均質化梁理論によりせん断遅れを考慮した一般化梁の定式化とその有限要素の開発

西井 大樹
構造強度学研究室

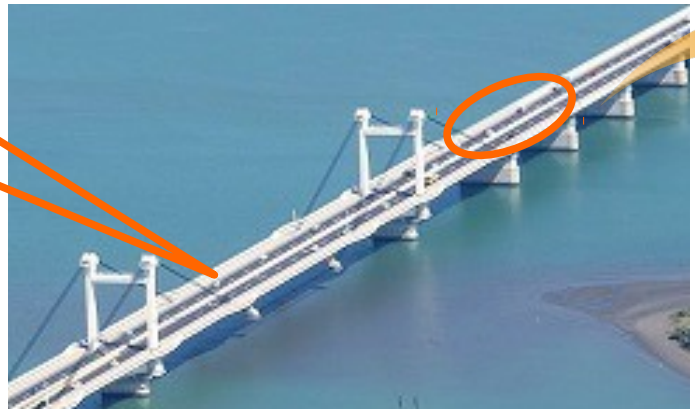
2017年 2月10日

はじめに

せん断遅れ

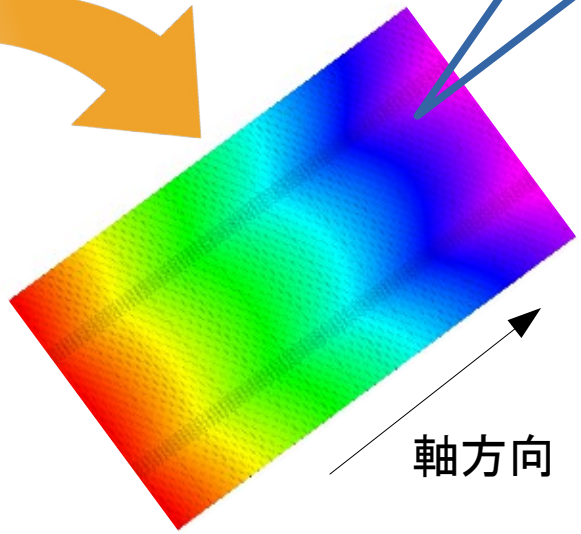
- 床版やフランジが**平板**として挙動
  →**面内せん断ひずみ**の影響大
- 断面の**平面保持**（初等梁理論）が不成立
  →軸方向**変位**が水平方向に**一定ではない**

床版が幅広
↓
せん断変形



阿波しらさぎ大橋
http://www.pref.tokushima.jp/

ウェブから離れると変位が小さい（遅れる）



橋軸方向変位

床版平面図

せん断遅れ

研究背景

過去の研究

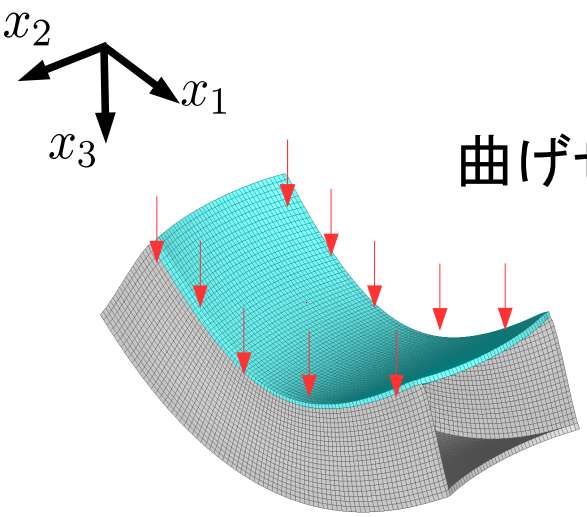
- Reissnerによる**解析的手法**
  変位分布を**放物線状**と仮定
  →**箱桁**では高精度に計算

均質化梁理論

- 曲げとせん断を**独立**に与える
  →せん断変形を**数値的**に解析

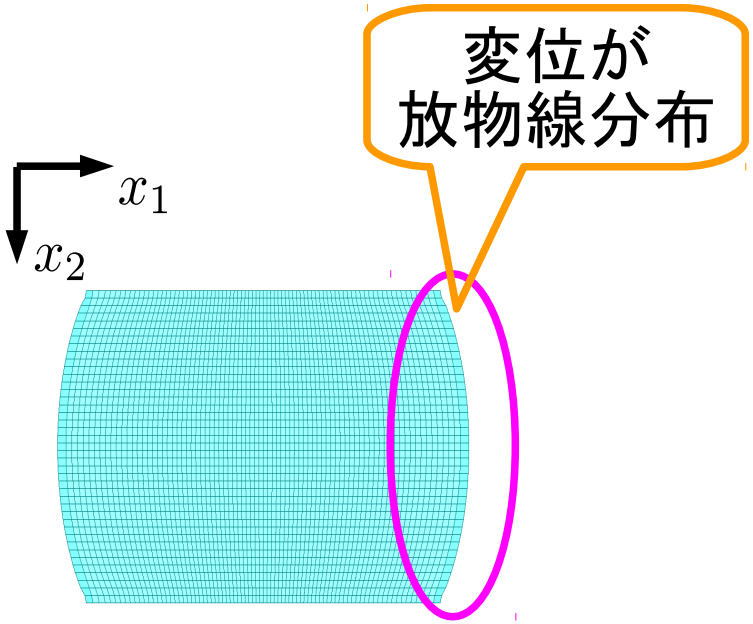
本研究

- **数値解**を**解析的手法**に組み込む
  →複雑な形状にも適用



曲げせん断

全体図



フランジ平面図

他の手法との比較

Reissner

○ **解析的**に計算

× **複雑**な形状では解析が困難

有限要素解析

○ **任意形状**で解析が可能

× **試行錯誤**が困難

本研究

複雑な形状でも**適用可能**

条件変更が容易

簡便・汎用的な解析

せん断遅れによる変位

フランジ軸方向変位

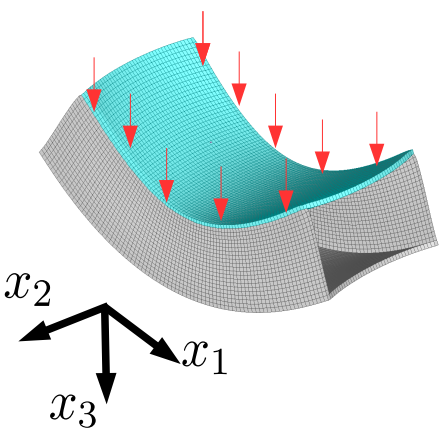
$$u_1 = \underbrace{\text{高さ} \times \text{曲率}}_{\text{曲げ変形}} + \underbrace{f(x_2, x_3) \times g(x_1)}_{\text{せん断遅れ}}$$

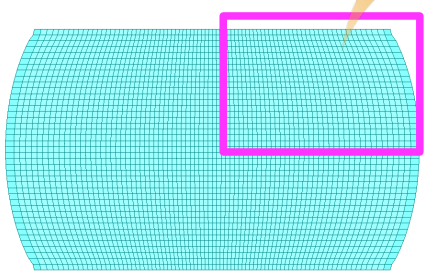
$f(x_2, x_3)$ ：変位分布

Reissner→二次関数と仮定
本研究→数値解析

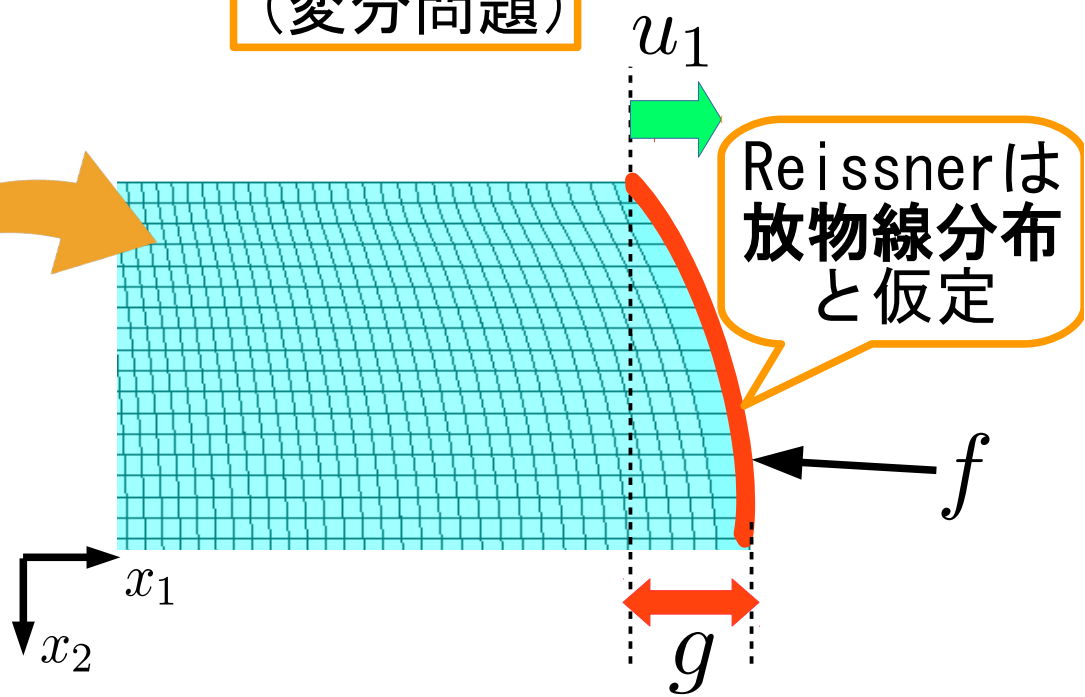
$g(x_1)$: 変位の大きさ

未知関数
（変分問題）





フランジ平面図



梁の変分問題

フランジ橋軸方向変位

$$u_1 = \text{高さ} \times \text{曲率} + f(x_2, x_3)\, g(x_1)$$

Euler方程式

仮想仕事の原理から3式導出

モーメントつり合い式（u_3 変分）

$$-(EI)\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}x_1} - \frac{\mathrm{d}^2 u_3}{\mathrm{d}{x_1}^4}\right) - R_1 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x_1} + M = 0$$

せん断力つり合い式（$\tilde{\gamma}$ 変分）

$$G\kappa A\tilde{\gamma} - (EI)\left(\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}{x_1}^2} - \frac{\mathrm{d}^3 u_3}{\mathrm{d}{x_1}^3}\right) - R_1 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}{x_1}^2} = 0$$

フランジ軸方向応力つり合い式（g 変分）

$$-R_1\left(\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}{x_1}^2} - \frac{\mathrm{d}^3 u_3}{\mathrm{d}{x_1}^3}\right) - R_2 \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}{x_1}^2} + R_3 g = 0$$

3変数

たわみu_3
面外せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$
せん断遅れの大きさ g

せん断遅れパラメータ

$$R_1 := \int_{S_\mathrm{F}} E x_3 f \,\mathrm{d}S$$

$$R_2 := \int_{S_\mathrm{F}} E f^2 \,\mathrm{d}S$$

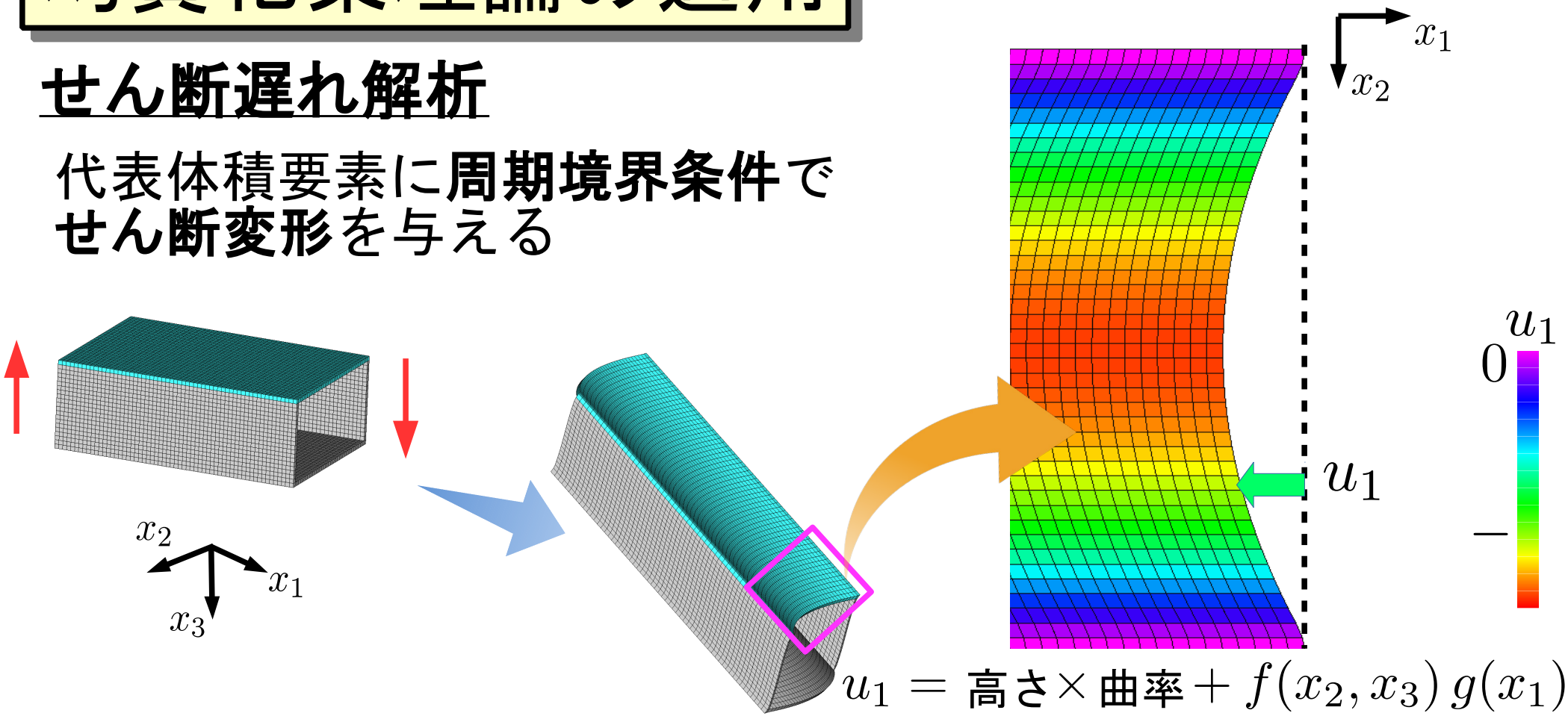
$$R_3 := \int_{S_\mathrm{F}} G \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_2}\right)^2 \mathrm{d}S$$

梁の代表体積要素(周期境界)のFE解析

均質化梁理論の適用

せん断遅れ解析

代表体積要素に**周期境界条件**で
せん断変形を与える



$$u_1 = \text{高さ} \times \text{曲率} + f(x_2, x_3)\, g(x_1)$$

変位の**数値解**からせん断遅れパラメーターを計算

$$R_1 := \int_{S_\mathrm{F}} E x_3 f \,\mathrm{d}S$$

$$R_2 := \int_{S_\mathrm{F}} E f^2 \,\mathrm{d}S$$

$$R_3 := \int_{S_\mathrm{F}} G \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_2}\right)^2 \mathrm{d}S$$

せん断遅れを考慮した解析

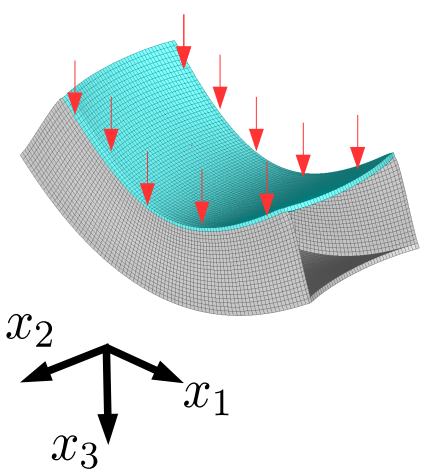
卒業研究からの変更点

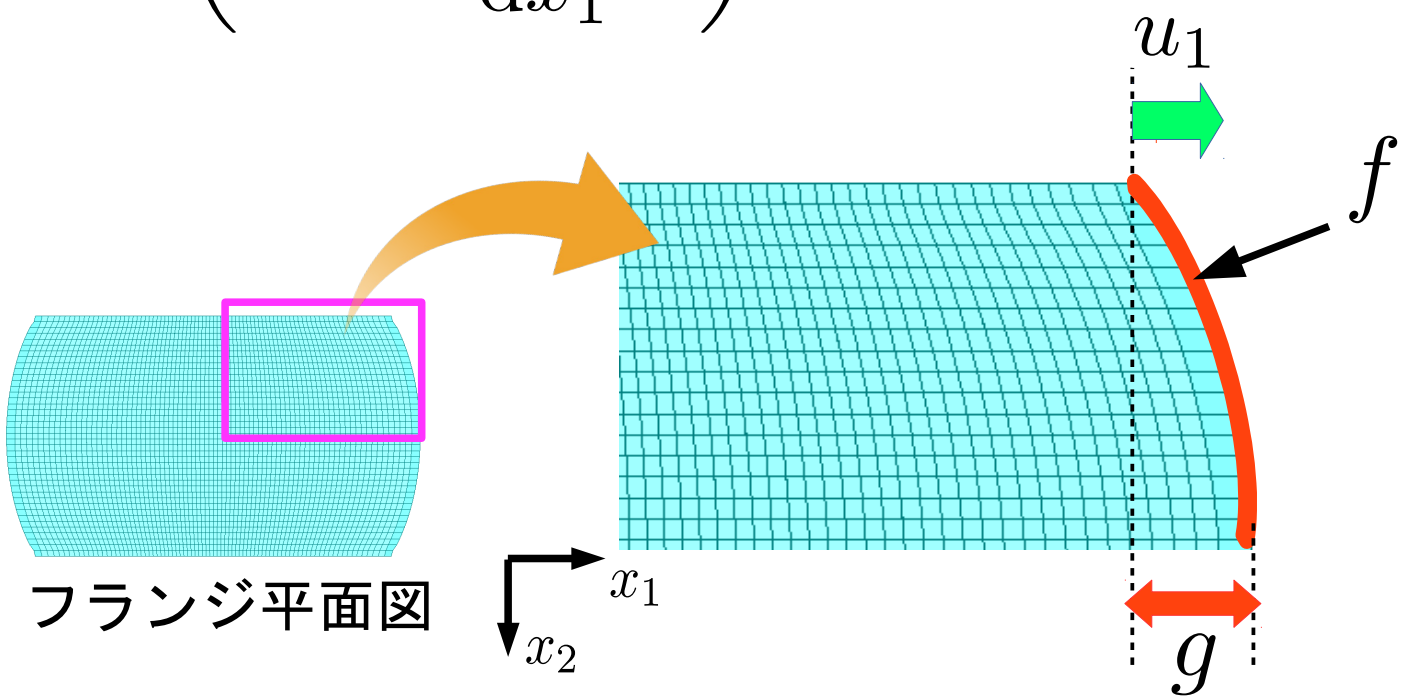
卒業研究 $$u_1 = x_3\left(-\frac{\mathrm{d}u_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1} + f(x_2)\,g(x_1)\right)$$

梁の面外せん断
（Timoshenko梁）

x_3方向分布を考慮
↓
複雑な断面にも対応

本研究 $$u_1 = x_3\left(\tilde{\gamma} - \frac{\mathrm{d}u_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\right) + f(x_2, x_3)\,g(x_1)$$



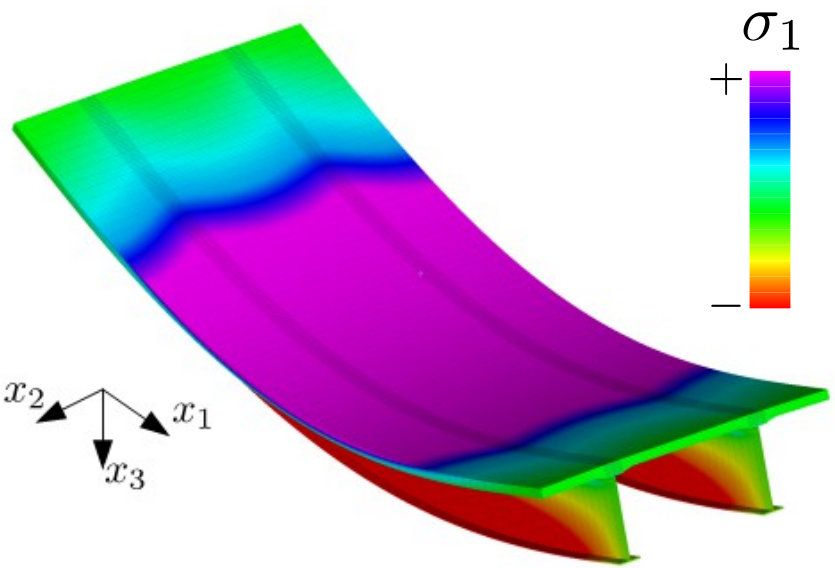


フランジ平面図

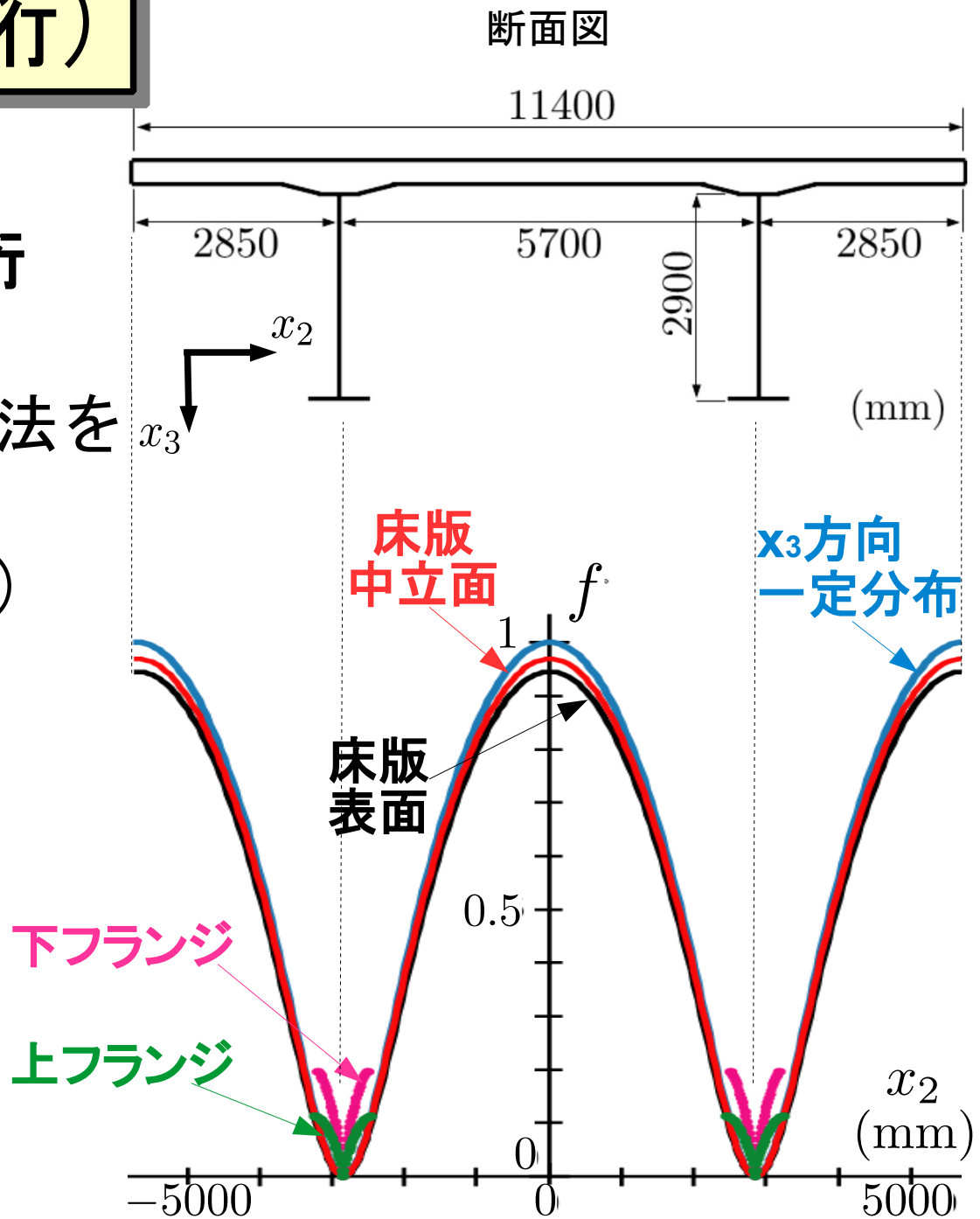
精度の検証（合成桁）

解析対象

- 鋼コンクリート**合成2主桁**
  単純支持，等分布載荷
- **示方書**ではReissnerの手法を準用した**有効幅**を使用
- 参照解：**FE解析**（ソリッド）



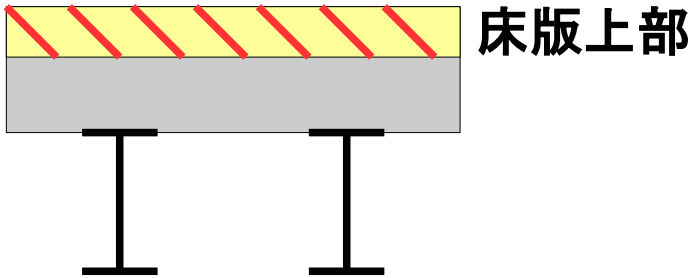
支間長：30 m　分布荷重：1000 kN/m

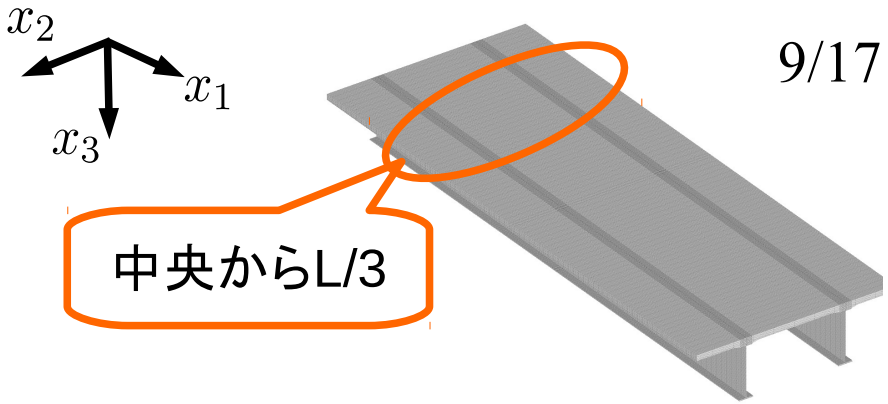


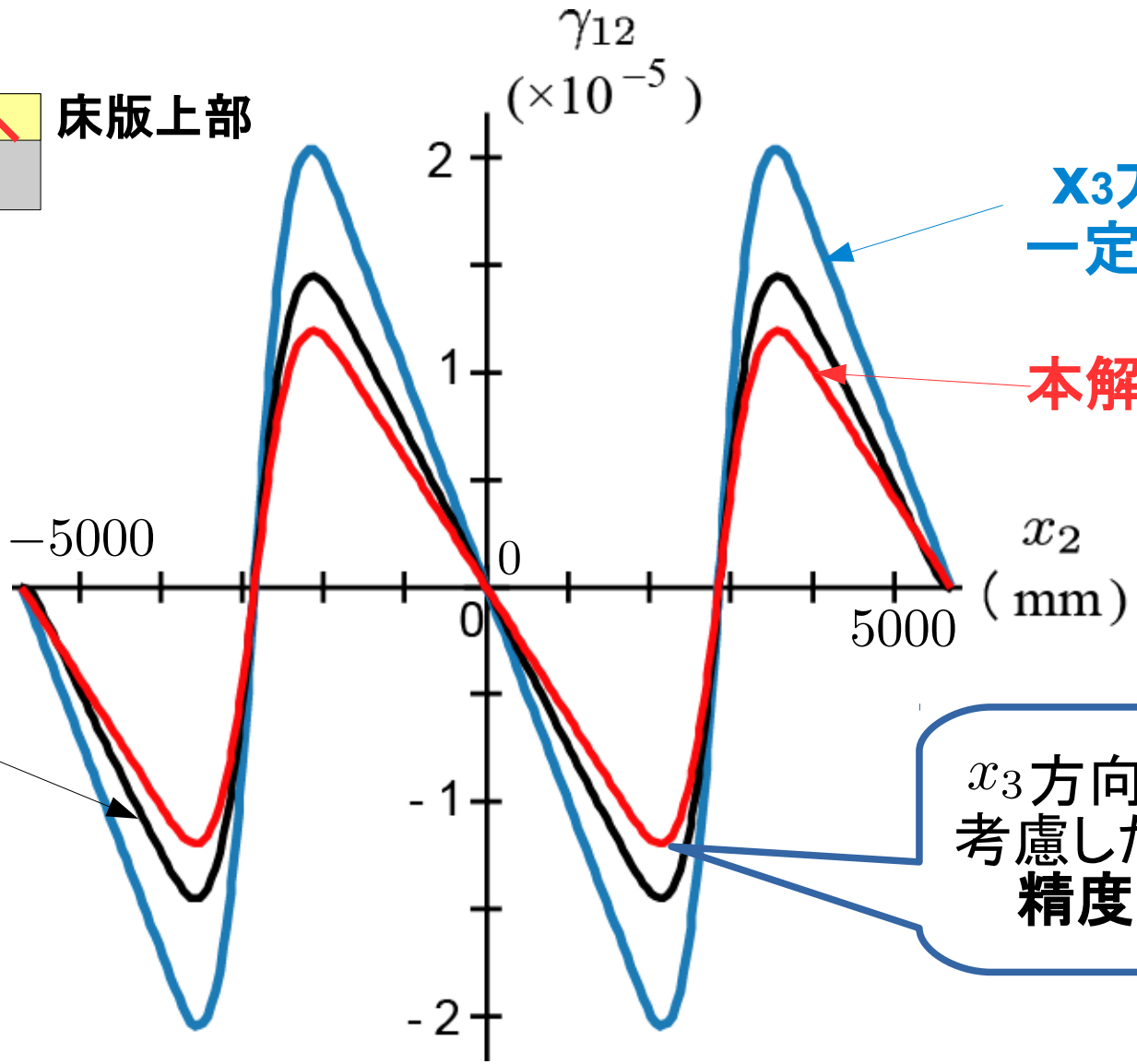
せん断遅れ分布関数

精度の検証（合成桁）

床版上部 面内せん断ひずみ



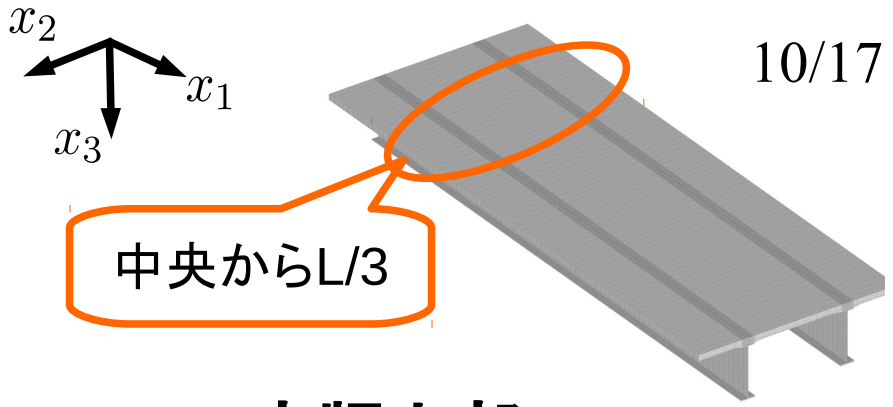


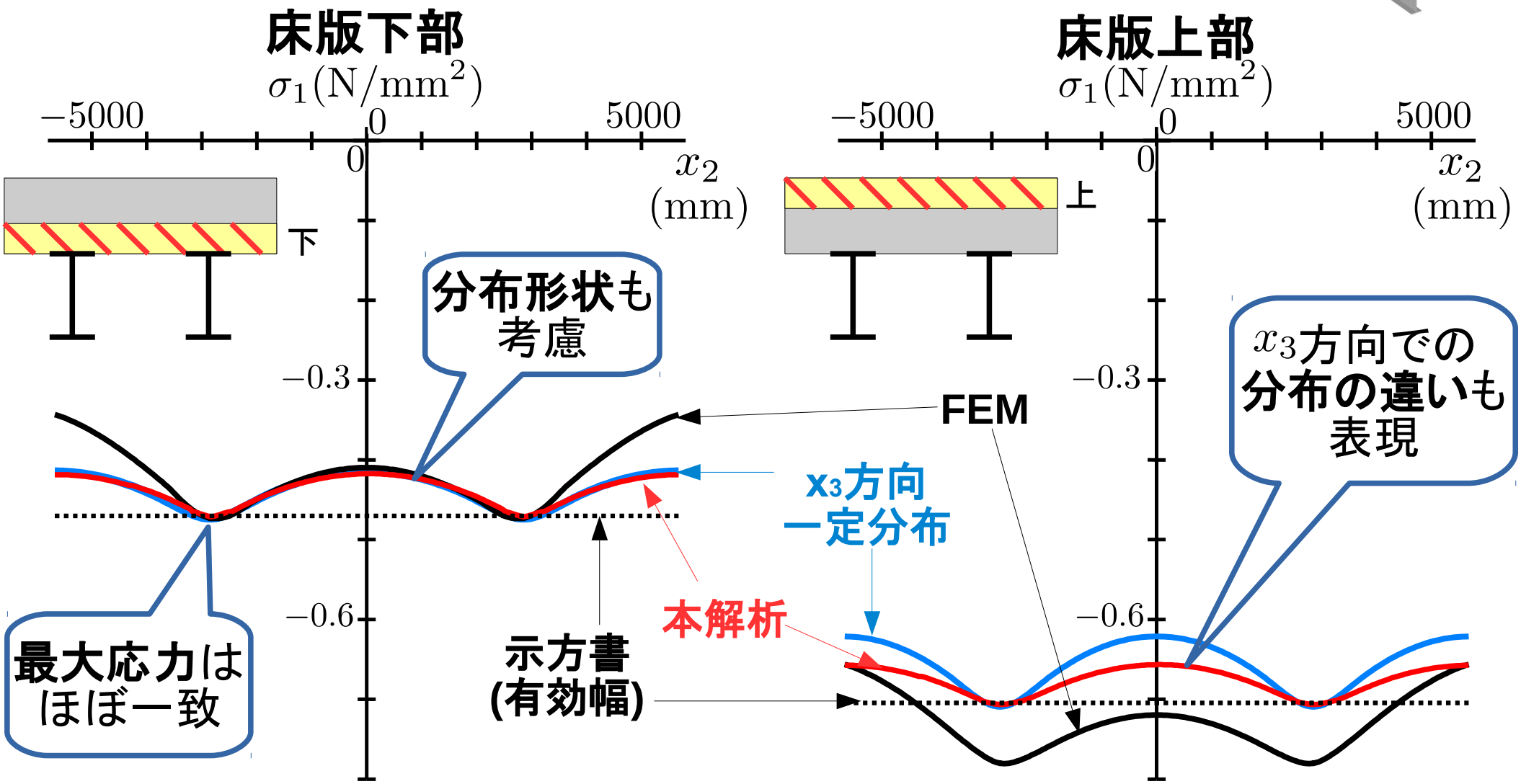


x_3方向分布を
考慮したことで
精度向上

精度の検証（合成桁）

床版曲げ応力





せん断遅れを考慮した梁要素

構造形式

- 単純支持梁：解析的に**解ける**
- ラーメン構造　：解析的には**解けない**

せん断遅れ解析を
組み込んだ
梁要素の開発

↓

任意の形状・条件で
せん断遅れ解析

首都高鋼製橋脚
http://www.towa-ce.co.jp/

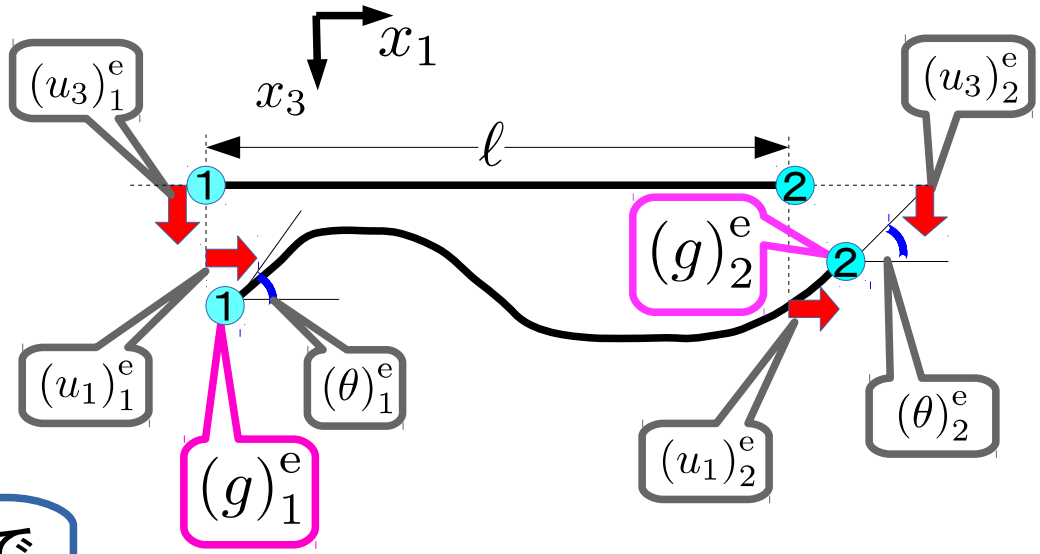
せん断遅れを考慮した梁要素

支配方程式

$$-(EI)\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}x_1}-\frac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}{x_1}^4}\right)-R_1\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x_1}+M=0$$

$$G\kappa A\tilde{\gamma}-(EI)\left(\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}{x_1}^2}-\frac{\mathrm{d}^3u_3}{\mathrm{d}{x_1}^3}\right)-R_1\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}{x_1}^2}=0$$

$$-R_1\left(\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}{x_1}^2}-\frac{\mathrm{d}^3u_3}{\mathrm{d}{x_1}^3}\right)-R_2\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}{x_1}^2}+R_3g=0$$



3変数

たわみ u_3
面外せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$
せん断遅れ大きさ g

内挿関数で変位を近似

Timoshenko梁要素
$(u_1)_i^{\mathrm{e}}, (u_3)_i^{\mathrm{e}}, (\theta)_i^{\mathrm{e}}$

＋

せん断遅れの大きさ
$(g)_i^{\mathrm{e}}$

せん断遅れパラメータ
R_1, R_2, R_3

せん断遅れ分布 f で決まる

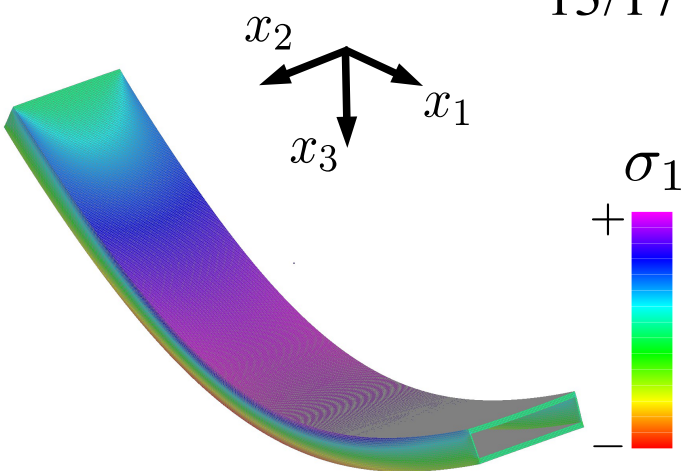
代表体積要素**(周期境界)**の FE解析

解析的に解けない問題にも対応可能

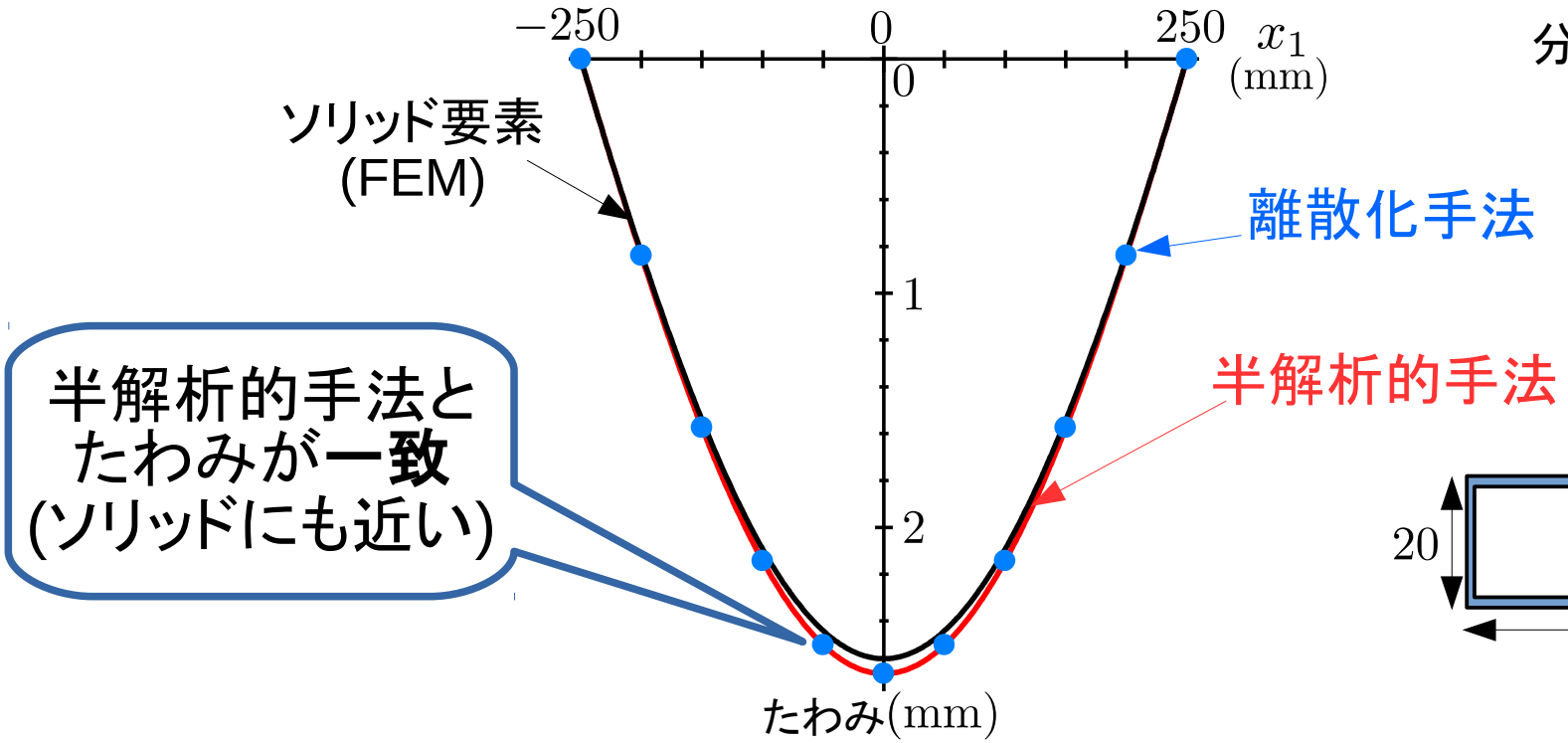
提案要素の妥当性確認

解析対象

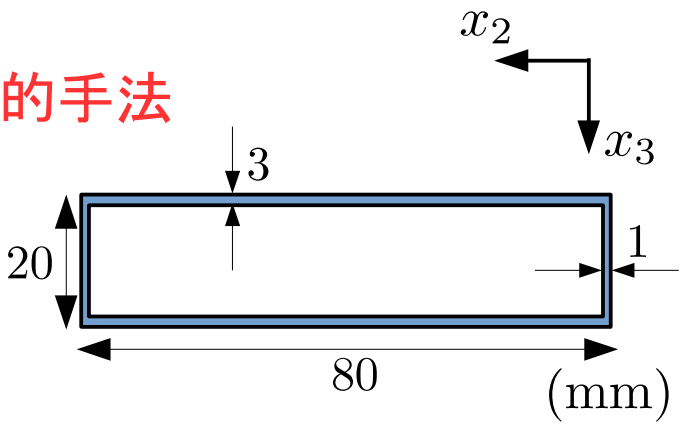
- **箱型断面梁を**単純支持，等分布載荷
- **半解析的**手法と**離散化**手法を比較
  参照解：FE解析（ソリッド）
- 軸方向の分割数は10要素



支間長：500 mm
分布荷重：1 N/mm



半解析的手法と
たわみが**一致**
(ソリッドにも近い)



断面図

離散化手法の妥当性を確認

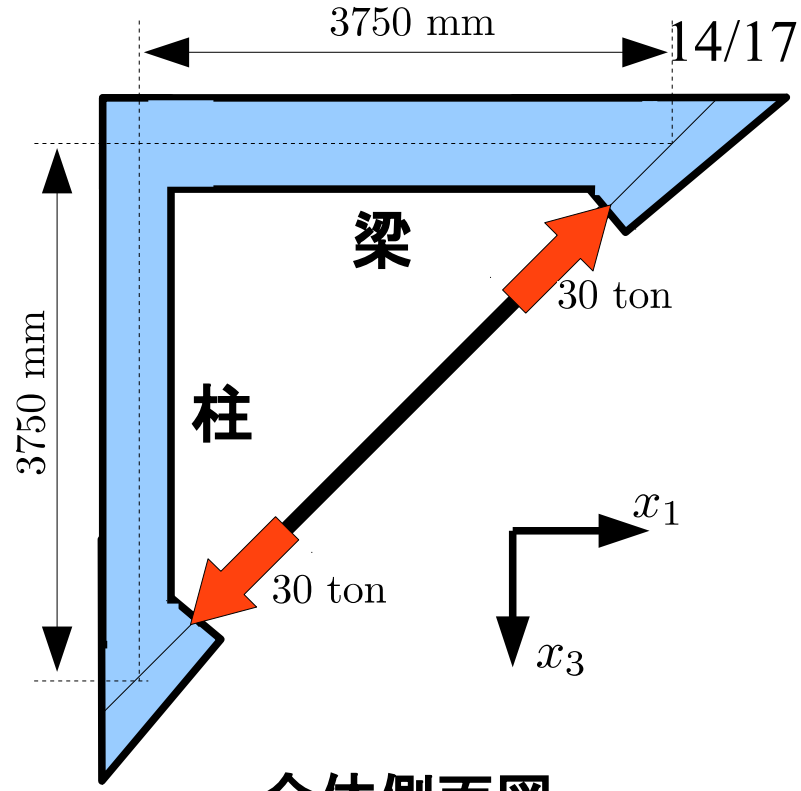
精度の検証（ラーメン）

解析対象

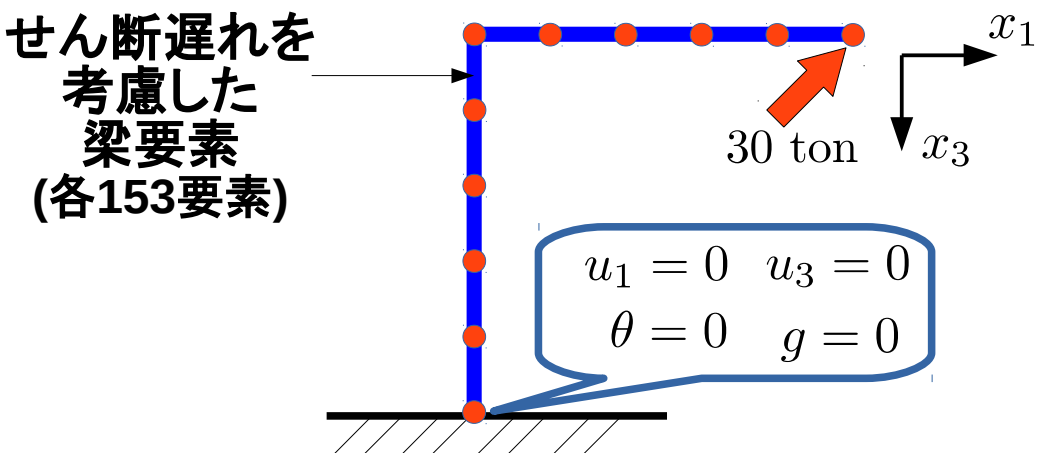
- 鋼製**ラーメン**（薄板箱断面）
- 梁と柱の端点に30ton載荷
- 過去の実験を参照（奥村ら 1967）

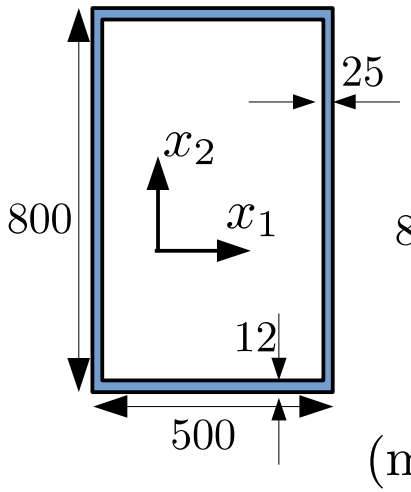
本解析

- 柱と梁で**せん断遅れ解析**，パラメーター算出
- せん断遅れを考慮した梁要素でモデル化

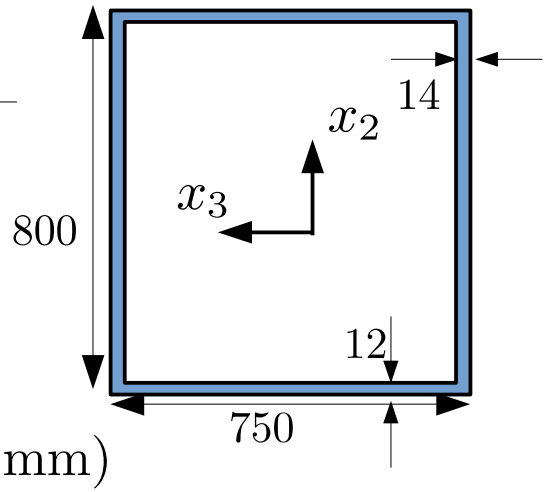


全体側面図





柱断面図



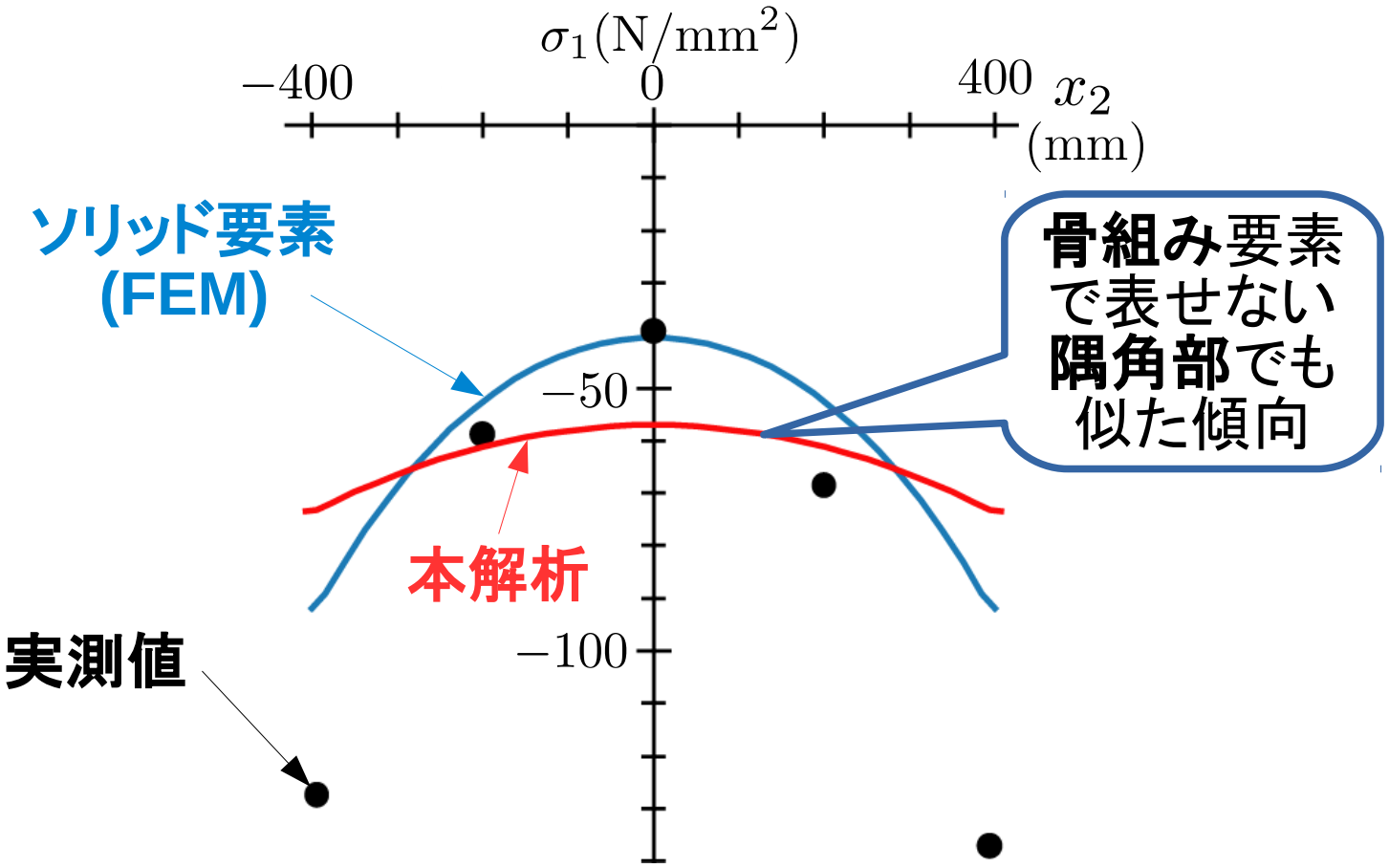
(mm)

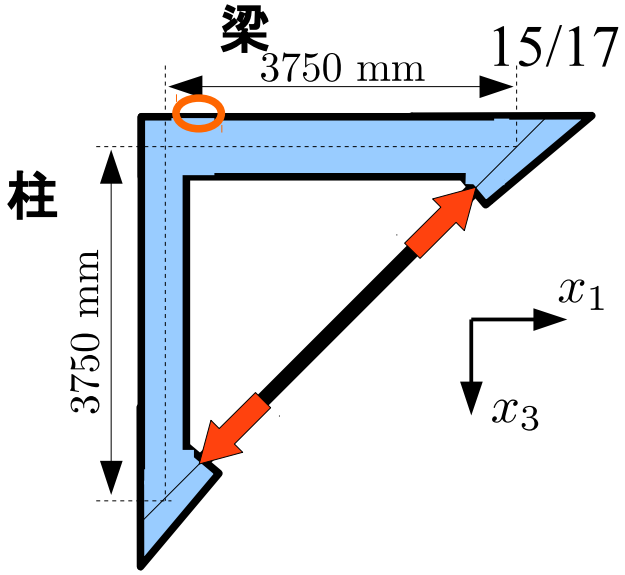
梁断面図

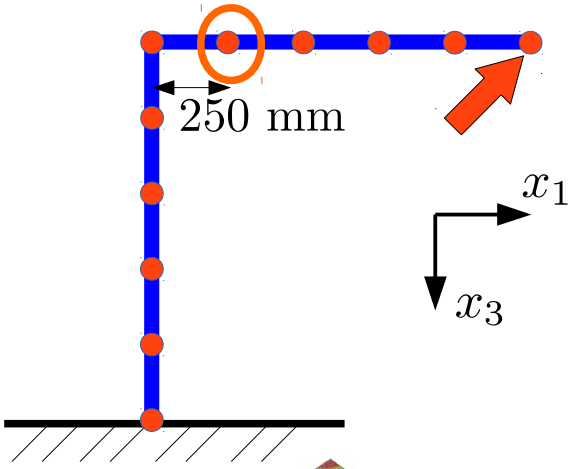
精度の検証（ラーメン）

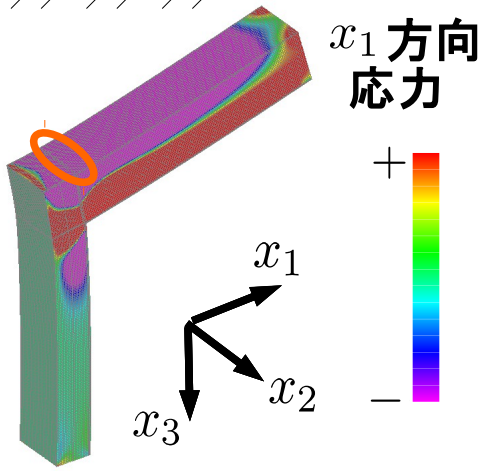
隅角部付近の応力

- フランジ（梁）の軸応力
- せん断遅れを考慮した梁要素，実測値，ソリッド要素のFEMで比較





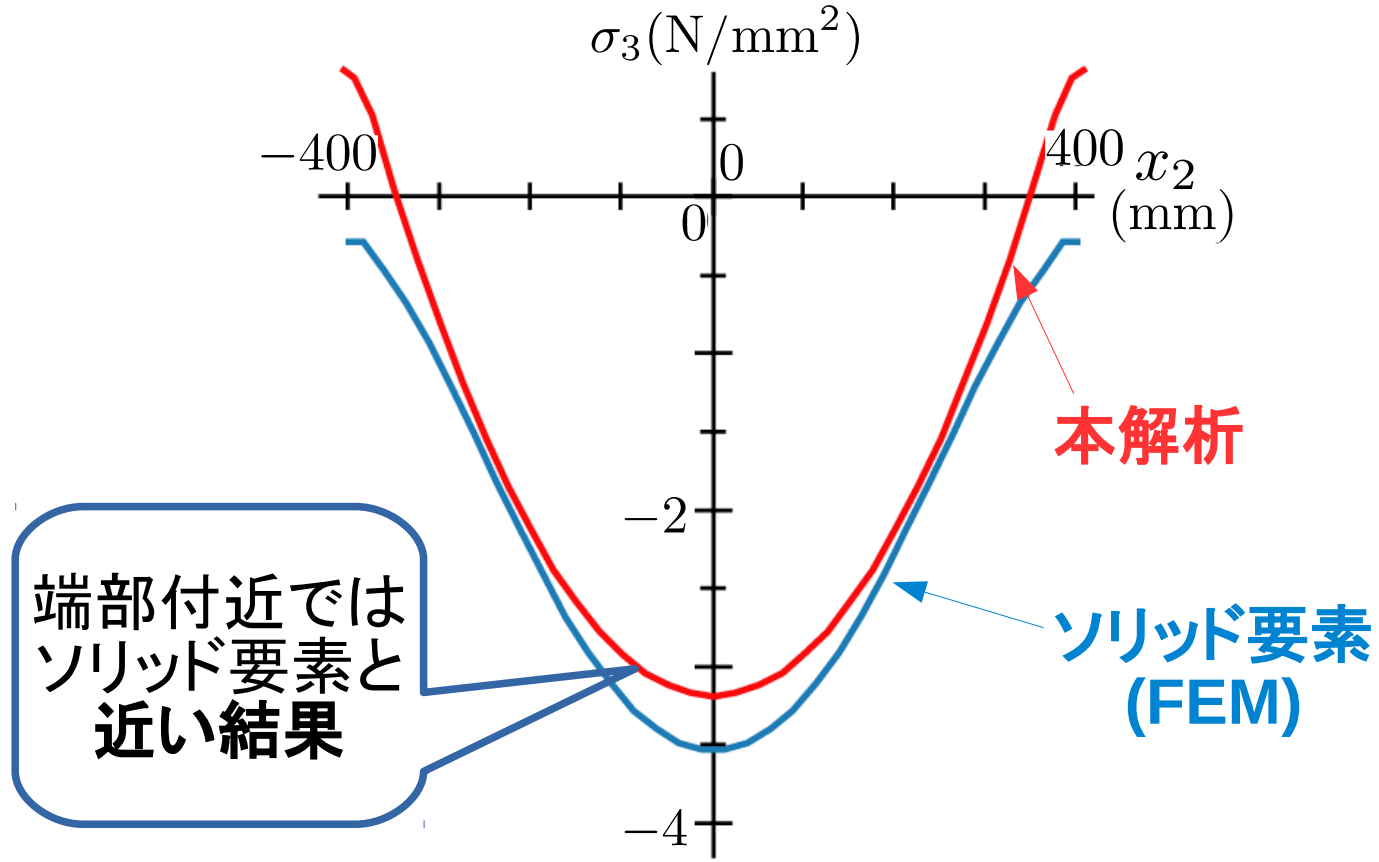


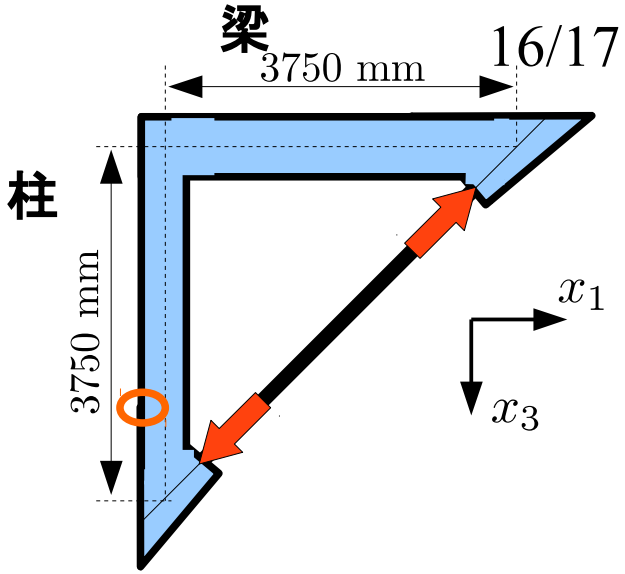


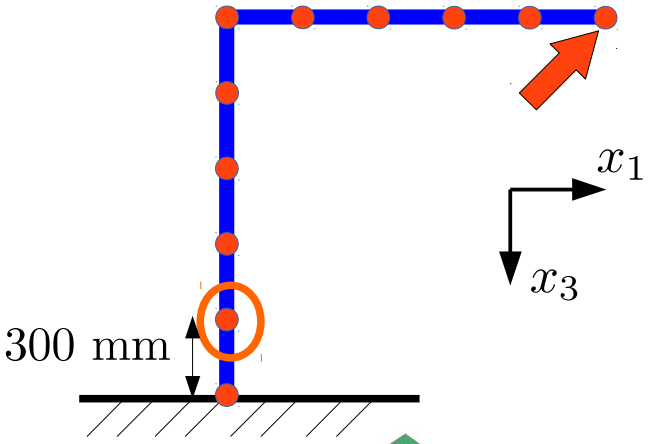
精度の検証（ラーメン）

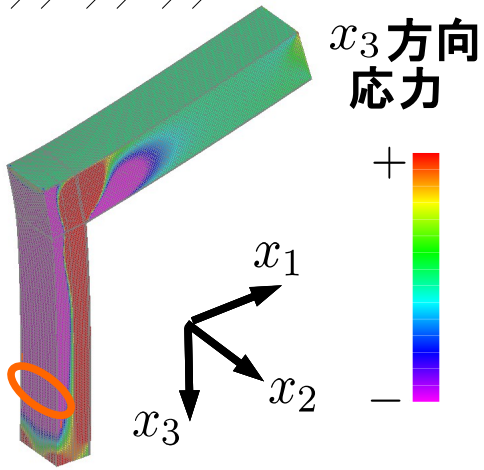
端部付近の応力

- フランジ（柱）の軸応力
- せん断遅れを考慮した梁要素，ソリッド要素のFEMで比較





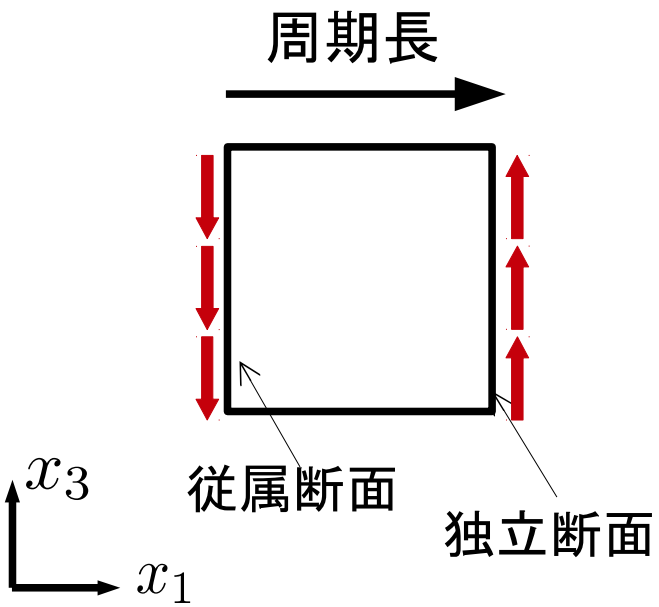




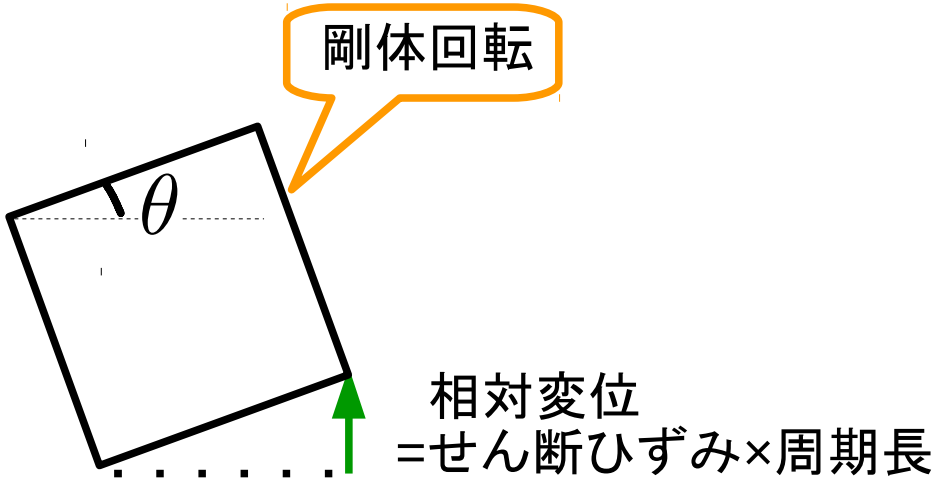
まとめ

- せん断遅れの**半解析的手法**を改良し,
  せん断遅れの**高さ方向分布**も考慮した.
- **合成桁**の解析で最大応力は**示方書**と**一致**し,
  応力**分布も表現**できた.
  解析手法の改良によって**計算精度**が**向上**した.
- せん断遅れを考慮した**梁要素**を開発した.
- **ラーメン**構造における応力計算を行い,
  ソリッド要素に近い結果が得られた.

周期境界条件



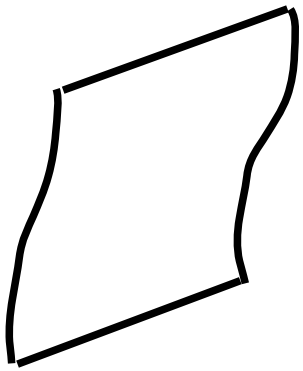
せん断変形
(周期境界条件)



剛体回転
の拘束

代表体積要素の
平均回転を0にする

$$\int \theta \, \mathrm{d}x_1 = 0$$

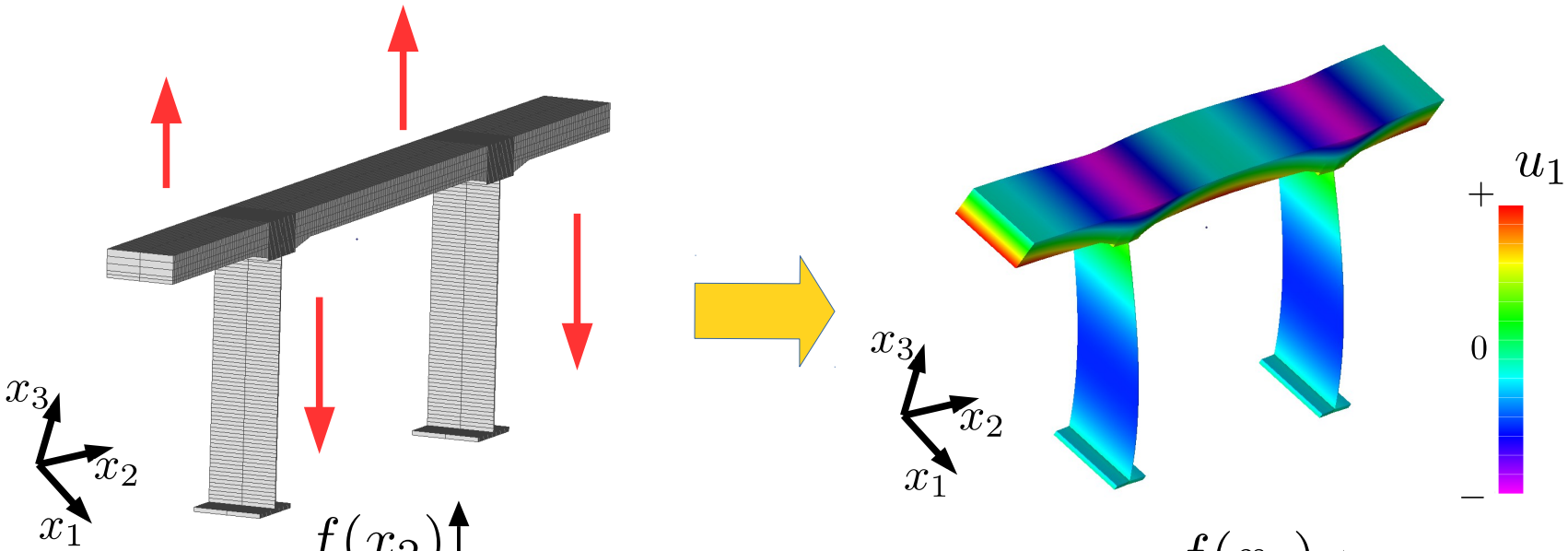


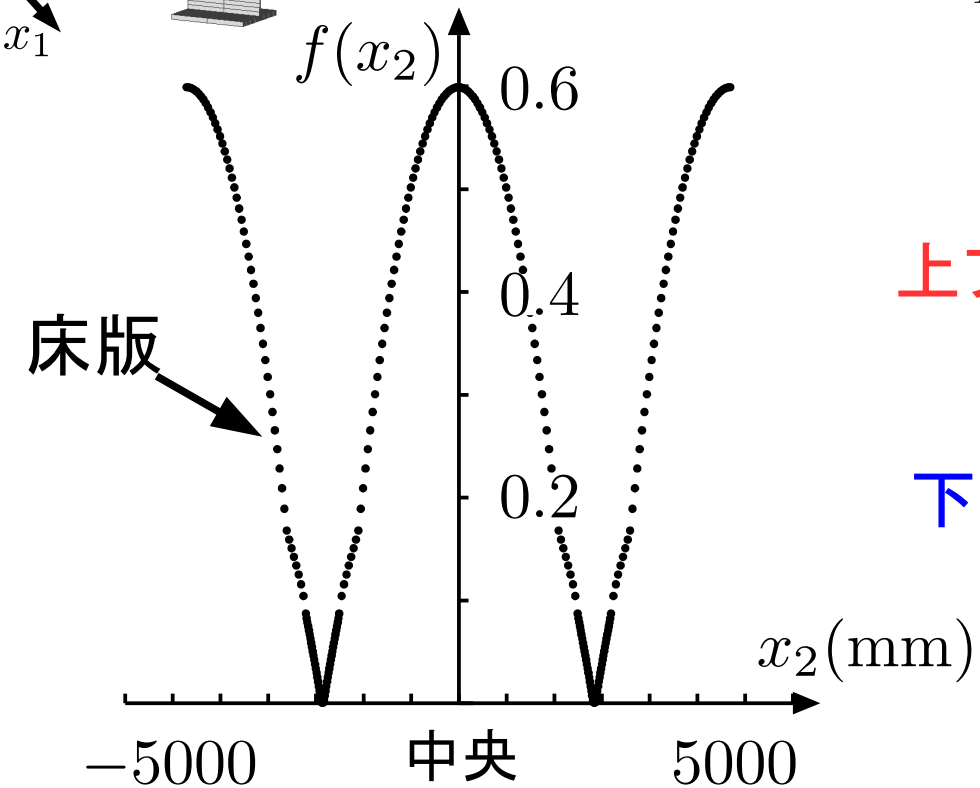
離散化

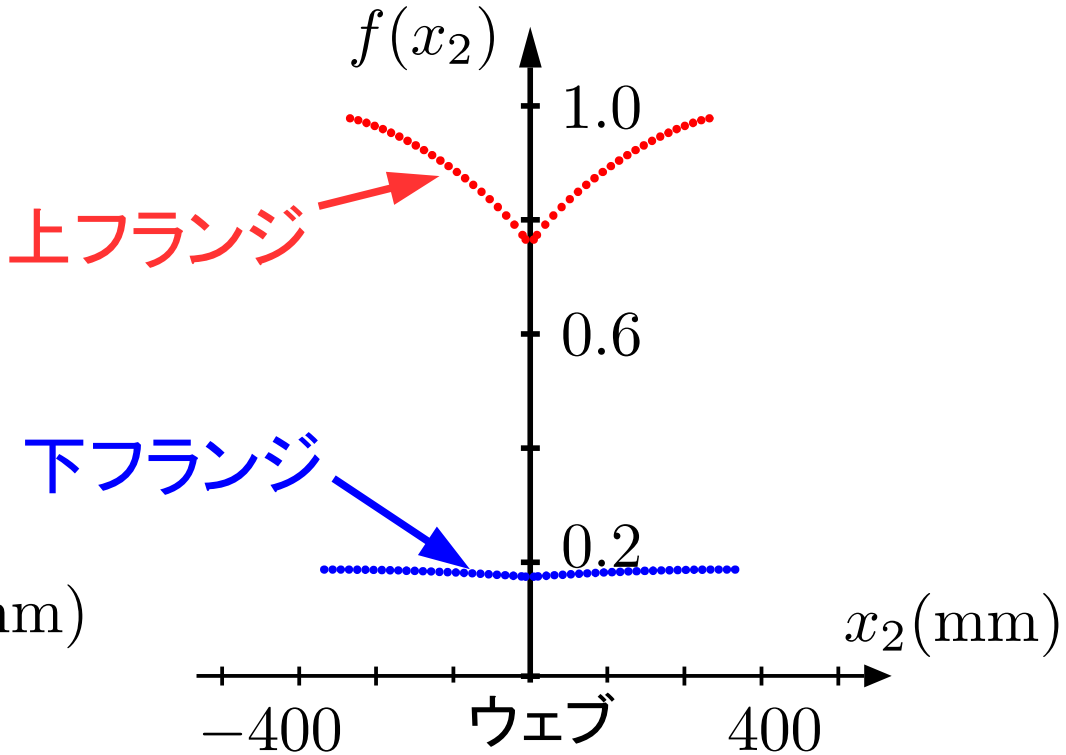
$$\sum^{N} w^n u^n = 0$$

N : 節点数
w : おもみ
u : 変位

合成桁の橋軸方向変位分布



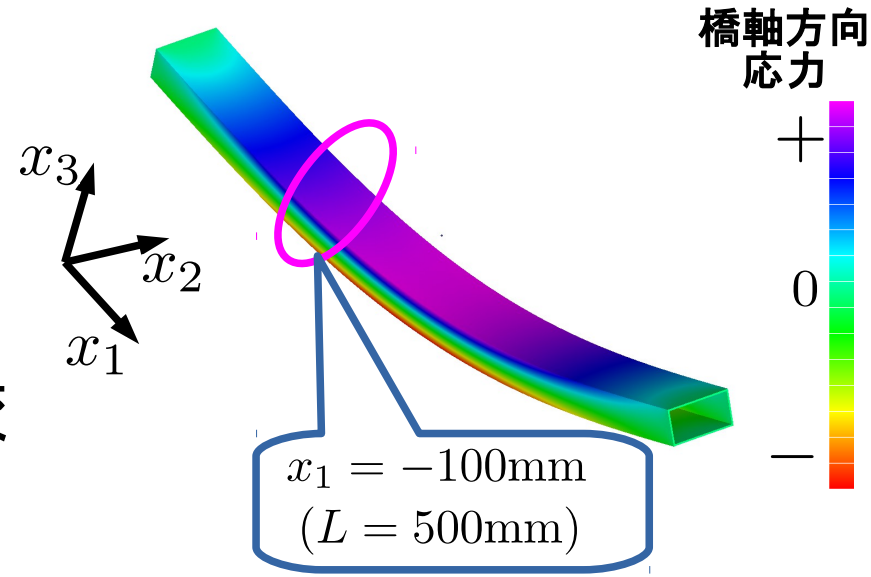


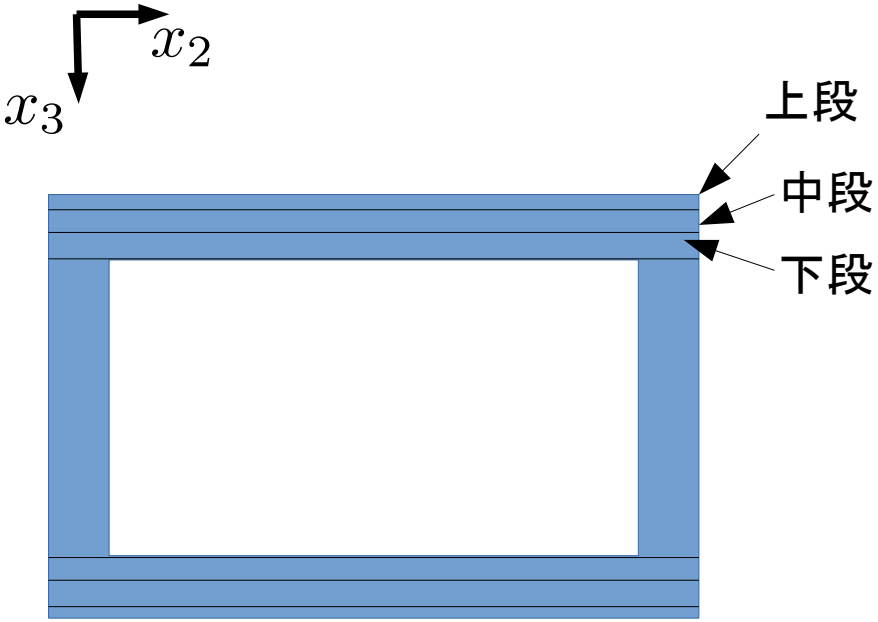


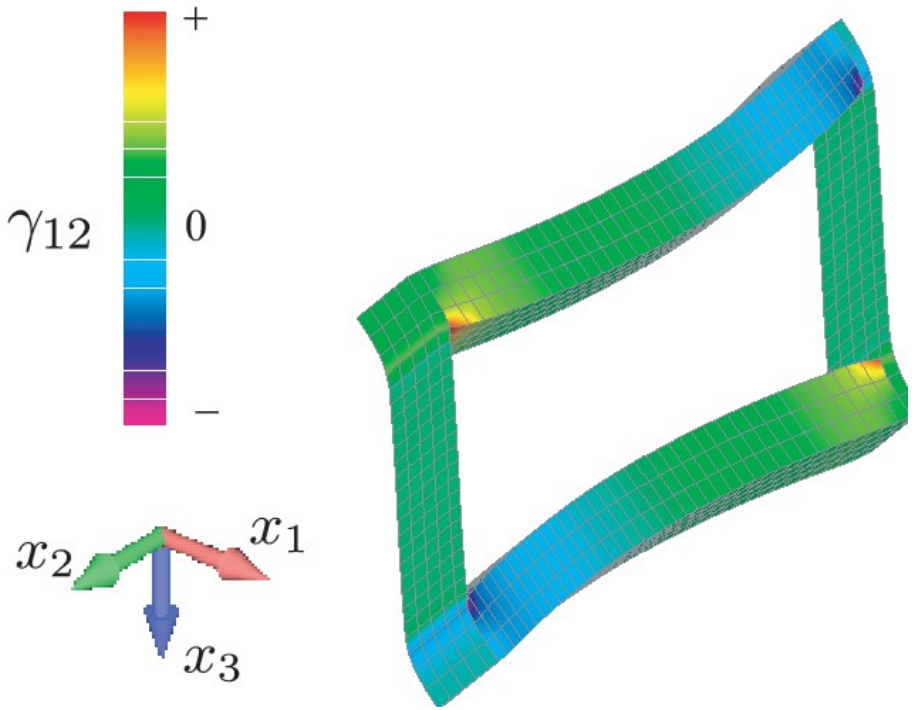
精度の検証（箱桁）

解析対象

- **箱型断面**の梁を単純支持し，等分布荷重を与える
- **上フランジの橋軸方向応力**を比較（x1=−100mm, 上段・中段・下段）





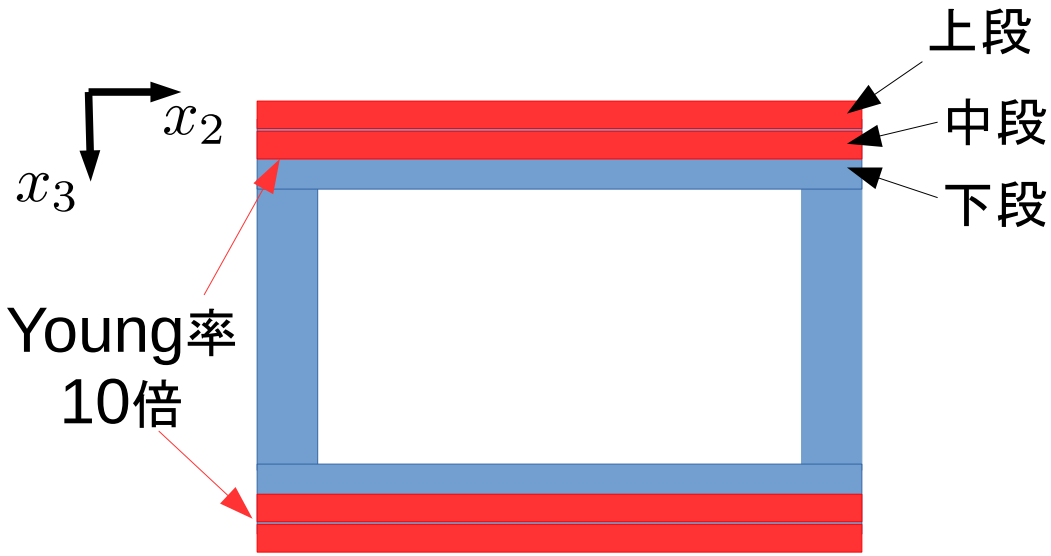


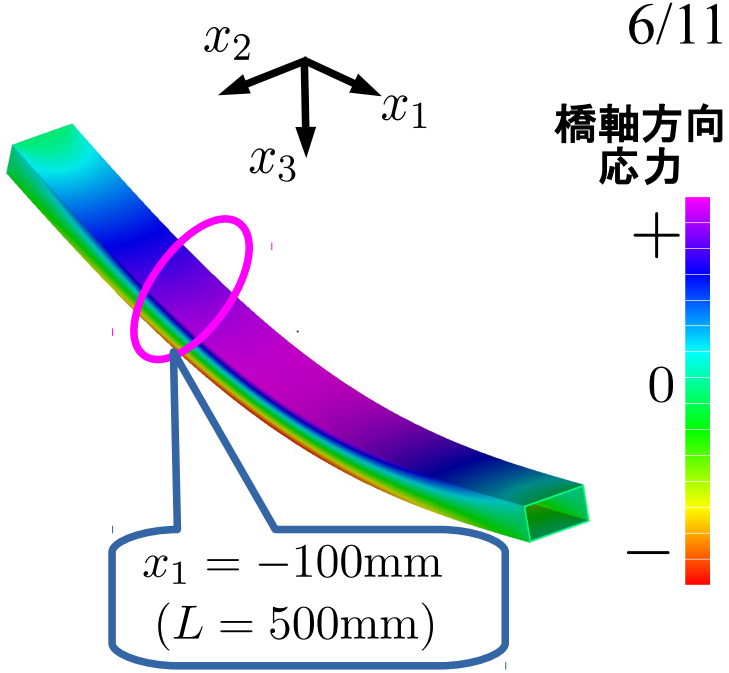
一様せん断変形を与えた
代表体積要素

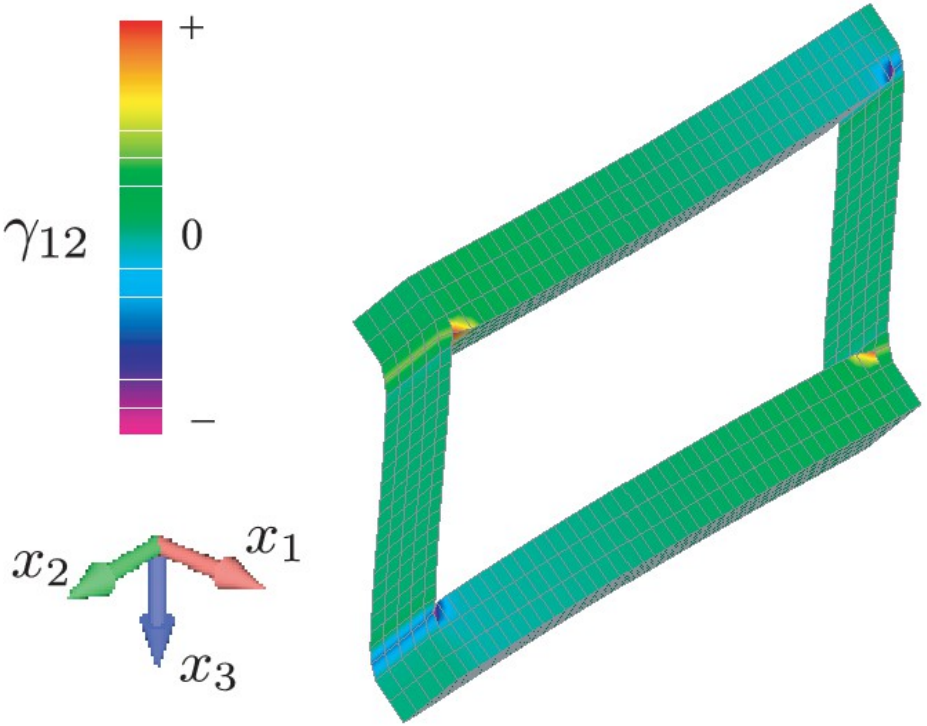
提案手法の精度検証

解析対象

- **箱型断面**の梁を単純支持し，等分布荷重を与える
- フランジの外側のYoung率が内側・ウェブの10倍
- 支点からL/5で比較

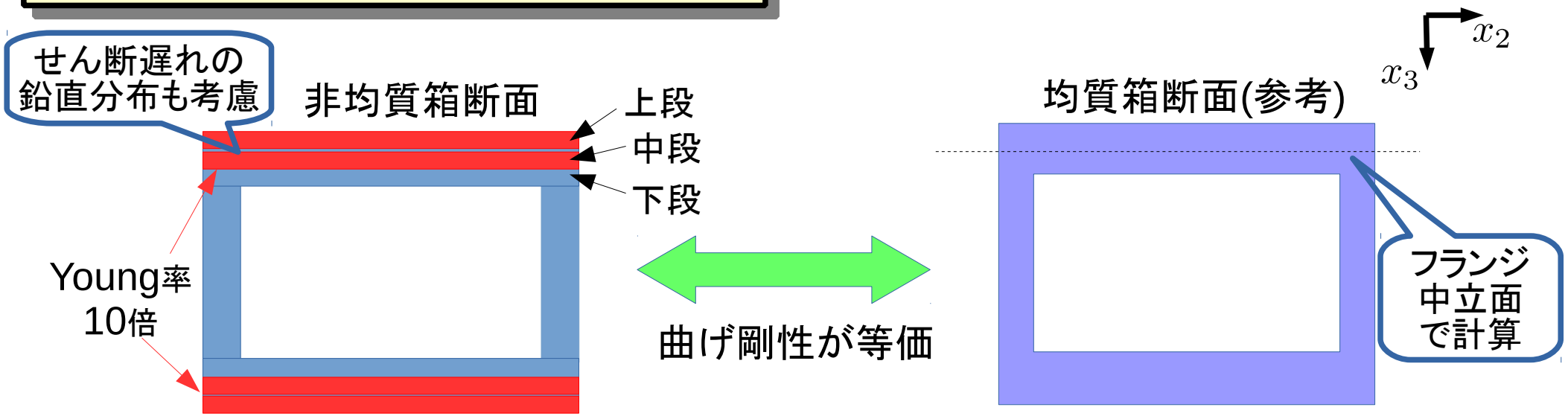






一様せん断変形を与えた
代表体積要素

せん断遅れの分布



本研究

$$u_1 = x_3\left(\tilde{\gamma} - \frac{\mathrm{d}u_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\right) + f(x_2, x_3)\, g(x_1)$$

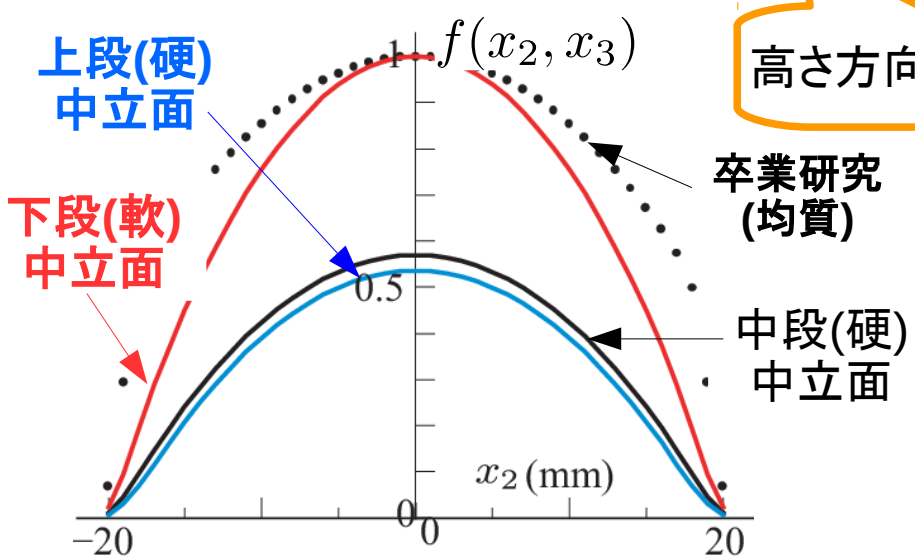
高さ方向分布を考慮

卒業研究

$$u_1 = x_3\left(-\frac{\mathrm{d}u_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1} + f(x_2)\, g(x_1)\right)$$

高さ方向には一定

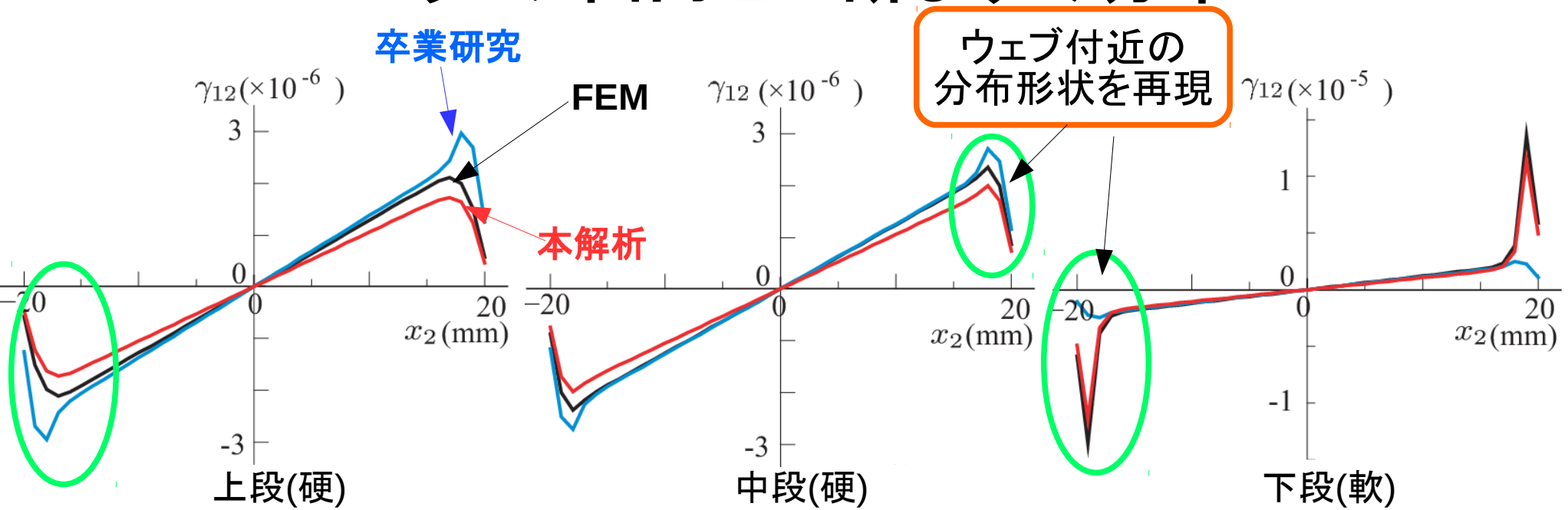
非均質断面は解析不可



せん断遅れの高さ方向分布も再現

せん断ひずみの比較

上フランジ面内せん断ひずみ分布



分布形状(ウェブ付近)を再現

最大値の相対差
(対FEM)
上段:18.5%
中段:17.1%
下段:17.3%

要素内の $f(x_2, x_3)$ 分布を無視して
せん断遅れパラメータ R_1, R_2, R_3 を
求めているため，精度が悪い(?)

**せん断遅れ解析・数値計算の
手法を再検討**

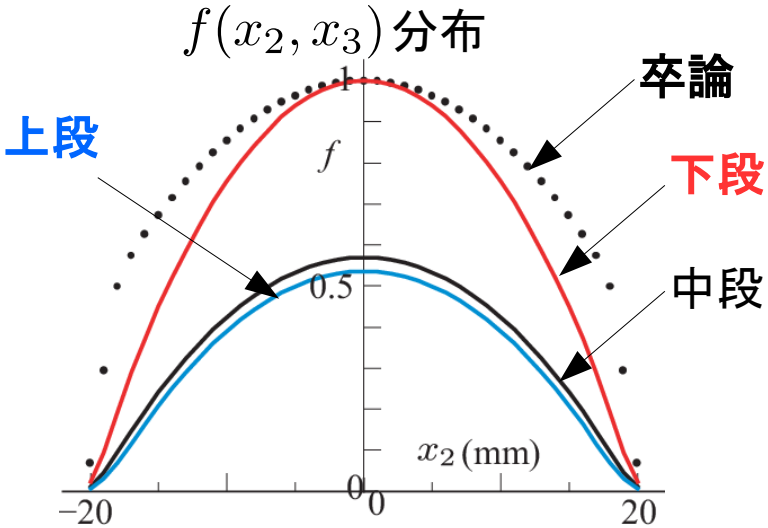
**せん断遅れ
パラメータ**

$$R_1 := \int_{S_F} E x_3 f \, \mathrm{d}S$$

$$R_2 := \int_{S_F} E f^2 \, \mathrm{d}S$$

$$R_3 := \int_{S_F} G \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_2} \right)^2 \mathrm{d}S$$

精度の検証（非均質箱桁）

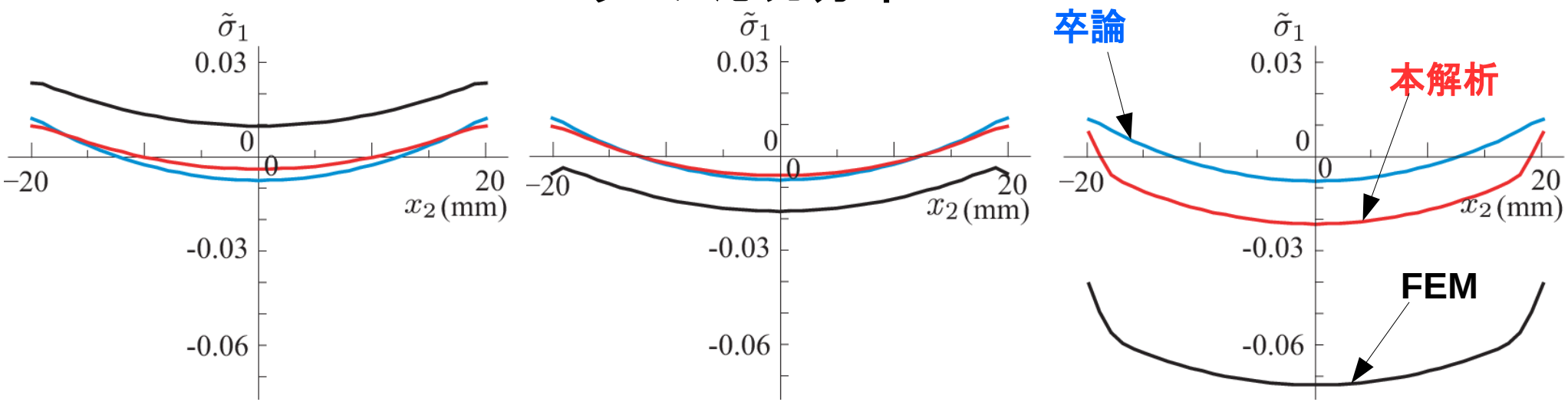


せん断遅れの高さ方向分布も再現可能.

卒論の手法では一定なので，曲げ剛性が等価になる均質梁中段で比較.

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\text{上フランジ曲げ応力}}{\text{初等梁理論曲げ応力}}$$

上フランジ応力分布



上段(硬)　　中段(硬)　　下段(軟)

精度向上・分布形状(ウェブ付近)を再現!