

複合材料の塑性変形に伴う異方性を考慮した 近似的セルフコンシステント予測

Approximate Self-Consistent Prediction of Average Elastoplastic Behavior
of Composite with Stress-induced Anisotropy

鈴木 貴大*

Takahiro SUZUKI

*構造強度学研究室 (指導教員: 岩熊 哲夫 教授)

In elasticity, our successive substitution method of the Mori-Tanaka average using the virtual matrix results in Hill's self-consistent solution of isotropic composites. The same approach has been used for anisotropic elastic composites, and has shown that the iteration converges to one solution no matter what initial state is assumed. We here expand this method for elasto-plastic composites with stress-induced anisotropy. The corresponding isotropic elasticity of the virtual matrix is introduced by approximating the tangential elastoplastic moduli using a least-square method of all the elements of the moduli and an evaluation of the apparent shear and bulk moduli through the eigenvalues of the tangential moduli. Comparisons with other predictions and experimental data are made to show eligibility of the method presented.

Key Words: virtual matrix, iteration converges, elasto-plasticity, self-consistent

1. まえがき

複合材料は組み合わせた材料のそれぞれの物理的性質を適切に活かすことができ、適所に用いることで非常に高いパフォーマンスを発揮する。このような複合材料の開発に際して、均質化法を用いた数値実験により実際に材料実験を行う回数を大幅に減らすことができるが、この数値実験も場合によっては実際のランダムな微視構造を持つ材料の設計や最適化のためには多大なコストが必要となると考えられる。そこで、ある程度解析的に複合材料の平均挙動を精度よく予測する手法を検討したい。

複合材料の解析的な平均挙動予測手法として、Eshelbyの解¹⁾を利用した森・田中理論²⁾があり、特別な場合はそれはHashin-Shtrikmanの上下界に一致する。また、森・田中理論に架空母材を導入する手法³⁾によって、弾性の範囲では既往の平均化手法の一般化が可能であり、この手法によりHillのself-consistent解⁴⁾に一致する平均弾性の予測も可能である。この森・田中理論を弾塑性材料動に拡張する際には、塑性変形による異方性が生じるため、等方弾性で用いるEshelbyの解をそのまま用いることができず、母材と介在物の相互作用を厳密に考慮することは困難になる。そのために見かけ上の材料定数を近似する必要がある。多くの文献では弾塑性接線係数⁵⁾や割線係数を利用した手法がとられている。

本研究では、森・田中理論に架空母材を導入する手法³⁾を異方弾性や弾塑性に拡張することを試みる。この時、架空母材の異方剛性を適切な等方弾性に近似す

ることを提案する。この等方性近似を行うことによって近似的にEshelbyの解を用いることができ、弾塑性の範囲でも簡便に近似的なセルフコンシステント予測ができる。

2. 弾塑性3相複合材料に対する増分型平均化

(1) 各層の平均増分応力ひずみ関係

等方弾性体である母材中に、増分型 J_2 流れ理論に従い硬化関数は累乗則で与えられる弾塑性体の介在物が2種類存在しているとすると、この時、各層中の平均増分応力ひずみ関係は各層の弾性係数テンソルによって以下のように書けるとする。

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_M = C_M \langle \dot{\epsilon} \rangle_M, \quad \langle \dot{\sigma} \rangle_i = C_i (\langle \dot{\epsilon} \rangle_i - \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_i) \quad (1a, b)$$

ここで下添え字 M は母材の諸量であることを、下添え字 i は各介在物の諸量であることを示し $i = 1, 2$ である。

(2) 母材と介在物の相互作用

森・田中理論において母材と介在物との相互作用は、もともと式(1a)の平均的状态の母材中にそれぞれの介在物をただ一つ加えた場合の乱れで近似しており、介在物中の増分ひずみはもともと母材部分に生じていた増分ひずみに乱れ成分 $\dot{\gamma}_i$ が加わったものと考え

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle_i = \langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \dot{\gamma}_i \quad (2a)$$

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_i = C_i (\langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \dot{\gamma}_i - \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_i) \quad (2b)$$

と表現できる。等価介在物法を用いて介在物を母材に置き換えた補問題を考えると介在物中の応力増分は

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_i = C_M (\langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \dot{\gamma}_i - \{ \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_i + \dot{\epsilon}_i^* \}) \quad (3)$$

と表せる. ここで ϵ_i^* は元の 2 相の状態と補問題とが等価になるような未知の eigen ひずみ増分である. この時, 補問題において非適合ひずみ増分に相当する $\{\langle \epsilon^p \rangle_i + \epsilon_i^*\}$ が分布した時の問題の解として, Eshelby テンソル S_i を用いて介在物中の乱れ成分 $\dot{\gamma}_i$ は

$$\dot{\gamma}_i = S_i (\langle \epsilon^p \rangle_i + \epsilon_i^*) \quad (4)$$

と表すことができる.

(3) 森・田中理論に基づく弾塑性構成関係

弾塑性 3 相材料からなる複合材料全体の平均応力増分および平均ひずみ増分は母材と介在物の体積平均で

$$\dot{\bar{\sigma}} \equiv (1 - f_1 - f_2) \langle \dot{\sigma} \rangle_M + \sum_{i=1}^2 f_i \langle \dot{\sigma} \rangle_i \quad (5a)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} \equiv (1 - f_1 - f_2) \langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \sum_{i=1}^2 f_i \langle \dot{\epsilon} \rangle_i \quad (5b)$$

と定義される. 塑性ひずみ増分は関連流れ側によって荷重履歴に依存して決まることを考慮し, 以上までの式を組み合わせることによって平均応力増分と平均ひずみ増分の関係を導き, 平均応力増分関係

$$\dot{\bar{\epsilon}} = D^{eq} \dot{\bar{\sigma}} \quad (6)$$

によって接線弾塑性係数コンプライアンス D^{eq} を定義する. 介在物 1, 2 どちらもが弾性域にある時, D^{eq} は 3 材料が弾性体である時の森・田中平均による平均弾性コンプライアンスに一致する.

3. 等方性近似を用いた逐次計算手法

(1) 架空母材を用いた 2 相複合材の平均化

前節の 3 相複合材料の平均増分応力ひずみ関係に対して, 母材の体積比率をゼロとする ($f_1 + f_2 = 1$) ことを考える. 母材が存在しないことで, 2 相複合材料は介在物のみで構成された物になってしまう. しかし, この手法は存在しないはずの母材 (架空母材) の材料定数や形状を様々に変えることによって, 弾性の範囲では既往の平均化手法の一般化が可能である. 例えば架空母材の材料定数が 2 相複合材料を構成する実材料と等しいすなわち $C_M = C_1$ または $C_M = C_2$ とすることで材料 1 または材料 2 を実母材とみなした 2 相森・田中平均が得られる.

(2) 逐次計算による架空母材の採用方法

弾塑性の範囲での架空母材の選択方法の一つとして逐次計算手法を提案する. 逐次計算の 1 回目で $C_M^{(1)} = C_1$ として接線弾塑性係数コンプライアンス $D^{eq(1)}$ を求め (弾塑性の範囲では 2 相森・田中平均に一致しない), 逐次計算の 2 回目として, 今求められた $D^{eq(1)}$ を架空母材 $C_M^{(2)}$ として採用し接線弾塑性係数コンプライアンス $D^{eq(2)}$ を求める. このように架空母材の材料定数を随時, 今求められたに更新しながら ($C_M^{(k+1)} = (D^{eq(k)})^{-1}$) 逐次計算を行うと, 逐次計算により得られる予測値は

何らかの値に収束する. 等方弾性の範囲では逐次計算による予測値は Hill の self-consistent 解⁴⁾ に一致する.

(3) $D^{eq(k)}$ の等方性近似

弾塑性体の場合の逐次計算に際して, Eshelby の解を用いるために塑性変形に伴う異方性を持つ $D^{eq(k)}$ をそのまま架空母材として採用せずに等方弾性に近似を行った ($D^{eq(k)}$)^{iso} を定義してから架空母材として採用した. 異方剛性を等方弾性に近似を行うのには物理的な意義を見出しにくい, 本手法ではこの近似による影響が逐次計算によって緩和されることを期待している. ここでは異方剛性の材料定数テンソル C^{ani} を等方弾性の材料定数テンソル C^{iso} に近似する (体積弾性率 κ , せん断弾性率 μ を決定する) 手法として, 最小二乗法を用いた手法と材料定数テンソルの固有値を用いた手法の二種類を提案する.

まず最小二乗法を用いた手法では, C^{ani} の各成分と C^{iso} の各成分の差についての二乗和

$$\Pi \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left\{ \left(\bar{C}_{ijkl}^{(k)} \right)^{ani} - \left(\bar{C}_{ijkl}^{(k)} \right)^{iso} \right\}^2 \quad (7)$$

を最小にするように体積弾性率 κ , せん断弾性率 μ を決定する. Π は体積弾性率 κ , せん断弾性率 μ の二次形式になっているので以下の式を満たせばよい.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = 0 \quad (8a, b)$$

次に材料定数テンソルの固有値を用いた手法では, 文献⁶⁾の手法によって材料定数テンソルの固有値を導出し, 材料定数テンソルの固有値 Λ は対応する固有テンソル E が体積変形を伴うかどうか, すなわち $\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E}) \neq 0$ または $\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E}) = 0$ となるかによって 2 種類に分類する. この時, 2 種類に分類した C^{ani} と C^{iso} の固有値差を最小にするように体積弾性率 κ , せん断弾性率 μ を決定する. 異方剛性の材料定数テンソル C^{ani} の固有値 Λ^{ani} を求め 2 種類に分類したそれぞれの固有値の平均を

$$\bar{\Lambda}_D^{ani} \equiv \frac{\sum \Lambda_D^{ani}}{n_D}, \quad \bar{\Lambda}_I^{ani} \equiv \frac{\sum \Lambda_I^{ani}}{n_I} \quad (9a, b)$$

と定義する. 例えば横等方の材料定数テンソル C^{ani} の固有値 Λ^{ani} を求めると体積変形を伴う固有値が 2 つ, 体積変形を伴わない固有値が 4 つ存在し, その平均は

$$\bar{\Lambda}_D^{ani} = \frac{\Lambda_1^{ani} + \Lambda_2^{ani}}{2}, \quad \bar{\Lambda}_I^{ani} = \frac{\Lambda_3^{ani} + \Lambda_4^{ani} + \Lambda_5^{ani} + \Lambda_6^{ani}}{4} \quad (10a, b)$$

となる. $\bar{\Lambda}_D^{ani} = \bar{\Lambda}_D^{iso}$, $\bar{\Lambda}_I^{ani} = \bar{\Lambda}_I^{iso}$ を満たすように体積弾性率 κ , せん断弾性率 μ を決定する.

4. 計算例と実験値との比較

(1) 弾性域での例

提案手法の特性を明らかにするために, まずは弾性の範囲での例を示す. 2 相複合材料を構成する介在物 1, 2

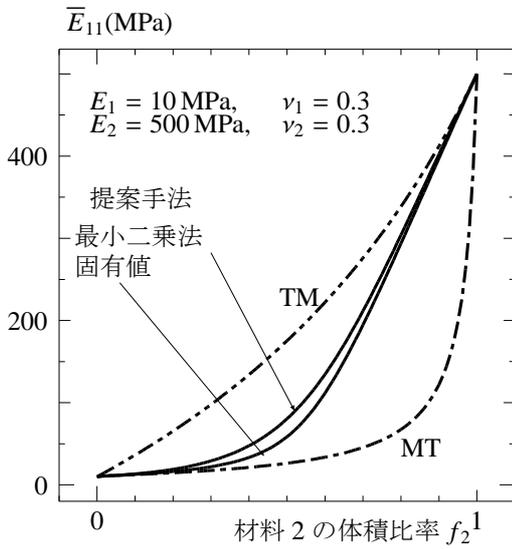


図-1 x_1 方向ヤング率の変化

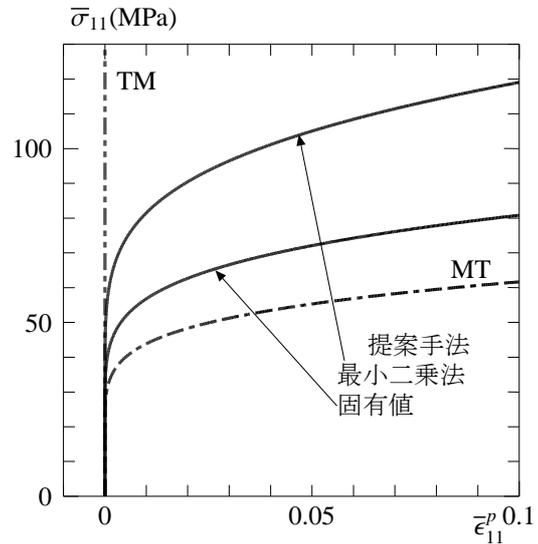


図-3 x_1 方向引張時の平均応力塑性ひずみ関係

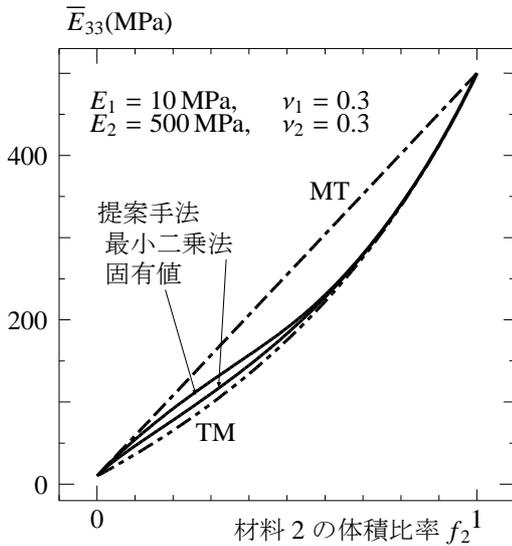


図-2 x_3 方向ヤング率の変化

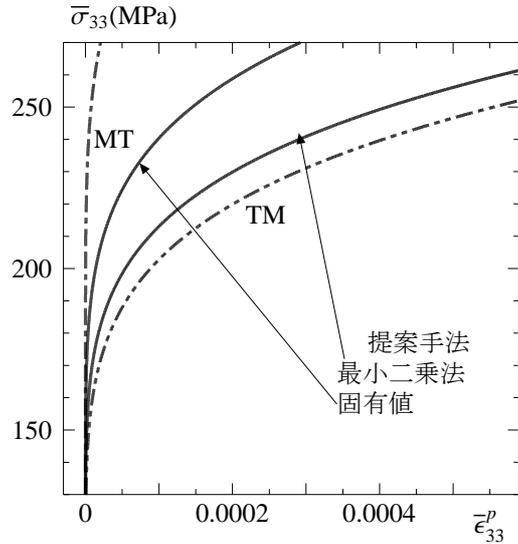


図-4 x_3 方向引張時の平均応力塑性ひずみ関係

について、材料2を繊維補強材として x_3 方向に無限に長い円柱形在物、材料1を実母材として母材は等方弾性であるべきなのでその形状は球形とした。また、どちらの材料も等方弾性体であると、その材料定数を材料1はヤング率 $E_1 = 10 \text{ MPa}$ 、ポアソン比 $\nu_1 = 0.3$ 、材料2はヤング率 $E_2 = 500 \text{ MPa}$ 、ポアソン比 $\nu_2 = 0.3$ とした。この2相複合材料の平均弾性を求める。

提案手法において最小二乗法を用いた手法、固有値を用いた手法ともに10回程度の逐次計算で予測値は収束する。この時、得られる平均ヤング率 $\bar{E}_{11}, \bar{E}_{33}$ を図-1、図-2に示す。提案手法による予測値は材料1を母材とみなした時の2相森・田中平均(MT)、材料2を母材とみなした時の2相森・田中平均(TM)が成す上下界の中間の値となり、材料1の体積比率が大きい時にはMTに近い値、材料2の体積比率が大きい時にはTMに近い値となっている。この特徴は等方弾性におけるself-consistent解の特徴と一致している。図-2においてこの特徴は固有値を用いた手法の方が顕著になっておりこちらの等方近似手法がよりself-consistent解的であ

る。また、一つの興味深い傾向として図-1と図-2では各平均化手法による予測値の大小関係が完全に入れ替わっている。この時、 E_{33} の予測値が剛である予測手法ほど繊維形状の影響が大きいといえる。

(2) 平均弾塑性挙動予測の例

弾性の範囲での計算例と同じヤング率、ポアソン比、同じ形状である材料1,2で構成される2相複合材料について、材料1のみが降伏すると考え、その塑性パラメータを $\sigma_1^Y = 10 \text{ MPa}$ 、 $h_1 = 50 \text{ MPa}$ 、 $n_1 = 0.2$ とした。また、材料2は弾性体であるとする。繊維方向(x_3 方向)と直行する方向(x_1 方向)に一軸引張を加えた時の単軸応力塑性ひずみ関係を図-3に示す。また繊維方向(x_3 方向)に一軸引張を加えた時の単軸応力塑性ひずみ関係を図-4に示す。提案手法は弾塑性の範囲でも材料1を母材とみなした時の2相森・田中平均(MT)、材料2を母材とみなした時の2相森・田中平均(TM)の中間の値を予測できている。また、最小二乗法を用いた手法による予測値がTMに近く、固有値を用いた手法による予測値がMTに近くなっている。この傾向は

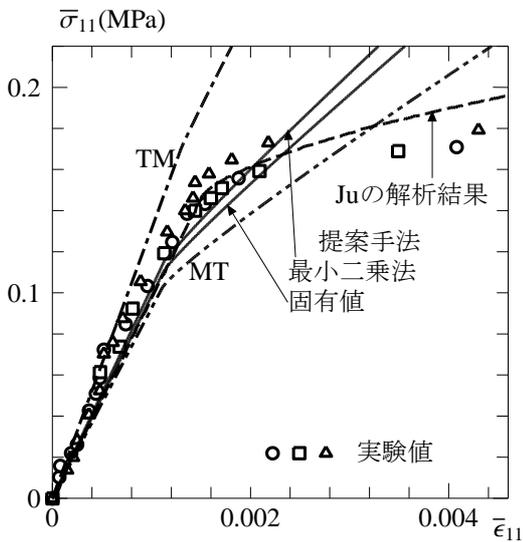


図-5 アルミニウム・ボロン複合材の平均応力ひずみ関係

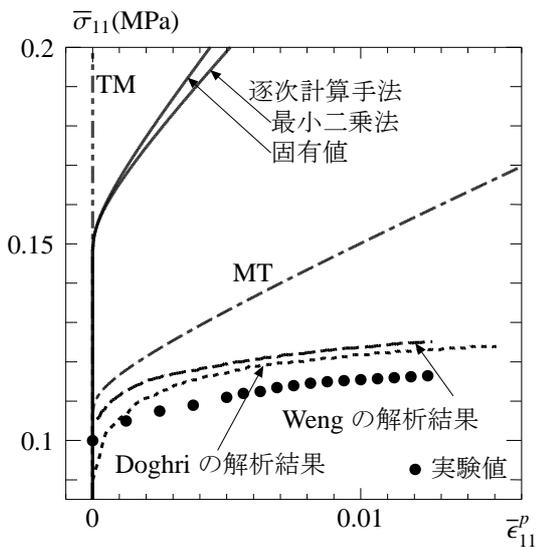


図-6 エポキシ・シリカ複合材の平均応力塑性ひずみ関係

弾性の範囲での計算結果でも同様である。

(3) アルミニウム・ボロン複合材の実験値との比較

ボロン繊維で補強したアルミニウム 2024Al について、母材であるアルミニウムのヤング率を $E_1 = 55.85$ (MPa), ポアソン比を $\nu_1 = 0.32$, その形状を球形とする。また、繊維補強材であるボロンのヤング率を $E_2 = 379.23$ (MPa), ポアソン比を $\nu_2 = 0.2$, その形状を x_3 方向に無限に長い円柱形状とする。アルミニウムのみが降伏すると考え、その塑性パラメータを $\sigma_1^Y = 79.29$ MPa, $h_1 = 827.4$ MPa, $n_1 = 0.6$ とした。この 2 相複合材料に対して一軸引張試験の解析を行い、実験値および他の解析結果と比較する。ボロンの体積比率 $f_2 = 0.34$ の時に x_1 方向に引張を与えた時の複合材の単軸応力ひずみ関係を図-5 に示す。提案手法による予測値は弾性域では実験値よりもやや小さい剛性となっているが、よく実験値を表しているといえる。降伏点に関しては実験値に対して若干低めの予測になっているが実験値のぶれの範囲には収まっている。降伏後の平均応力ひずみ関係の傾きに関してはおおむね良好に実験

値を表せている。

(4) エポキシ・シリカ複合材の実験値との比較

母材であるエポキシの $E_1 = 3.16$ (MPa), ポアソン比を $\nu_1 = 0.35$, その形状を球形とする。また、繊維補強材であるボロンのヤング率を $E_2 = 73.1$ (MPa), ポアソン比を $\nu_2 = 0.18$, その形状を球状とする。この 2 材料の剛性比は $E_2/E_1 = 23.1$ となりアルミニウム・ボロン複合材に対して 3 倍以上の剛性比となっている。エポキシのみが降伏すると考え、その塑性パラメータを $\sigma_1^Y = 75.86$ MPa, $h_1 = 32.18$ MPa, $n_1 = 0.26$ とした。この 2 相複合材料に対して一軸引張試験の解析を行い、実験値および他の解析結果と比較する。エポキシの体積比率 $f_2 = 0.35$ の時に x_1 方向に引張を与えた時の複合材の単軸応力塑性ひずみ関係を図-6 に示す。提案手法による予測値は森・田中平均の中間値となっているが、実験値や他の解析結果と大きく離れてしまっている。森・田中平均の下限でさえ他の解析解と比べ非常に剛な予測値となっており、提案手法は森・田中平均の中間値を予測するので、総剛性比の大きな材料の平均弾塑性挙動を精度よく予測することは難しい。

5. 結論

2 相複合材料に対して架空母材を導入した森・田中理論による平均化手法を、等方性近似と逐次計算を用いた手法により弾塑性体のような異方剛性の範囲に拡張する手法を提案した。本手法により繊維補強型複合材料の平均弾性および平均弾塑性挙動予測を行い、実験値との比較を通してその特性を検討した。その結果として以下のような知見を得た。

- 提案手法による平均異方弾性の予測値は 2 相森・田中平均による上下界内に収まり、その予測値は self-consistent 解と同じ傾向を持つ。
- 同様に提案手法による平均弾塑性挙動の予測値も 2 相森・田中平均による上下界内に存在し、その剛性の大小関係は、弾性域における一軸引張を与えた方向のヤング率比の大小関係と一致する。

参考文献

- 1) Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973
- 2) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 3) 小山茂, 岩熊哲夫, 岩崎智明, 小倉崇生, 三井康司: 複合材料と多結晶体の平均的性質, 土木学会論文集, No. 661/I-53, pp.265-272, 2000.
- 4) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- 5) Hill, R.: Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech Phys. Solids*, Vol.13, pp89-101, 1965
- 6) Mehrabadi, Morteza M. and Stephen C. Cowin.: Eigentensors of linear anisotropic elastic materials, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.43.1, pp.15-41, 1990.

(2016 年 2 月 2 日 提出)