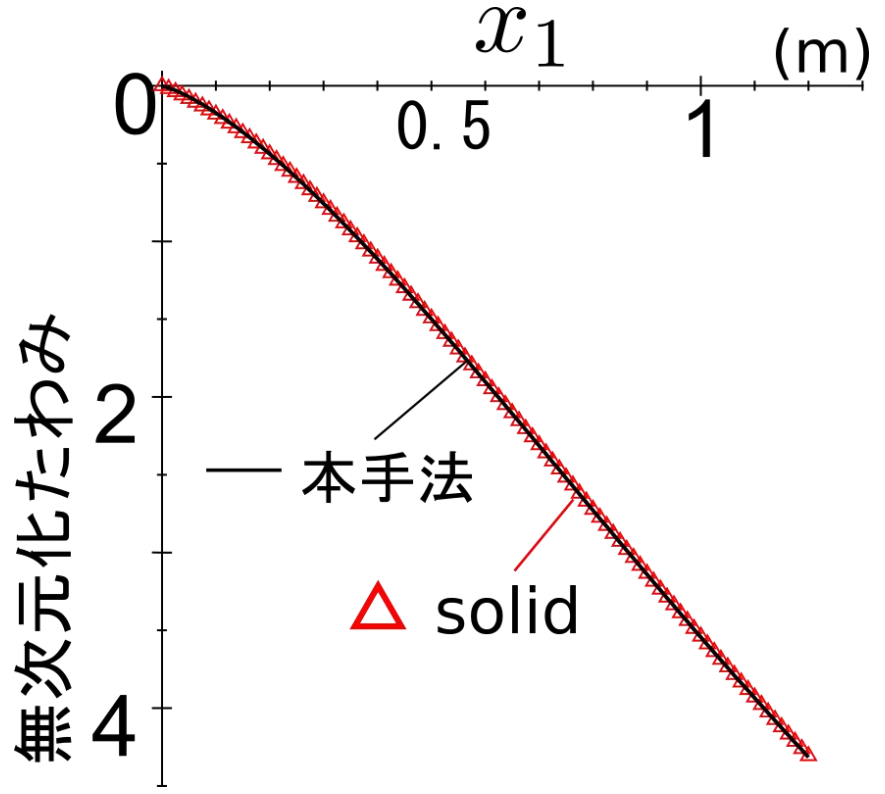
$$R_1 := \int_S E x_3 f dS \quad R_2 := \int_S E f^2 dS$$

$$R_3 := \int_S G \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dS \quad R_4 := \int_S G \left(\frac{df_1}{dx_3} \right) dS$$

精度の検証

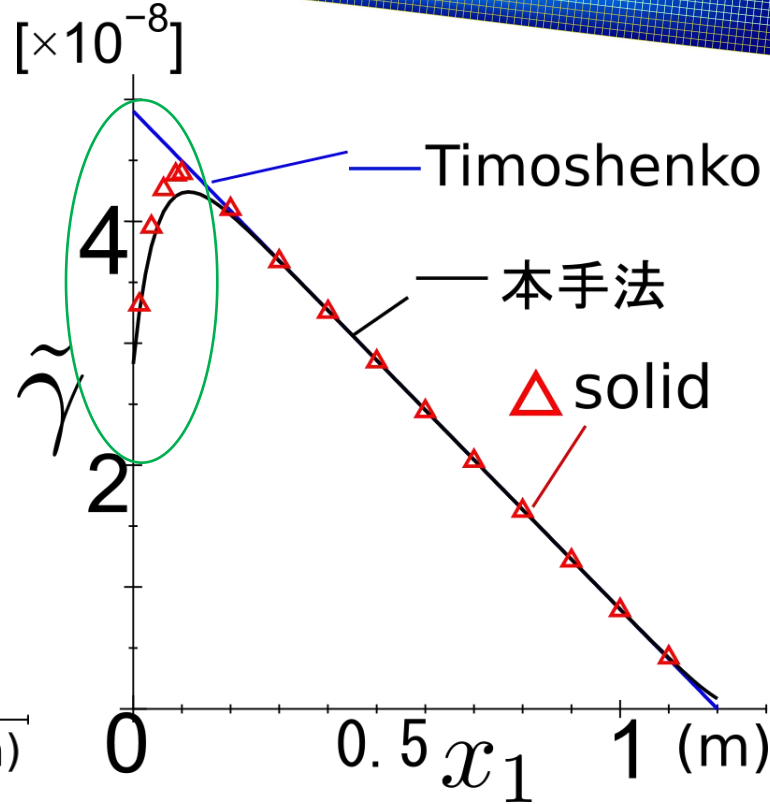
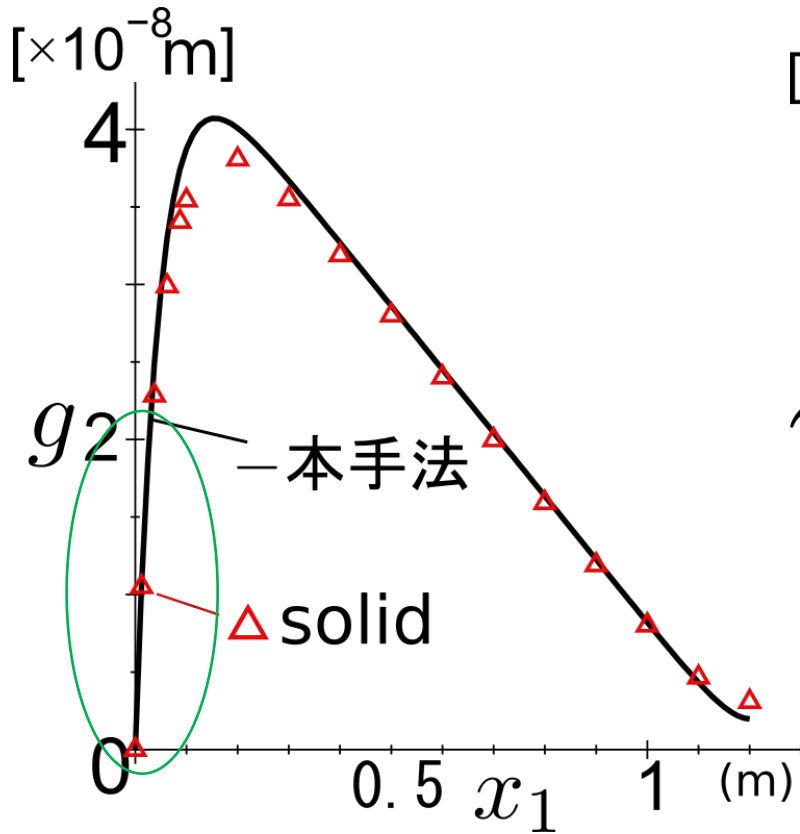
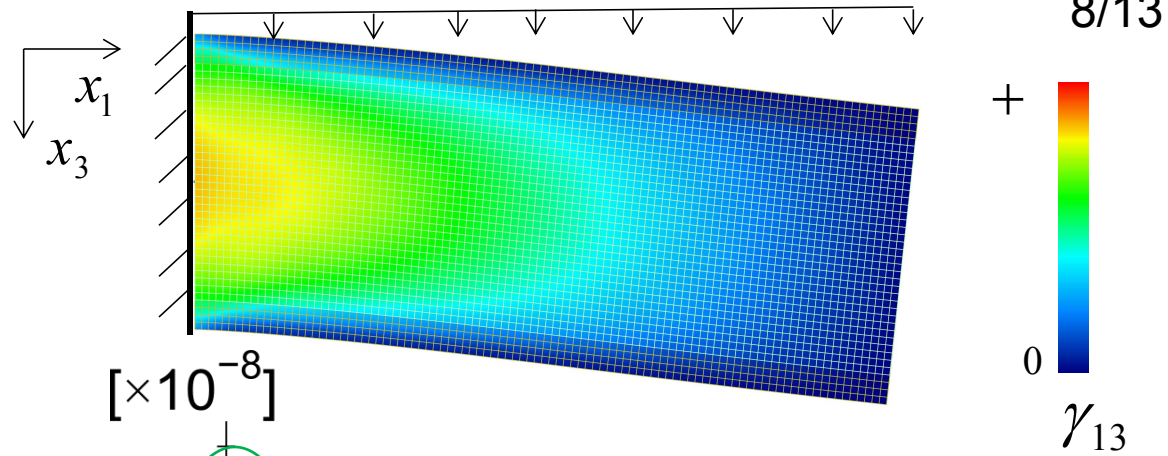


解析対象:
等分布荷重を与える片持ち梁



Tiomshenko梁理論より,
本手法のたわみは solid の
たわみに近い

精度の検証



せん断変形と断面変形を独立させることで、固定端で断面変形がゼロになることを再現できた。

固定端で断面変形がゼロになるので、見かけ上せん断剛性が大きくなり、面外せん断ひずみが小さくなることを再現できた。

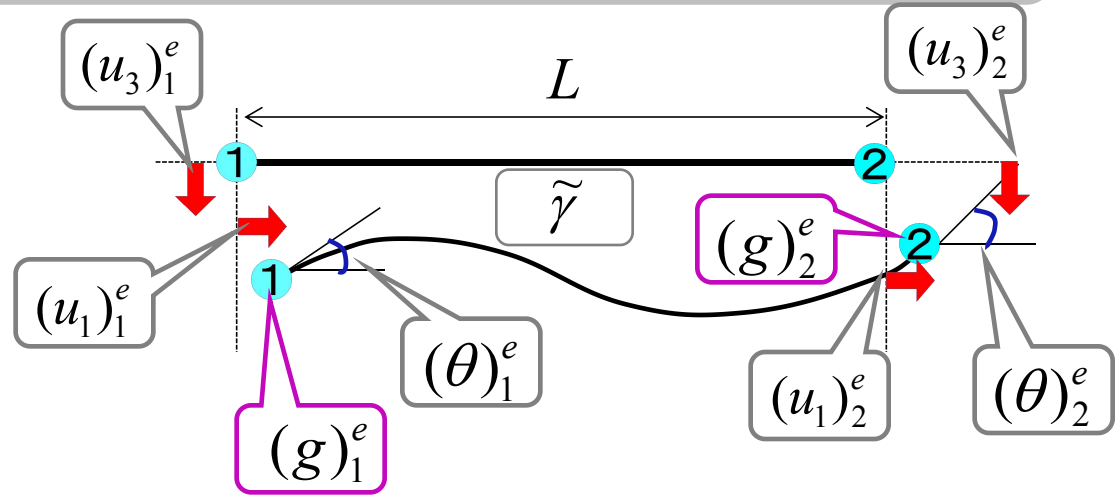
面外せん断とせん断遅れによる断面変形を考慮した梁要素

支配方程式

$$-K_b \frac{d\theta}{dx_1} - R_1 \frac{dg}{dx_1} + M = 0$$

$$K_s \tilde{\gamma} - K_b \frac{d^2\theta}{dx_1^2} - R_1 \frac{d^2g}{dx_1^2} + R_4 g = 0$$

$$-R_1 \frac{d^2\theta}{dx_1^2} - R_2 \frac{d^2g}{dx_1^2} + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g = 0$$



3変数

たわみ u_3 (3次)

面外せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$ (ゼロ次)

断面変形大きさ g (1次)

内挿関数で
変位を近似

Timoshenko梁要素

$(u_1)_i^e, (u_3)_i^e, (\theta)_i^e$

+

断面変形大きさ

$(g)_i^e$

断面パラメータ

R_1, R_2, R_3, R_4

断面変形分布

f で決まる

代表体積要素

(周期境界)の

FEM解析

本手法に基づく独自の梁要素を定式化した

提案要素の妥当性確認

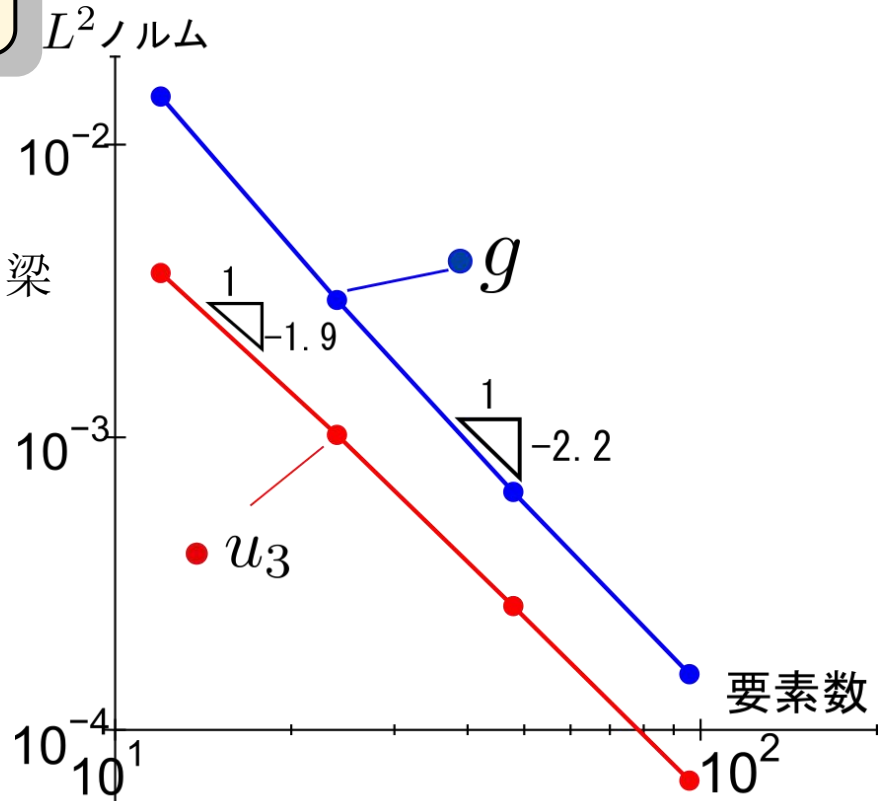
解析対象

- ・等分布载荷を受ける箱型断面の片持ち梁
- ・半解析的手法と離散化手法を比較
- ・分割要素: 12要素, 24要素, 48要素, 96要素

相対誤差の L^2 ノルム:

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_L (f - f_{ref})^2 dx_1}{\int_L f_{ref}^2 dx_1}}$$

f : 離散化手法の解
 f_{ref} : 半解析的手法の解



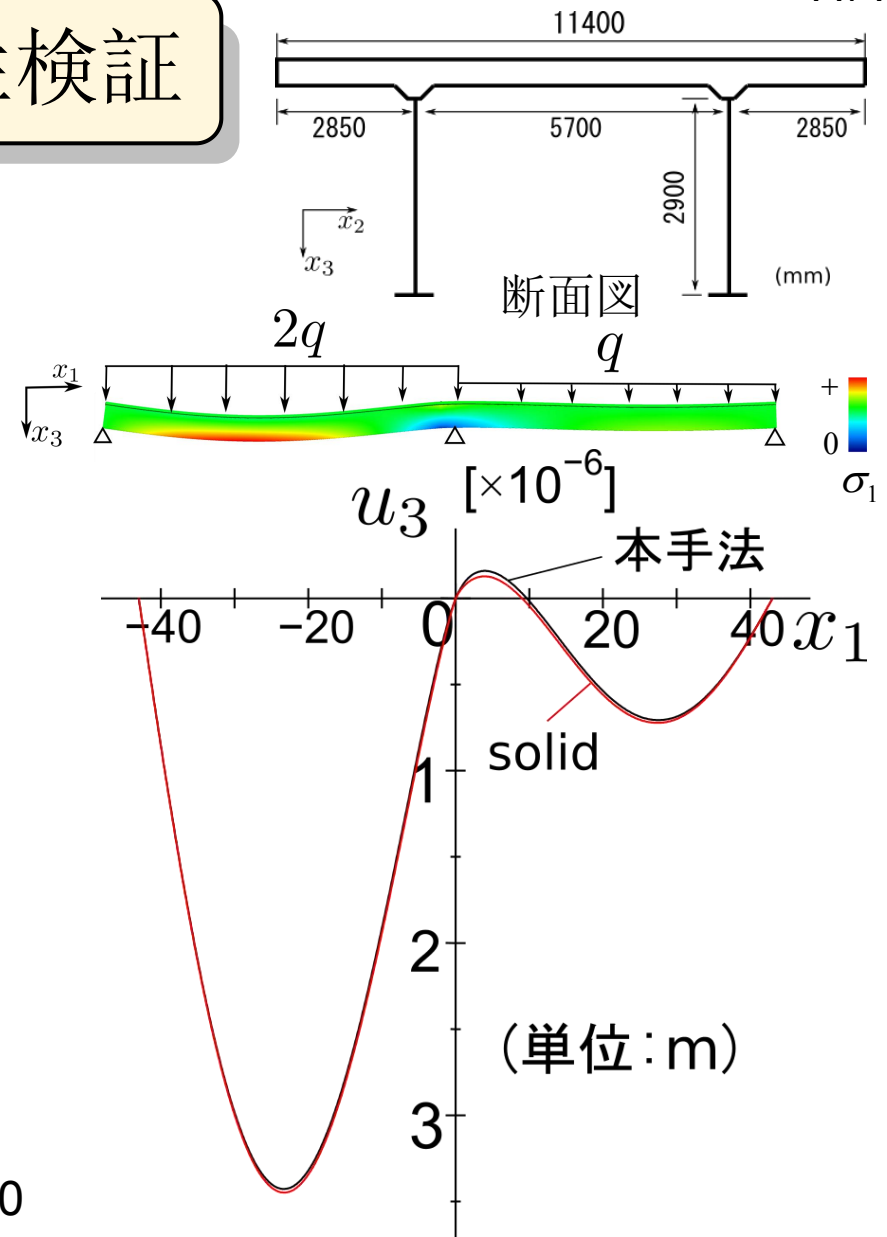
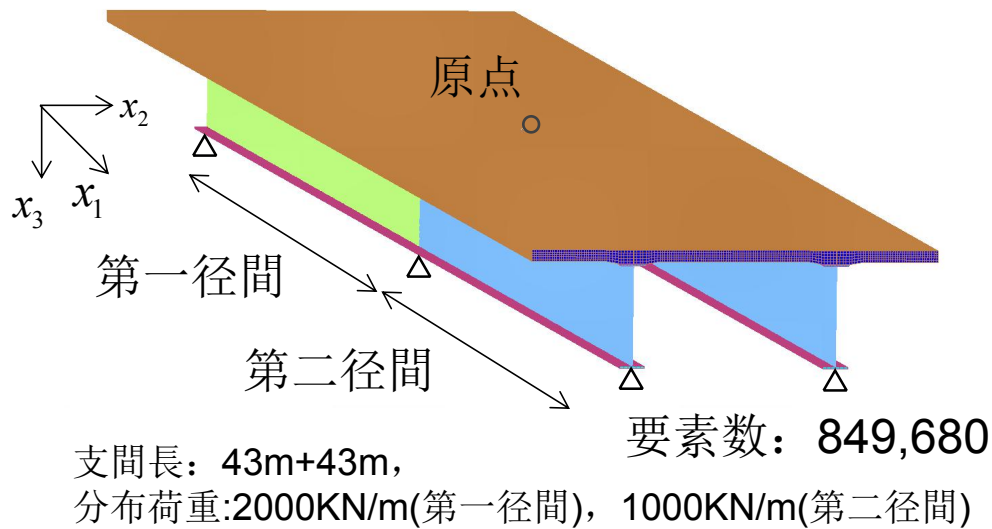
要素分割を細かくすることで誤差は g が -2.2 次のオーダーで減少し, u_3 が -1.9 次のオーダーで減少し, 半解析的手法による解に収束している。

離散化手法の妥当性を確認

連続合成桁による適用性検証

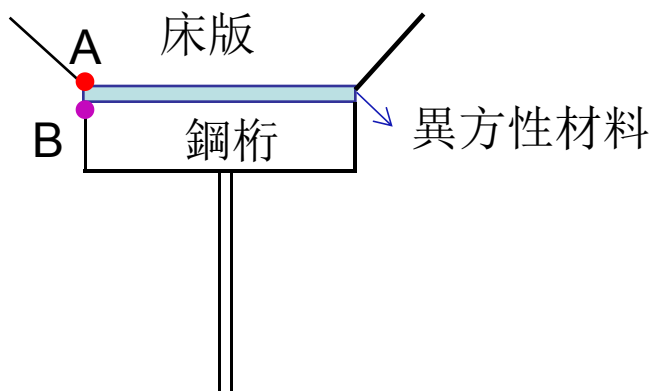
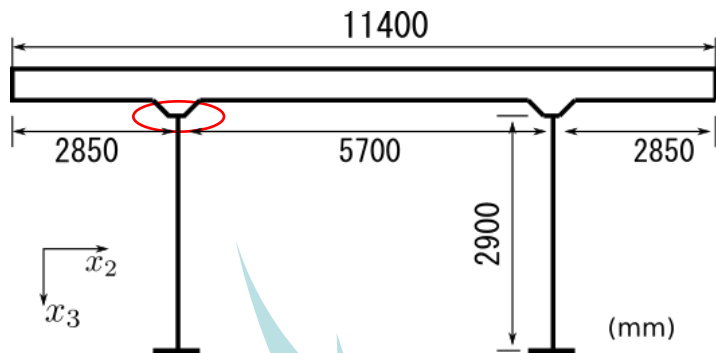
解析対象

- ・鋼コンクリート合成2主連続桁，等分布载荷
- ・床版と桁の間にせん断剛性(G_{13})が小さい異方性材料を設定
- ・参照解：FEM解析(solid)

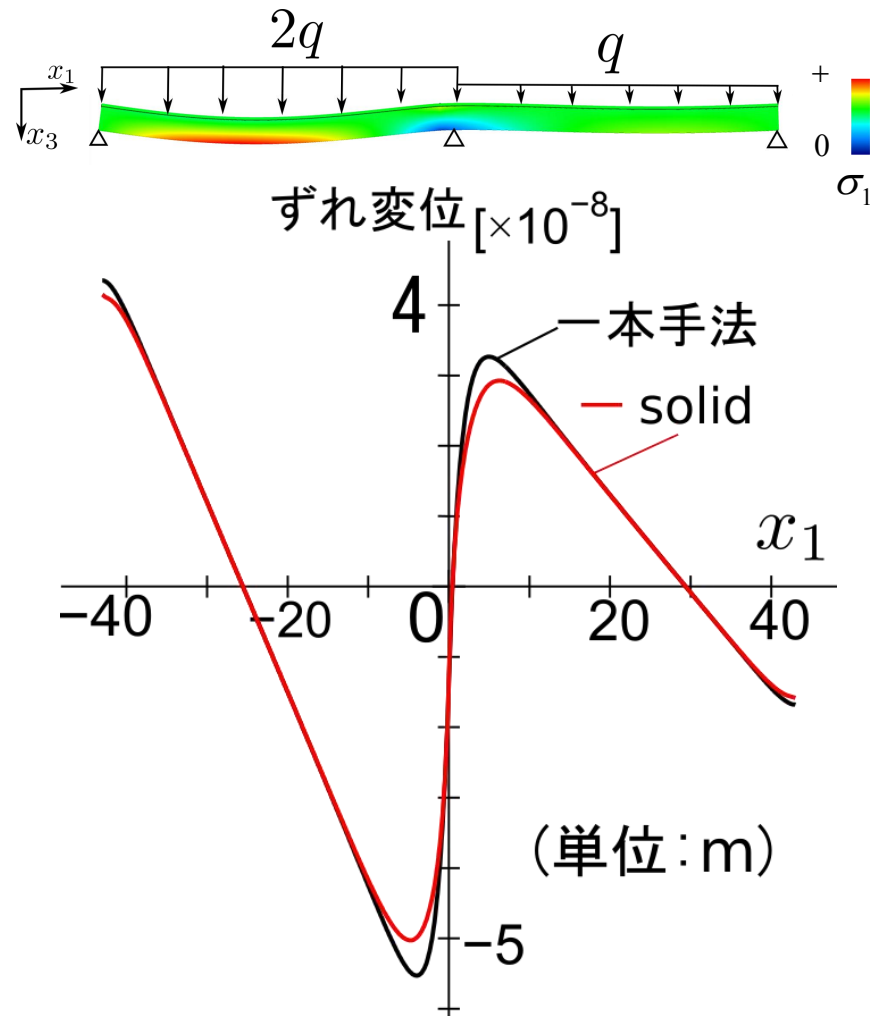


離散化手法のたわみ u_3 と solid と一致する。

連続合成桁による適用性検証



$$\text{ずれ変位} = u_1^B - u_1^A$$



中間支点付近で連続的にマイナスからプラスへ変化することを再現できている.

まとめ

- 面外せん断とせん断遅れに伴う断面変形を考慮した梁理論を構築した。
⇒ 断面変形に高さ方向分布も再現可能となった。
- 本手法は梁の支点付近の断面変形の拘束を正確に再現できた。
⇒ せん断力が軸方向に変化する場合でも断面変形の連続性が満たされる
- 面外せん断とせん断遅れを考慮した梁要素を開発した。
⇒ 半解析解への収束を確認した。
連続梁におけるずれ変位計算を行い、**solid**要素に近い結果が得られた。

$$\mathbf{k}_0 = \begin{bmatrix}
 \frac{K_B}{\ell} & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_B}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12K_b}{\ell^3} & -\frac{6K_b}{\ell^2} & 0 & 0 & -\frac{12K_b}{\ell^3} & -\frac{6K_b}{\ell^2} & 0 & \frac{12K_b}{\ell^2} \\
 & & \frac{4K_b}{\ell} & \frac{R_1}{\ell} & 0 & \frac{6K_b}{\ell^2} & \frac{2K_b}{\ell} & -\frac{R_1}{\ell} & -\frac{6K_b}{\ell} \\
 & & & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{3} & 0 & 0 & -\frac{R_1}{\ell} & -\frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{6} & \frac{R_4\ell}{2} \\
 & & & & \frac{K_B}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \frac{12K_b}{\ell^3} & \frac{6K_b}{\ell^2} & 0 & -\frac{12K_b}{\ell^2} \\
 & & & & & & \frac{4K_b}{\ell} & \frac{R_1}{\ell} & -\frac{6K_b}{\ell} \\
 & & & & & & & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{3} & \frac{R_4\ell}{2} \\
 \text{Symm.} & & & & & & & & K_s\ell + \frac{12K_b}{\ell}
 \end{bmatrix}$$