

増分弾塑性構成則に用いる亜弾性の 応力速度の特性と変形の局所化

構造強度学研究室

荒川 淳平

2014/02/12

亜弾性の記述と応力速度の客観性について

亜弾性モデルの一般的な表現

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}(\sigma) : \underline{\underline{d}}$$

- Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{\sigma}$
 - ⇒ 物体と一緒に回転している座標から応力変化を観察する尺度
- Jaumann 速度は広く用いられている一方，問題点を有している
 - ⇒ この問題を回避する目的でスピンの改良を行った研究もある

しかしこれらの応力速度は，弾性変形は無視してスピンの影響を考慮しているだけに過ぎない

スピン以外の影響も考慮した応力速度

例) ゴムは座屈前に伸縮する

⇒ つまり, **材料の伸縮による変化**等を考慮した方が良いのでは?

1. 物体と一緒に回転しながら, **材料の伸縮**と**体積変化**を伴った座標から応力変化を観察する尺度

- Truesdell 速度: 第2 Piola-Kirchhoff 応力増分の updated Lagrange 的な速度

2. 物体と一緒に回転しながら, **材料の伸縮による変化**を伴った座標から応力変化を観察する尺度

- Oldroyd 速度
- convected 速度

応力速度の比較を行うために考慮する問題

増分弾塑性構成則を用いた変形の局所化解析

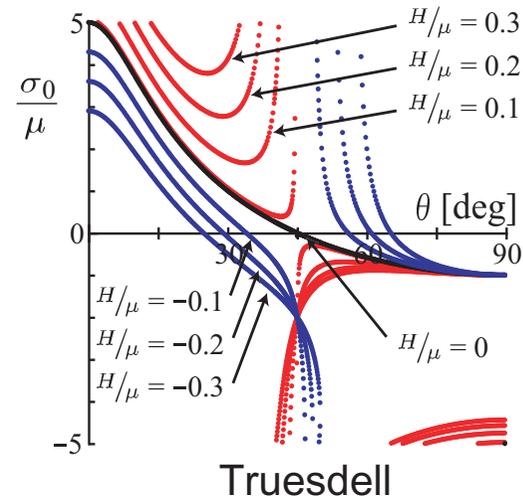
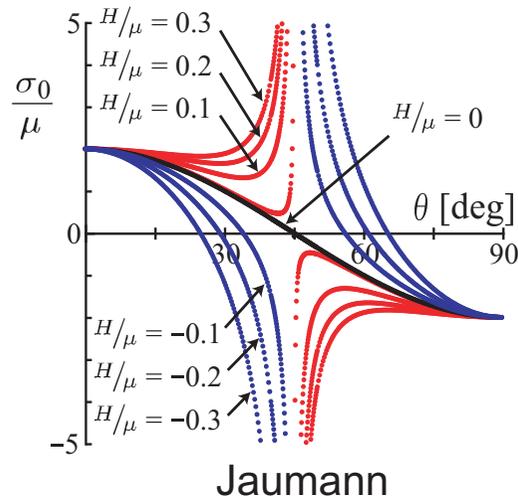
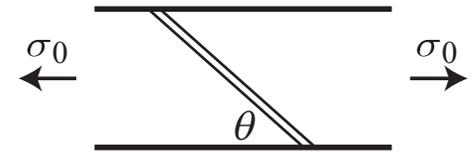
- 解析的な解が得られる長所がある
- 応力速度の選択が少なからず影響することが分かっている

本研究の目的

- Jaumann 速度を用いた場合の局所化結果との比較から、各応力速度の特性を整理する
- 構成則に用いるのに適した応力速度を選択する提案を行う

塑性的平面ひずみの場合

一軸状態一様場における局所化条件を満足する解

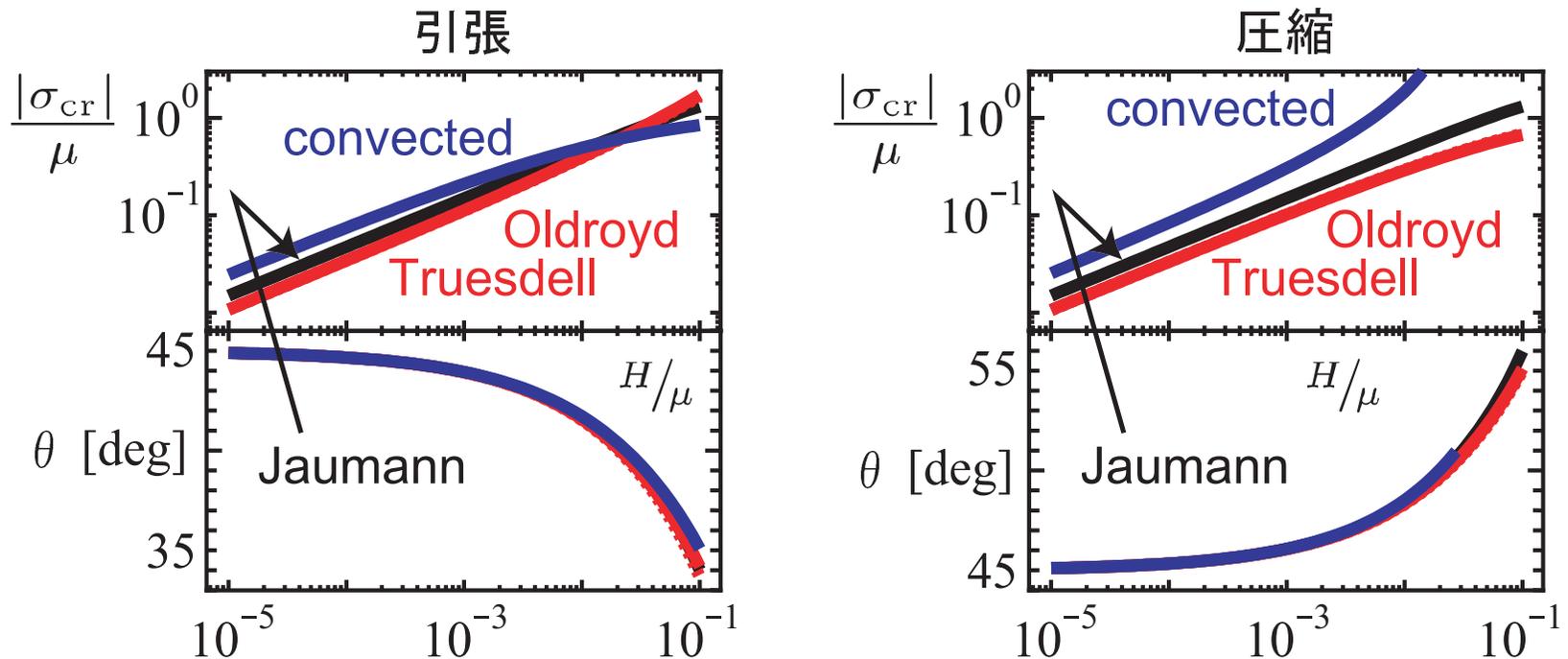


解の判別を行った結果，用いる応力速度に関係無く，

- $H/\mu \leq 0$ （ピーク応力後）では，任意の応力解が存在する
⇒ どんな応力状態でも局所化が発生し得る
- $H/\mu > 0$ （ピーク応力前）では，**特定の応力解**が存在する
⇒ ある応力レベルまでは局所化は発生しない

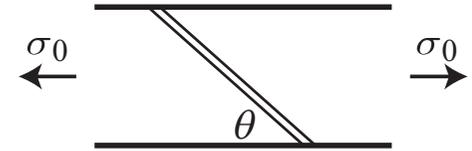
ピーク応力前（硬化域）における局所化予測

局所化応力 σ_{cr} : 局所化条件を満足する応力解の最小値

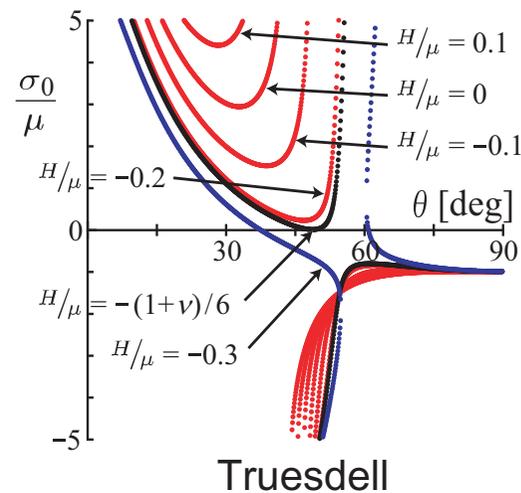
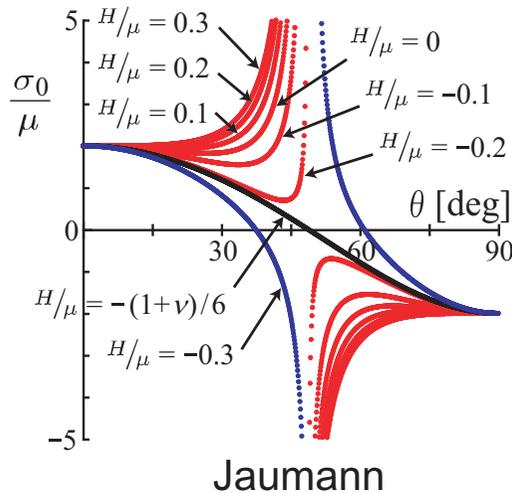


- **Truesdell 速度**と**Oldroyd 速度**を用いた場合，Jaumann 速度に比べてやや低目の局所化応力を予測できた
- せん断帯角度の予測はほとんど変わらない

軸対称応力状態の場合



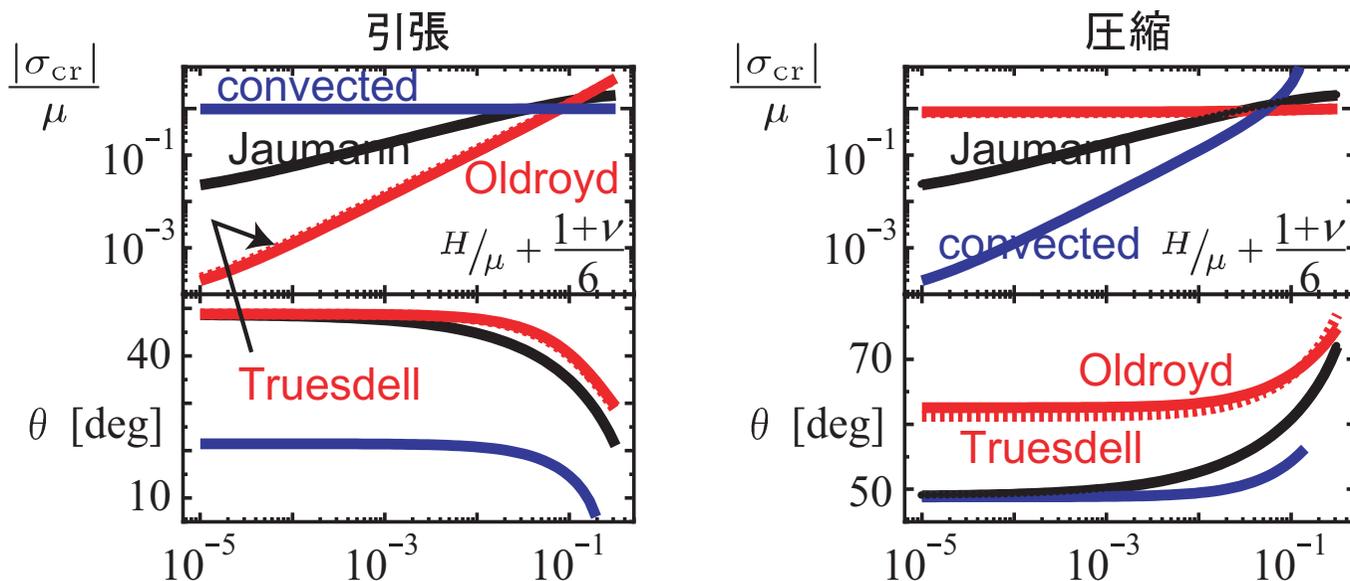
局所化条件を満足する解（一軸応力状態の例）



解の判別を行った結果，用いる応力速度に関係無く，

- $H/\mu \leq -\frac{1+\nu}{6}$ （限界状態後）では，任意の応力解が存在する
 \Rightarrow どんな応力状態でも局所化が発生し得る
- $H/\mu > -\frac{1+\nu}{6}$ （限界状態前）では，**特定の応力解**が存在する
 \Rightarrow ある応力レベルまでは局所化は発生しない

限界状態前における局所化予測



⇒ **Truesdell 速度**と**Oldroyd 速度**は引張の場合のみ良好な結果を示す

例) せん断応力増分の違い

$$\left(\begin{array}{l} \text{Jaumann 速度の場合: } \dot{\sigma}_{12}^{(J)} = 2\mu d_{12} - \sigma_0 w_{12} \\ \text{Truesdell 速度の場合: } \dot{\sigma}_{12}^{(T)} = (2\mu + \sigma_0) d_{12} - \sigma_0 w_{12} \end{array} \right.$$

⇒ 引張 ($\sigma_0 > 0$) か圧縮 ($\sigma_0 < 0$) でせん断剛性が変化する

材料の伸縮および体積変化を表す項の影響

材料の伸縮および体積変化の影響を考慮した応力速度を用いた場合

⇒ 良好な局所化結果が示された

- 材料の伸縮による変化を表す項: $d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}$
- 体積変化を表す項: $d_{kk}\sigma_{ij}$

これらの実数倍を Jaumann 速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$ に追加 ⇒ 客観性を有する

$$\overset{\star}{\sigma}_{ij} \equiv \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} - n_1 \left(d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki} \right) - n_2 d_{kk}\sigma_{ij}$$

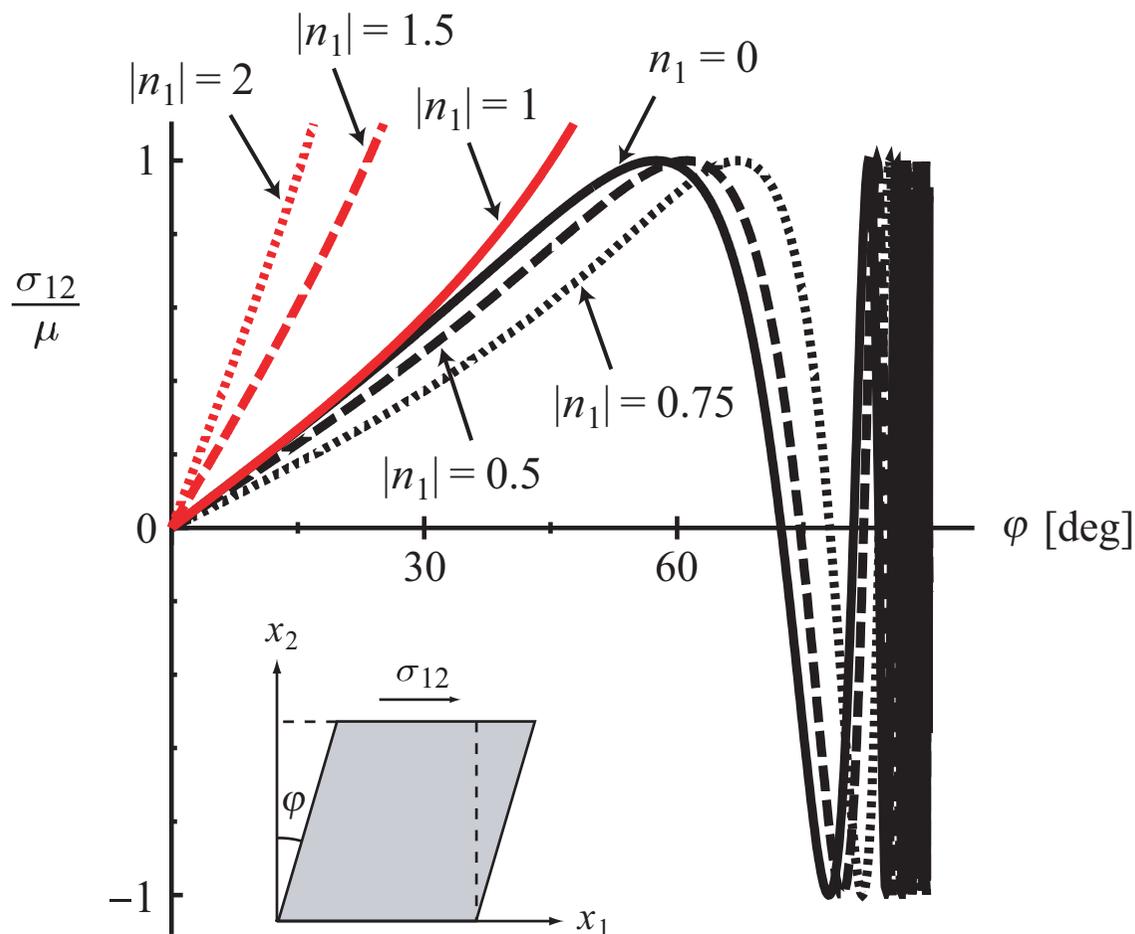
例) $n_1 = 1, n_2 = -1$ の場合, $\overset{\star}{\sigma}$ は Truesdell 速度になる

$n_1 = 1, n_2 = 0$ の場合, $\overset{\star}{\sigma}$ は Oldroyd 速度になる

$n_1 = -1, n_2 = 0$ の場合, $\overset{\star}{\sigma}$ は convected 速度になる

亜弾性体モデルの単純せん断応答

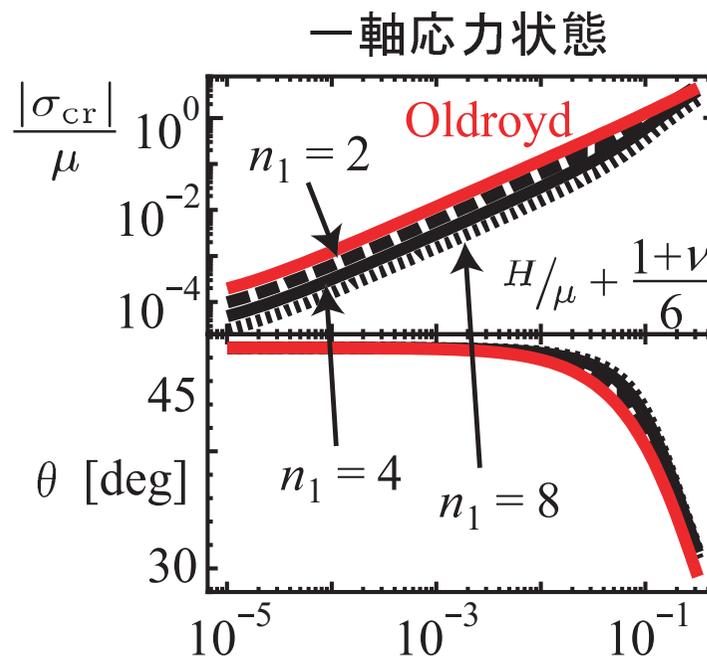
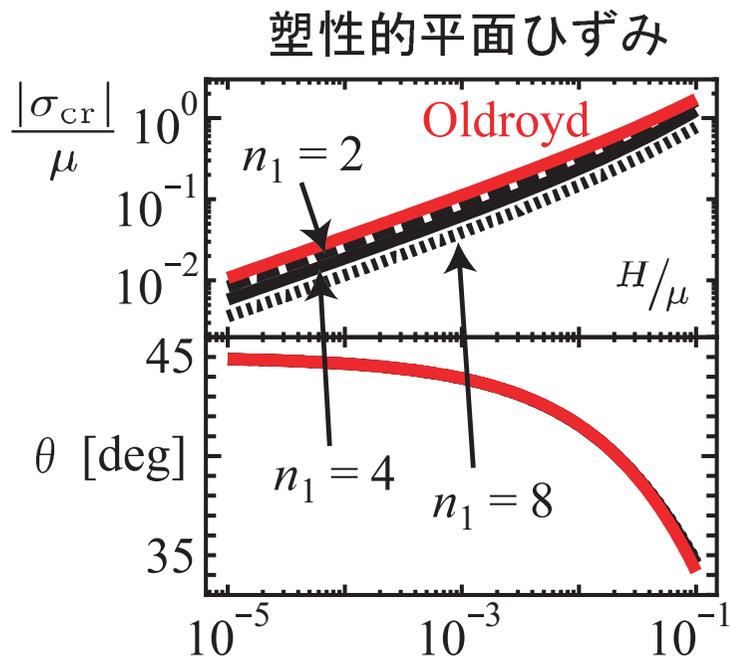
$$\star \bar{\sigma}_{ij} \equiv \bar{\sigma}_{ij} - n_1 (d_{ik} \sigma_{kj} + d_{jk} \sigma_{ki}) - n_2 d_{kk} \sigma_{ij}$$



- $|n_1| < 1$ の場合振動応答を示す
- $|n_1|$ の増大に伴い非線形挙動が顕著になる
- $d_{kk} = 0$ となるため, n_2 の影響は無くなる

材料の伸縮による変化を表す項の影響（引張の場合）

$$\star \sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij} - n_1 \left(d_{ik} \sigma_{kj} + d_{jk} \sigma_{ki} \right) - n_2 d_{kk} \sigma_{ij}$$

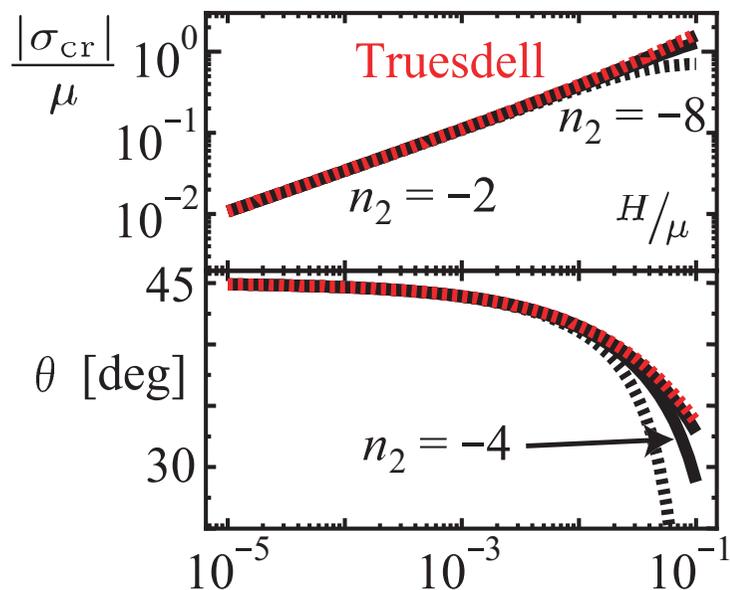


- 応力項に掛かる係数 n_1 を増大（材料の伸縮による変化の影響を大きく評価）すると局所化応力レベルは低くなる
- 一方，せん断帯角度の予測に対する影響は小さい

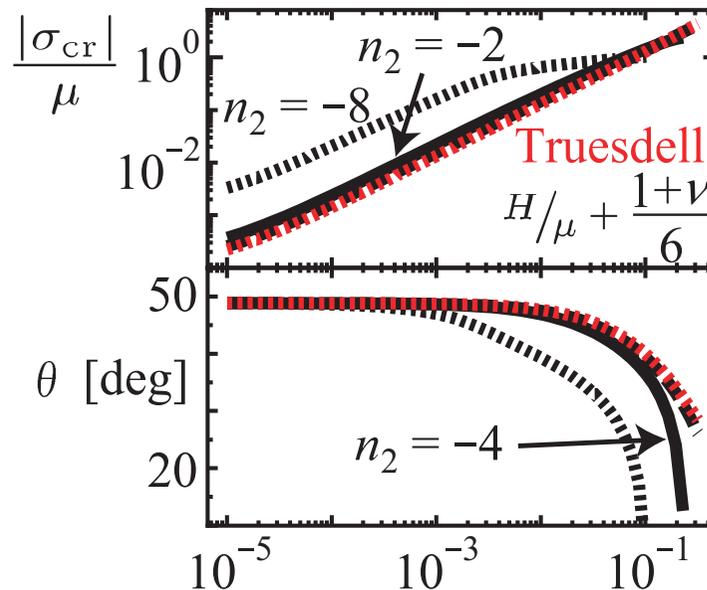
体積変化を表す項の影響（引張の場合）

$$\star \sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij} - n_1 (d_{ik} \sigma_{kj} + d_{jk} \sigma_{ki}) - n_2 \underline{d_{kk} \sigma_{ij}}$$

塑性的平面ひずみ



一軸応力状態



- 局所化応力の予測に対する影響は小さい
 ⇒ 係数 n_2 はせん断応力増分成分には含まれないため
- 一方，せん断帯角度の予測に対する影響はやや大きくなる

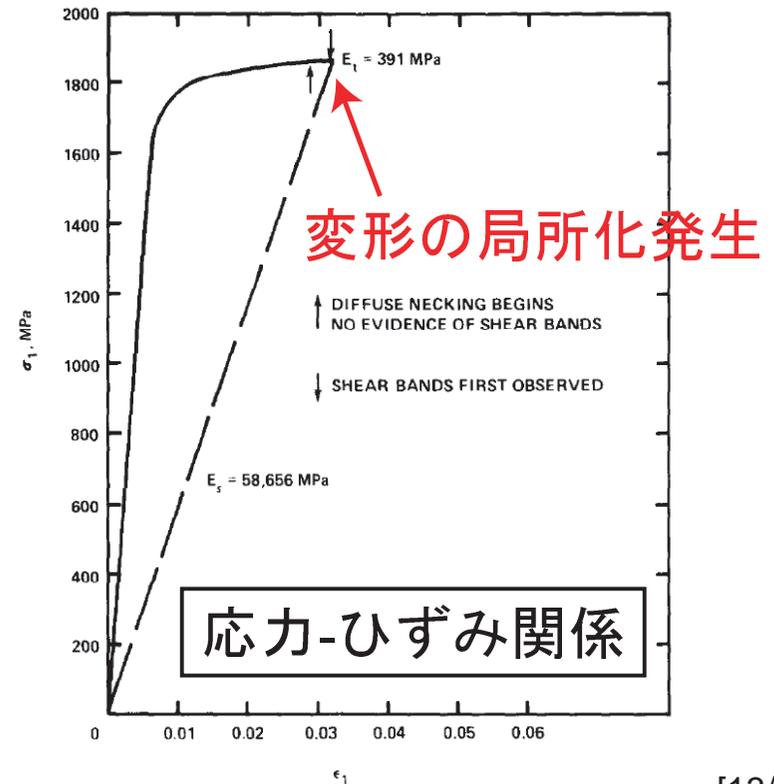
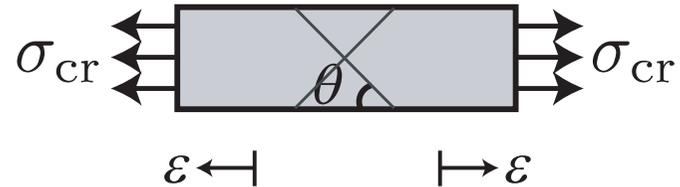
- 塑性的平面ひずみ状態と軸対称応力状態において、**Truesdell 速度**と **Oldroyd 速度**を用いた場合の引張の局所化結果が Jaumann 速度のそれよりも良好な結果を示した
- 応力速度の定式化において、スピンの影響だけでなく材料の伸縮による変化の影響を考慮する必要性を示した

過去の一軸試験で観察された変形の局所化

Anand *et al.* (1980) によるマレージング鋼 (Young 率: 207 GN/m^2 ,
Poisson 比: 0.3) の一軸引張試験

軸ひずみ ε の増加に伴い,

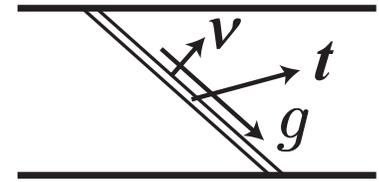
- $\varepsilon = 0.032$ で変形の局所化発生
- $\varepsilon = 0.17$ で破断



実験から,

(局所化応力値: $\sigma_{cr}/\mu \approx 0.025$
せん断帯角度: $\theta \approx 38^\circ$

が得られた



1. 不連続面をまたいだ表面力の連続条件

$$\langle \dot{t} \rangle = \langle \boldsymbol{\nu}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\nu}^T \cdot \langle \dot{\boldsymbol{n}} \rangle = \mathbf{0}$$

2. nominal 応力増分の構成表現

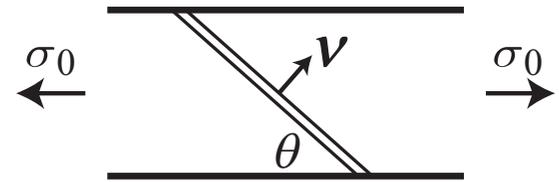
$$\dot{\boldsymbol{n}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \text{tr}(\boldsymbol{d}) \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}) : \nabla \boldsymbol{v}$$

以上から,

$$\left(\boldsymbol{\nu}^T \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \cdot \boldsymbol{g} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\det \left(\boldsymbol{\nu}^T \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) = 0}}$$

が成立したときに**局所化が発生**する可能性が生まれる

局所化条件から得られる解の判別



$\sigma_0 = 0$ とした場合の局所化条件式 $\det(\boldsymbol{\nu}^T \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0$ について,

1. 塑性的平面ひずみの場合

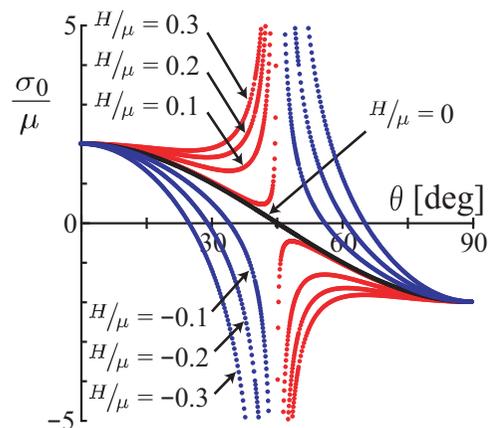
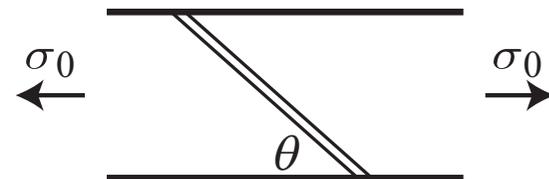
- $H/\mu \leq 0$ (ピーク応力後) \Rightarrow 実数解 θ が存在する
- $H/\mu > 0$ (ピーク応力前) \Rightarrow 実数解 θ は存在しない

2. 軸対称応力状態の場合

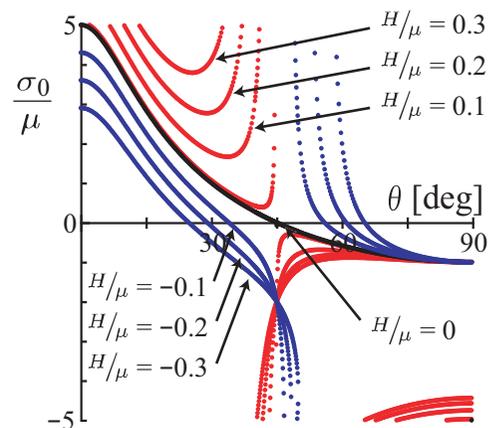
- $H/\mu \leq -\frac{1+\nu}{6}$ (限界状態後) \Rightarrow 実数解 θ が存在する
- $H/\mu > -\frac{1+\nu}{6}$ (限界状態前) \Rightarrow 実数解 θ は存在しない

局所化条件を満足する解

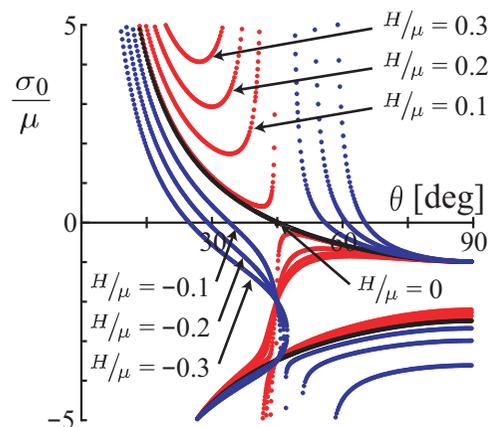
塑性的平面ひずみの場合



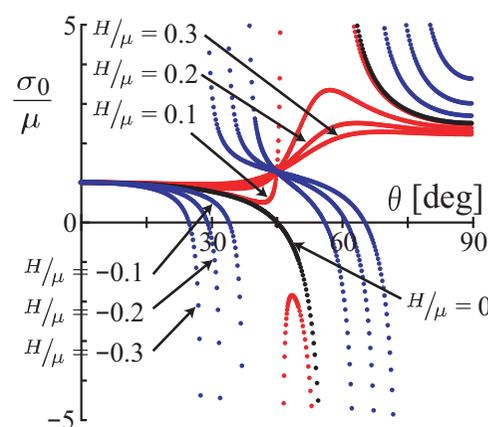
Jaumann



Truesdell



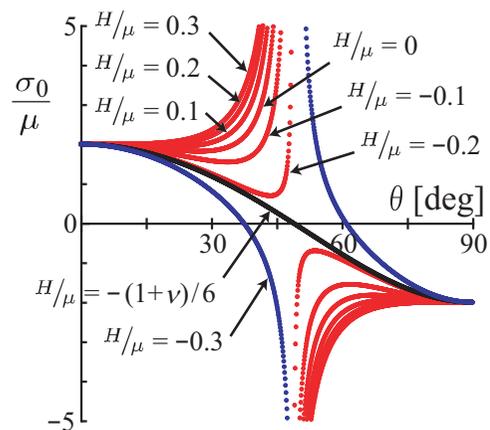
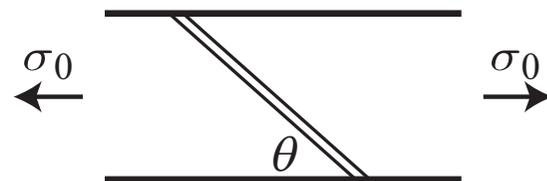
Oldroyd



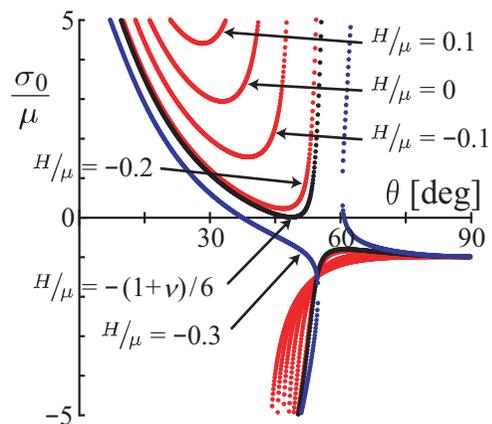
convected

局所化条件を満足する解

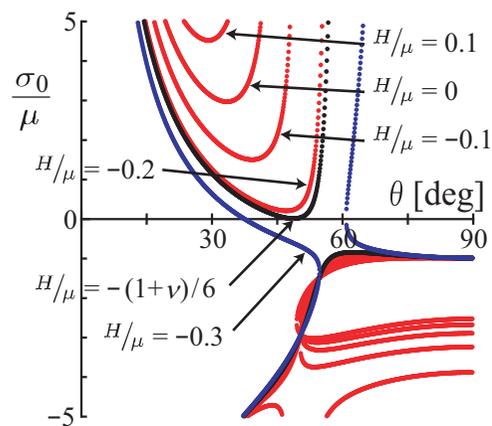
一軸応力状態の場合



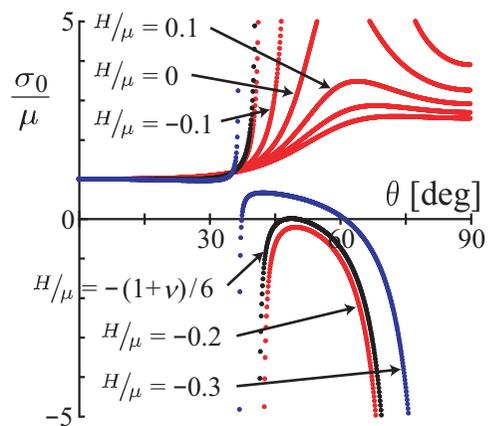
Jaumann



Truesdell



Oldroyd



convected