複合材料の平均異方弾性の近似的 self-consistent 予測

An approximate self-consistent estimate of anisotropic elasticity of composites

新井晃朋*

Akitomo ARAI

*構造強度学研究室(指導教員:岩熊哲夫 教授)

複合材料の平均弾性を解析的に求めるための比較的容易な手法に森・田中平均があるが、それは Hashin-Shtrikman の上下界と関連がある. 一方, Hill の self-consistent 平均は幾つかの既存の上下界の 平均に相当すると考えられ、しかも非均質体の比率に依らず適切な解の一つと捉えられる. これに対 し、等方複合材料の場合に仮想母材を導入した3相森・田中平均によっても、self-consistent 平均を求 めることができることを踏まえ、異方複合材料の近似的な self-consistent 予測を試みた. 唯一な予測解は 得られないが、狭い範囲で self-consistent 平均が求められることを示し、その特性について考察した. *Key Words: composites, anisotropic elasticity, self-consistent method, Mori-Tanaka average*

1. まえがき

土木分野においても、繊維補強材料などの複合材料は 軽量で高強度・高耐食性等の特徴をもつことから、歩道 橋等への適用が具体化してきている.しかし、構造設計 においてコンクリートのように材料設計が容易には行え ない.ここではそのための解析的手法の提案を試みる. 等方複合材料の場合は、仮想母材を用いた3相森・田中 平均で Hill の self-consistent 予測が行えるので、これを 拡張して異方複合材料の平均弾性を解析的に予測する方 法を検討する.

2. 異方複合材料の3相森・田中平均

(1) 3 相森·田中平均

仮想母材という概念を導入した3相森・田中平均による2相体の平均弾性テンソル *C* は

$$\overline{C} = AB^{-1} \tag{1}$$

となる¹⁾. ここに4階のテンソルは

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{C}_{\text{VM}} \left[\boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{2} f_i \left(\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I} \right) \right]$$
$$\{\boldsymbol{C}_{\text{VM}} - \left(\boldsymbol{C}_{\text{VM}} - \boldsymbol{C}_i \right) : \boldsymbol{S}_i \}^{-1} \left(\boldsymbol{C}_{\text{VM}} - \boldsymbol{C}_i \right) \right] \quad (2a)$$
$$\boldsymbol{B} \equiv \left[\boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{2} f_i \boldsymbol{S}_i \right]$$

$$\{C_{\rm VM} - (C_{\rm VM} - C_i)S_i\}^{-1}(C_{\rm VM} - C_i)\}$$
(2b)

で定義される. f_i は2相の体積比率で $f_1 + f_2 = 1$ であり、 C_{VM} は体積が零の仮想母材の弾性テンソル である. C_1, C_2 は実母材と非均質体の弾性テンソル, S_1, S_2 は実母材と非均質体の仮想母材に対する Eshelby テンソルであり、Iは単位テンソルである.

平均が等方性を有する複合材料の場合、まず仮想母材 $C_{\rm VM}$ にある適当な剛性を仮定して平均剛性 \overline{C} を求め、そ の平均剛性 \overline{C} を再度仮想母材の剛性 C_{VM} に用いて,平 均剛性を計算するといった解析を繰り返すと、その逐次 計算は収束して self-consistent 平均に一致する.

(2) 異方複合材料への適用

同じ逐次計算法を用いて異方性を有する複合材料の 平均剛性を求めようとすると、最初のステップで得られ る \overline{C} がすでに異方性を有し、直接仮想母材の剛性に用い ると実母材と非均質体の Eshelby テンソルは定数になら ず、解析的な予測が不可能になる.しかし、 C_{VM} は任意 でいいことから、 \overline{C} を何らかの規準で等方剛性 \overline{C}_{iso} に 近似して、これを用いた繰り返し計算で \overline{C} を求めること を考えた.ただし、近似する方法により収束解が異なる ことが十分考えられるため、近似の等方剛性を求める手 法を複数用いる.

3. 異方平均剛性 \overline{C} の近似法

異方剛性 \overline{c}^{aniso} を等方剛性 \overline{c}^{iso} で近似する方法を3種類以下に示す.

(1) 行列成分の最小二乗近似 (LS)

異方剛性と等方剛性の要素の差の最小二乗法.

$$D \equiv \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \left(\overline{C}_{ij}^{\text{aniso}} - \overline{C}_{ij}^{\text{iso}} \right)^2 \to \text{min.}$$
(3)

(2) 剛性差の行列式の最小化 (DET)

異方剛性と等方剛性の差の行列式の最小化.

$$D \equiv \det \left| \overline{C}_{ij}^{\text{aniso}} - \overline{C}_{ij}^{\text{iso}} \right| \to \min.$$
 (4)

(3) 剛性行列の固有値の最小二乗近似 (EIGEN)

 \overline{C}^{aniso} の六つの固有値 $3\overline{\kappa}^{aniso}$, $2\overline{\mu}_i^{aniso}$ ($i = 1, \dots, 5$) 同士 の差の最小二乗法.

$$\overline{\mu}^{\text{iso}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \mu_i^{\text{aniso}}, \quad \overline{\kappa}^{\text{iso}} = \overline{\kappa}^{\text{aniso}}$$
 (5a, b)

表-1 材料パラメータ

	実際の母材		非均質体	
モテル	$E_{\rm M}$ (GN/m ²)	$\nu_{\rm M}$	$E_{\rm I}$ (GN/m ²)	$\nu_{\rm I}$
CFRP	2.81	0.274	223.0	0.352
GFRP±45	2.81	0.274	71.2	0.205

4. 結果

解析で対象とする1方向のみに炭素繊維を並べた CFRPと, x_1 軸から±45度の2方向にガラス繊維を並 べたGFRP±45の材料定数を表-1に示す.また,最初 のステップの仮想母材として実母材を用いる場合(図中 MT)と非均質体を用いる場合(図中 MT⁻¹)のこの収束 解同士も比較する.図-1はCFRPの非均質体の体積比 率fと繊維に直交する方向の平均Young率 $\overline{E}_2 = \overline{E}_3$ の 関係で,最初のステップで用いる仮想母材によらず,三 種類の近似による解はそれぞれ収束した.ここで図中の LS等の記号は前節タイトルに示した記号を参照してい る.図-2はGFRP±45の x_1, x_2 方向の平均Young率で あり,この材料についても最初の仮想母材によらず,三 種類の近似による解はそれぞれ収束した.

次に母材と非均質体の剛性比の大きさによる収束解への影響を考える. 図-3 は CFRP の非均質体の Young 率だけを 100 倍にしたときの三種類の近似による解である. この場合でも三種類の近似による解はそれぞれ収束した. しかし図-1 と比べると, LS と EIGEN とによる解の差異が大きくなった. ただし全ての収束解が,小さい f で森・田中平均に,大きい f で逆の森・田中平均に漸近し,これは self-consistent 解が持つ特徴に一致する.

そこでそのときの,三種類の近似による解が収束す るまでに要する計算回数とfの関係を図-4に示した. EIGEN の場合は小さいfで収束が速く,場の乱れの相 互作用が大きいf = 0.5付近で遅いのは,力学的には もっともらしい.他の方法ではfに依らず 20回以内に 収束した.ただこれだけでは,方法の精度としての優 劣は判断できなかった.しかしながら三つの予測値の幅 は,上下界に相当する二種類の森・田中平均の幅に比べ るとかなり狭く,工学的には平均剛性の中間値として解 釈できるかもしれない.

5. まとめ

本論文では仮想母材を用いた3相森・田中平均の逐次 代入法を用いて,異方複合材料の平均弾性の3種類の近 似解を求めた.逐次計算の最初に用いる仮想母材の剛性 には依らない収束解が得られるが,3つの近似毎に収束 解は異なる.いずれも近似解であるが,この程度の狭い 範囲で近似 self-consistent 解を求めることができた.



参考文献

1) 片野俊一, 斉木功, 小山茂, 岩熊哲夫: ハイブリッド複合材 料のはく離を考慮した有限要素の開発, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.12, pp.299-310, 2009.

(2015年2月10日提出)