

軸方向に非均質な Timoshenko 梁のせん断剛性評価に関する一考察

A consideration on evaluation of shear stiffness of axially heterogeneous Timoshenko beams

新井晃朋*

Akitomo ARAI

*構造強度学研究室（指導教員：齊木功 准教授）

In order to evaluate average shear stiffness of beams, it is necessary to restrain the rigid body rotation and to give them shear deformation properly. The constraint of the rigid body rotation making use of the regression plane, which is proposed previously, is valid only for the beams with heterogeneity only in the cross-section. However, no study on effective shear stiffness of beams with axially heterogeneity have been reported. In this context, we propose a new restraint method of the rigid body rotation applicable for axially heterogeneous beams and show the feasibility of the method for evaluation of the effective shear stiffness.

Key Words: *hogenization method, Timoshenko beam, shear stiffness, rigid body rotation*

1. はじめに

優れた性能を示す複合材料を構造部材として適用するには、その平均的な剛性を適切に評価することが必要となる。サンドウィッチパネルのような周期構造を持つ非均質な梁の平均せん断剛性を周期境界条件を用いて評価するには、剛体回転を拘束してせん断変形を与える必要がある。文献¹⁾は代表体積要素全体の剛体回転拘束を提案しているが、その方法は図-1に示すような軸方向に一樣でない梁に対しては適用できない。本研究では、従来の方法では回転拘束ができない非均質梁に対して、適切な回転拘束方法を提案し、それによりせん断剛性が評価できることを示す。

2. 剛体回転の拘束

(1) 幾何学的近似平面による回転の定義と拘束

図-1に示すように梁の軸方向を x 軸，水平方向に y 軸，鉛直方向に z 軸を取る。代表体積要素（以降 RVE と記す）の、断面の y 軸周りの回転角 $\theta(x)$ を、 yz 平面上の点におけるの変形後の x 方向位置を最小二乗近似した平面の傾きと定義する^{1),2)}。断面の図心に y, z 軸の原点を定め、 y 軸まわりの断面 2 次モーメントを $I(x)$ とすれば、断面の回転角は

$$\theta(x) = \frac{\int_A z u(x, y, z) dA}{I(x)} \quad (1)$$

と定義できる。RVE に純せん断変形を与えるためには RVE の平均回転がゼロであることが必要であり

$$\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \theta(x) dx = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{\int_A z u(x, y, z) dA}{I(x)} dx = 0 \quad (2)$$

とすれば、純せん断変形を与えることができる¹⁾。しかし断面形状が軸方向に変化する RVE の場合、式 (2) の右辺の被積分関数の分母に断面 2 次モーメントがあるこ

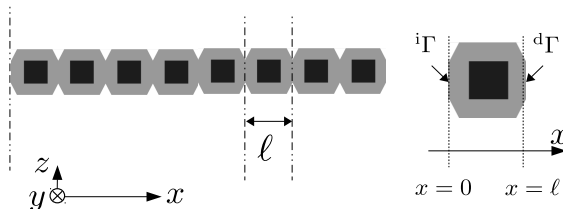


図-1 周期構造を有する非均質梁と代表体積要素 (RVE)

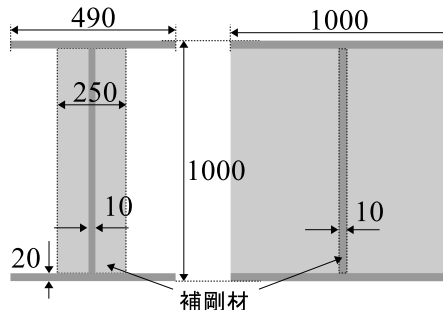


図-2 I 形断面の代表体積要素の断面図 (左) と側面図 (右) (単位: mm)

とで、回転角の軸方向の数値積分を行うことは困難である。

図-2に示すような、垂直補剛材がつくことで軸方向に非一様となる I 形断面の RVE について考えてみる。境界面に補剛材がくるように RVE を取り、式 (1) を条件式として用いて両境界の回転角がゼロとなるようにして、曲げせん断変形を与えた。結果は図-3に示すように、面外剛性が低い補剛材が曲げ変形することで、ウェブにせん断変形が生じなかった。よって式 (1) を境界条件として与えることは不適切であり、せん断剛性を適切に評価できない。

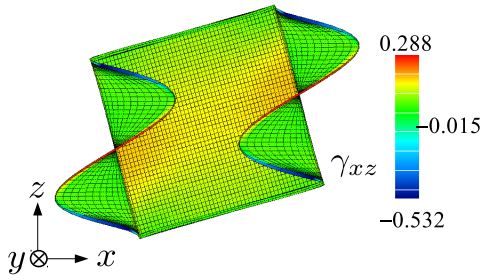


図-3 補剛材両端モデルの変形図

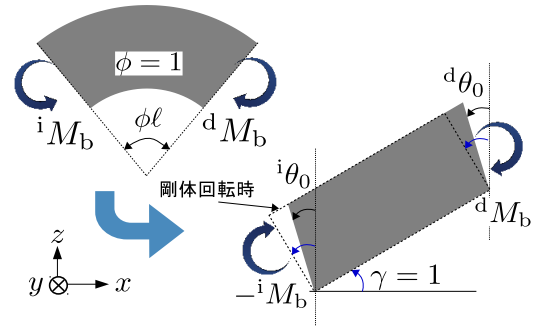


図-4 回転拘束の手順の概略図

(2) 純曲げ時の反力を利用した剛体回転拘束

周期境界条件を用いて RVE を純曲げ変形させる場合、図-3 のように、面外剛性の違いがある断面が境界面にあったとしても境界面は平面を保持する。そこで RVE の純曲げ時の反力分布を、断面の回転拘束を行う時の外力として用いれば、面外剛性の大きさを反映して断面の回転拘束を行えると考えた。そこで、RVE の純曲げ時の反力分布を実数倍して改めて RVE の境界に作用させることで、両境界面の回転角 ${}^i\theta_0$, ${}^d\theta_0$ を拘束して曲げせん断変形を与えるを試みた。ここで断面の回転角は式 (1) で定義される回転角を用いる。

具体的な手順としては、まず図-4 の左上に示すように RVE に単位の曲率を与えて純曲げ変形させた時、 y 軸まわりの曲げモーメント ${}^\alpha M_b$ ($\alpha = i, d$) を求める。つぎに図-4 の右下に示すように、単位の平均せん断ひずみ $\gamma = 1$ が生じるように曲げせん断変形させる。ただし剛体回転を拘束するために両境界面に作用させるべき曲げモーメント ${}^\alpha M$ の大きさは RVE のせん断力の大きさが既知でないと決めることができない。そのため断面の回転角と曲げモーメントの大きさの関係を求めるため試験的に作用させる曲げモーメント ${}^\alpha M_0$ を

$${}^iM_0 = -{}^iM_b, \quad {}^dM_0 = {}^dM_b$$

として境界面に作用させる。この時両境界面に生じる断面の回転角を ${}^i\theta_0$, ${}^d\theta_0$ とする。さらに図-4 の下の図において ${}^\alpha M_b = 0$ の時、RVE は剛体回転をすることから ${}^\alpha\theta = \gamma$ となる。このことから断面の回転角と曲げモーメントの大きさの関係を

$$\frac{\gamma}{\gamma - {}^\alpha\theta_0} = \frac{{}^\alpha M}{{}^\alpha M_0}$$

と求めることができる。

したがって空間的に離散化された RVE に単位の曲率が生じるように純曲げ変形させた時に境界面 ${}^d\Gamma$, ${}^i\Gamma$ 上の節点 k に生じる x 方向反力 ${}^\alpha f_x^k$ ($\alpha = i, d$) とすると、曲げせん断変形させるために境界面上の点に作用させるべき節点外力 ${}^\alpha F_x$ は

$${}^iF_x^k = -\frac{\gamma}{\gamma - {}^i\theta_0} {}^i f_x^k, \quad {}^dF_x^k = \frac{\gamma}{\gamma - {}^d\theta_0} {}^d f_x^k$$

となる。

3. せん断剛性の評価方法

(1) Timoshenko 梁理論を用いた方法¹⁾ (方法 1)

長さ ℓ の平均化された RVE の曲げ剛性を \overline{EI} 、せん断剛性を $\overline{\kappa GA}$ とし、RVE が両端の境界で ${}^i\theta = {}^d\theta = 0$ の下で曲げせん断変形をする時、たわみ δ とせん断力 Q の関係は、Timoshenko 梁理論から

$$\delta = \frac{Q\ell^3}{12EI} + \frac{Q\ell}{\kappa GA} \quad (3)$$

と表せる。この関係から平均化された梁のせん断剛性は

$$\overline{\kappa GA} = \ell \left(\frac{\delta}{Q} - \frac{\ell^3}{12EI} \right)^{-1} \quad (4)$$

となる。

(2) ひずみエネルギーの等価性を用いた方法 (方法 2)

平均化された Timoshenko 梁と RVE におけるひずみエネルギーが等しい、すなわち

$$\int_0^\ell \frac{Q^2}{2\kappa GA} dx + \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI} dx = \int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2} dV \quad (5)$$

と仮定する。ここに RVE が曲げせん断変形する時のせん断力を Q 、曲げモーメントを M 、RVE の体積領域 V 内に生じる応力とひずみ成分を σ_{ij} , ε_{ij} とし、応力・ひずみの添え字の 1, 2, 3 はそれぞれ x, y, z に対応する。せん断剛性について解くと

$$\overline{\kappa GA} = \left(\frac{1}{\ell Q^2} \left\{ \int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV - \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI} dx \right\} \right)^{-1} \quad (6)$$

となる。

4. せん断剛性評価

(1) I 形断面

最も簡単な非均質梁の例として、補剛材を有する I 形断面梁の RVE を対象として平均せん断剛性を評価する。Young 率 $E = 200$ GPa, Poisson 比 $\nu = 0$ とし、低次 6 面体要素を用いて有限要素解析を行った。梁の断面および側面の寸法は図-2 の通りである。補剛材がない場合 (補剛材なしモデル; 要素数: 15,120, 節点数: 23,265), 補剛材が RVE の中央にある場合 (補剛材中

央モデル, 要素数: 17,040, 節点数: 26,073), 補剛材がRVEの両端にある場合(補剛材両端モデル, 要素数: 17,040, 節点数: 27,009)の3つに対して曲げせん断変形を与え, 評価したせん断剛性を表-1に示す.

a) 補剛材なしモデル

補剛材がない軸方向に一樣な梁の場合, 本提案の剛体回転拘束を行い, 曲げせん断変形したRVEに対して評価方法1および2で評価したせん断剛性と, 文献²⁾のI形断面のせん断補正係数を用いて求めた参照解との差はそれぞれ0.45%, 0.51%であった. どちらの評価方法でも参照解に近い剛性を評価するが, 評価方法1の方が参照解に近く, 低い剛性を評価する.

b) 補剛材中央モデル

補剛材の板厚はRVEの長さに対して $\frac{1}{100}$ なので, 補剛材によるせん断剛性の変化は小さいと予想される. そこで, 同一の評価方法を用いて補剛材なしモデルと比較することで, 補剛材による剛性の変化を確認する. 評価方法1では約0.42%増加, 評価方法2では約0.50%増加した.

また補剛材なしモデルの参照解²⁾に対しては, 評価方法1で0.87%増加, 評価方法2で1.0%増加した. 以上から補剛材中央モデルに対しては各評価方法により適切にせん断剛性を評価できたと考えられる.

c) 補剛材両端モデル

境界条件として式(1)で定義された回転角を用いて, $\theta = 0$ を適用し, 補剛材両端モデルに曲げせん断変形を与えたところ図-3のようにRVEに適切なせん断変形が生じなかった. 図-3の状態から評価方法1, 2で求めたせん断剛性を表-1に示す. 参照解²⁾との相対差を見てみると, 両評価方法とも約-90%である. それに対して, 本提案の剛体回転拘束により曲げせん断変形を与えると, 図-5のようにRVEに適切なせん断変形が生じたように見える. 実際に評価方法1および2によるせん断剛性と参照解²⁾との相対差はそれぞれ-2.0%, 1.0%であり大きく改善した.

次に, 本提案による補剛材なしを基準とした補剛材両端モデルのせん断剛性変化を見てみる. すると評価方法1では約2.4%減少し, 評価方法2では約0.50%増加した. つまり評価方法1では補剛材がついたことによりせん断剛性が減少するという力学的に矛盾する結果が生じた. この矛盾については以下のように考察をした.

図-5の右に示された境界面の軸方向変位コンターを見ると, 面外剛性が低い補剛材部分に曲げ変形が生じているのがわかる. それにより補剛材部分だけでy軸まわりの回転が生じてしまい, その回転を打ち消すために, ウェブ部分には補剛材部分とは逆向きのy軸まわりの回転が生じていると考えられる. そのため, せん断力を受け持つウェブの回転角がゼロになるためには, さらにせん断力が作用しなければいけないにも関わらず, 断面全体の回転角がゼロであるためにせん断剛性が低く評価さ

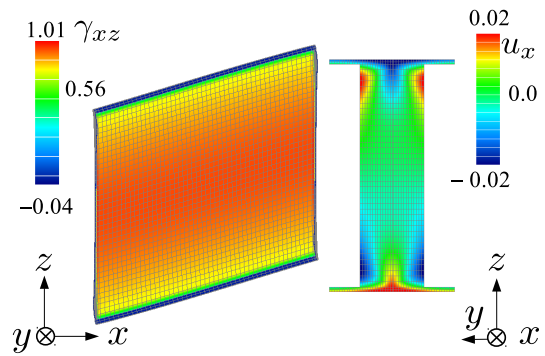


図-5 補剛材両端モデルの変形図とx方向変位コンター

表-1 各I型断面RVEの平均せん断剛性(単位: $\times 10^8 \text{N}$)

回転拘束	評価方法	補剛材		
		なし	中央	両端
純曲げ反力回転拘束(本提案)	1	9.5830	9.6230	9.3497
	2	9.5896	9.6375	9.6371
境界面の回転拘束 ¹⁾	1	9.5830	9.6233	0.9822
	2	9.5893	9.6375	1.0407
Cowper ²⁾		9.5400	—	—

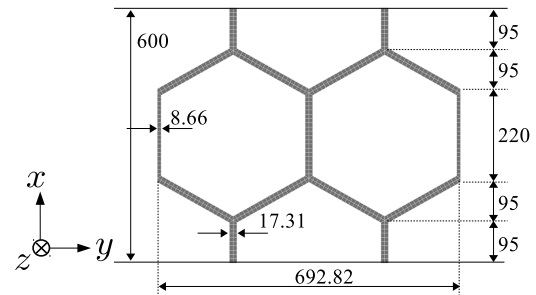


図-6 コア材の平面図(単位: mm)

れてしまったと考えられる.

(2) ハニカムサンドウィッチパネル

対象とするハニカム構造のコア材とスキン材の寸法を図-6, 7に示す. ハニカム構造のコア材とスキン材を構成する材料はYoung率 $E = 200 \text{ GPa}$, Poisson比 $\nu = 0$ とした. ハニカム構造を梁としてモデル化し, 軸方向をx軸とした

コア材が図-6となる周期構造をもったRVE(基本モデル, 要素数: 19,720, 節点数 35,039)と, それを基準としてx方向に半周期ずらしたRVE(半周期差モデル, 要素数: 19,720, 節点数 35,058)に対して, 低次6面体要素を用いて有限要素解析を行った. 提案した回転拘束を用いて曲げせん断変形を与えた時の評価方法1および2によるせん断剛性を表-2に示した.

a) 周期構造の取り方による違い

評価方法1によると基本モデルのせん断剛性に比べ半周期差モデルのせん断剛性は2.03%小さかった.

基本モデルと半周期差モデルに提案した回転拘束を用

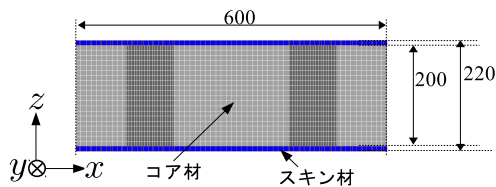


図-7 基本モデルの側面図 (単位: mm)

表-2 ハニカム構造の各評価方法によるせん断剛性 ($\times 10^8$ N)

	評価方法 1	評価方法 2
基本モデル (A)	5.67673	5.62782
半周期差モデル (B)	5.56124	5.50581
(B-A)/A	-2.03×10^{-2}	-2.17×10^{-2}

表-3 ハニカム構造の評価方法 1 によるせん断剛性 ($\times 10^8$ N)

	基本 RVE	膜要素あり RVE
基本モデル (A)	5.67673	7.67939
半周期差モデル (B)	5.56124	7.67751
(B-A)/A	-2.03×10^{-2}	-2.44×10^{-4}

いて曲げせん断変形を与えた時の変形図を図-8, 9 に示した。どちらの変形図においても、スキン材にせん断遅れ変位が生じていることがわかる。このせん断遅れにより、断面全体の回転角がゼロであるが、スキン材のせん断遅れ変位によりスキン材部分だけの断面で回転角が生じ、その回転角を打ち消すように、コア材だけの部分で y 軸まわりに反時計回りの向きに回転角が生じたため、どちらの RVE でもせん断剛性を過小評価していると考えられる。一方、評価方法 2 によると、方法 1 と同じように 2.2% ほど基本モデルのせん断剛性が大きい。(1)I 形断面の梁では、評価方法 2 を用いると境界面の回転角に依存せず、単位せん断力あたりの適切な応力分布とひずみ分布を得ることができればせん断剛性を求めることができた。つまり周期構造の取り方によるせん断剛性の変化はせん断遅れが生じることでコア材に生じる応力とひずみの分布が変わることが原因として考えられる。

b) せん断遅れによるせん断剛性への影響

スキン材にせん断遅れが生じたことによるせん断剛性の影響をみるために、スキン材表面に面外剛性を持たない膜要素 (Young 率 20000 GPa, 厚さ 5mm) をつけて改めて平均せん断剛性を評価する。面内剛性の高い膜要素をつける事によりスキン材の面内変形を拘束し、せん断遅れを生じさせないことを目論んだ。また膜要素は面外剛性を持たないので、RVE のせん断剛性に寄与しない。

膜要素のついた 2 つのモデルに、曲げせん断変形をさ

せた時の変形図を図-10, 11 に示した。図-8 の境界面においてスキン材の y 方向の中央の節点と、スキン材とコア材の直交部の節点の軸方向相対変位は RVE の長さに対して約 4.11×10^{-2} であるが、図-10 では RVE の長さに対して約 1.83×10^{-3} となり遅れ変位が $\frac{1}{20}$ ほど小さくなった。膜要素をつけたモデルの評価方法 1 によるせん断剛性を膜要素あり RVE として表-3 に示した。基本モデルと半周期差モデルのせん断剛性の相対差は 2.08×10^{-2} だけあったが、膜要素をつけてせん断遅れ変位を小さくしたことにより基本モデルと半周期差モデルのせん断剛性の相対差は 2.45×10^{-4} と小さくなった。

一方で、基本モデルと半周期差モデルの両者において、膜要素を付けたことにより 35% ほど剛性が増加した。つまりせん断遅れが生じない場合と比べて、せん断遅れが生じる RVE のせん断剛性は 35% ほど小さく評価されることがわかった。さらに半周期差モデルのせん断剛性は基本モデルに比べて 2% ほど小さかったことから、半周期差モデルの方がせん断遅れによるせん断剛性への影響が大きいといえる。

つまりせん断遅れが生じる RVE を持つ梁の場合、せん断遅れが生じることでせん断剛性が過小評価され、さらに RVE の取り方によって評価されるせん断剛性の大きさが変わるということがわかった。

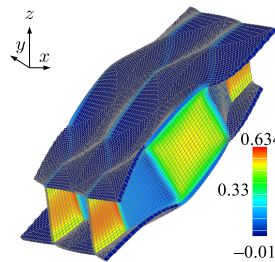


図-8 基本モデルの変形図

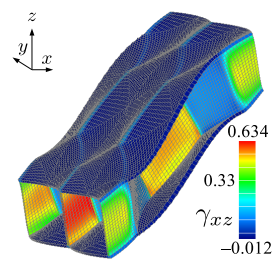


図-9 半周期差モデルの変形図

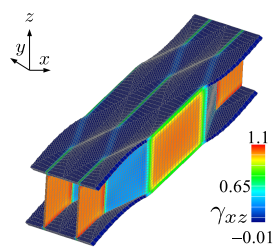


図-10 基本モデルの変形図 (膜要素あり)

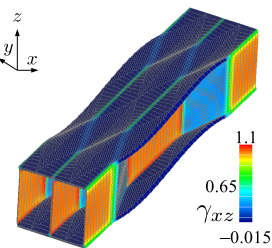


図-11 半周期差モデルの変形図 (膜要素あり)

参考文献

- 1) 齊木功, 鎌一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫: 非均質な Timoshenko 梁の平均物性, 土木学会応用力学論文集, Vol.15, pp.161-169, 2012.
- 2) Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.33, pp.335-340, 1966.

(2017 年 2 月 2 日 提出)