変形の局所化条件に基づく代表的な応力速度の特性比較

Character comparison of representative stress rate based on localization of deformation

荒川 淳平*
Junpei ARAKAWA

*構造強度学研究室（指導教員：岩熊 哲夫 教授）

増分型構成則に用いる客観的な応力速度の選択によっては巨視的な応力 - ひずみの結果だけでなく局所化予測の結果も違ってくる．そこで本研究では，各速度の持つ特徴を局所化予測から整理するという目的で，Cauchy 応力の Jaumann 速度をはじめとした客観性を有するいくつかの応力速度を構成則に用いて，平面ひずみおよび軸対称応力状態において変形局所化予測を行い，各物性パラメタが局所化に及ぼす影響や変形局所化条件に基づいた客観的な応力速度の特性を比較した．

Key Words : *localization of deformation, objective stress rate, finite deformation, FEM*

1. まえがき

局所変形に対する解析的研究の中では，増分型構成則には一般に Cauchy 応力の Jaumann 速度が用いられることが多いが，適用限界が存在する．本研究では，Jaumann 速度を含めた客観性を有する 6 種類の応力速度を用いて変形局所化予測を行い，その特徴を比較する．

2. 構成則

増分型の構成則には客観性を有する応力速度 $\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}$ を用いる必要があり，変形速度 $\boldsymbol{d}$ と

$$\overset{\star}{\sigma}_{ij} = C^{ep}_{ijkl} d_{kl} \tag{1}$$

のようにモデル化されることが多い．ここに $\boldsymbol{C}^{ep}$ は弾塑性接線係数である．この $\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}$ によく用いられるのは Jaumann 速度 $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}}$ であるが，これ以外にも客観性を有する応力速度には，Truesdell 速度 $\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}}$，Oldroyd 速度 $\overset{\sqcup}{\boldsymbol{\sigma}}$，Kirchhoff 速度 $\overset{\triangledown\mathrm{k}}{\boldsymbol{\tau}}$，Biot 速度 $\overset{\odot}{\boldsymbol{\sigma}}$，convected 速度 $\overset{\diamond}{\boldsymbol{\sigma}}$ などがある．これらは

$$\overset{\triangledown}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} \tag{2}$$

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ki} + d_{kk}\sigma_{ij} \tag{3}$$

$$\overset{\sqcup}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ki} \tag{4}$$

$$\overset{\triangledown\mathrm{k}}{\tau}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} + d_{kk}\sigma_{ij} \tag{5}$$

$$\overset{\odot}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ki} + d_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\left(d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}\right) \tag{6}$$

$$\overset{\diamond}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik}v_{k,j} + \sigma_{jk}v_{k,i} \tag{7}$$

と定義される．ここに $\boldsymbol{v}$ は速度，$\boldsymbol{w}$ はスピンである．

3. 例として用いる構成モデル

ここでは一例として非関連流れ則の Drucker-Prager によるモデル[1)]を用い，そこでは変形速度の塑性成分 $\boldsymbol{d}^p$ は非共軸性を有し，弾性成分 $\boldsymbol{d}^e$ は増分型の Hooke の法則に従うとすると

$$d^p_{ij} = \frac{1}{H}\left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\overline{\sigma}} + \beta\delta_{ij}\right)\left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\overline{\sigma}} + \alpha\delta_{kl}\right)\overset{\star}{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2h_1}\left(\overset{\star}{\sigma}{}'_{ij} - \frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{2\overline{\sigma}^2}\overset{\star}{\sigma}_{kl}\right) \tag{8}$$

$$d^e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\overset{\star}{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\kappa} - \frac{1}{2\mu}\right)\delta_{ij}\overset{\star}{\sigma}_{kk} \tag{9}$$

のように表現できる．ここに，プライムは偏差成分を表し，H は硬化係数，$\overline{\sigma}$ は相当応力，α は内部摩擦係数，β は塑性的体積膨張係数，δ_{ij} は Kronecker のデルタ，h_1 は非共軸性を代表する材料パラメタ，μ はせん断弾性係数，κ は体積弾性係数である．

4. 局所化条件

有限変形理論の枠組における局所化条件としては Hill and Hutchinson[2)] のモデルを用いるとすると，

$$\det|\nu_i F_{ijkl} \nu_l| = 0 \tag{10}$$

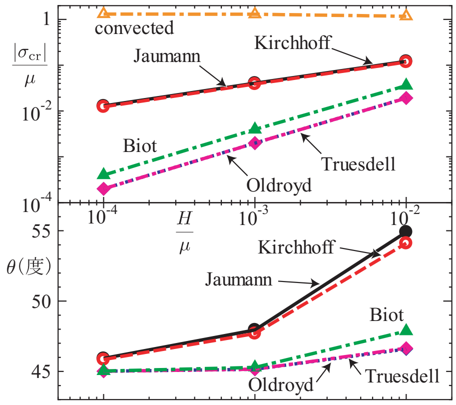
が成立したときに $\boldsymbol{\nu}$ を法線とするせん断帯の局所化が発生することになる．ここに $\boldsymbol{F}$ は，nominal 応力速度 $\dot{\boldsymbol{n}}$ と速度勾配で次式に定義した構成則の接線係数である．

$$\dot{n}_{ij} = F_{ijkl} v_{k,l} \tag{11}$$

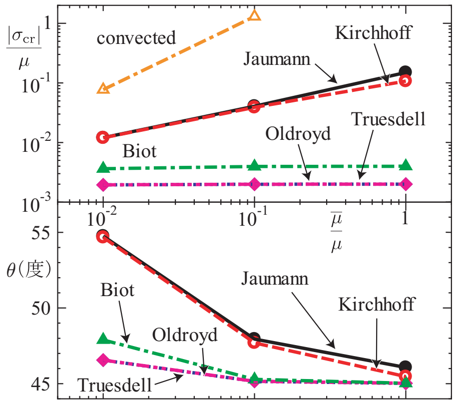
5. 解析結果

(1) 有限変形理論における解析結果

図–1 , 2 に平面ひずみ状態における圧縮の場合の硬化パラメタ $^{H}/_{\mu}$ および非共軸パラメタ $^{\overline{\mu}}/_{\mu}$ のそれぞれの影響による各応力速度の局所化予測の解析結果を示した．平面ひずみおよび軸対称応力状態において，Truesdell 速度，Oldroyd 速度，Biot 速度は圧縮のみ局所化予測が可能であるのに対し，convected 速度は引張のみ局所化予測が可能であった．局所化発生応力レベルに関しては変形速度項 $d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}$ の存在が大きく寄与し，例



図–1 圧縮時の H/μ の影響 ($\alpha = \beta = 0$, $\bar{\mu}/\mu = 0.1$)

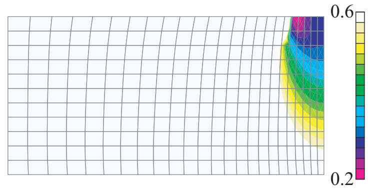


図–2 圧縮時の $\bar{\mu}/\mu$ の影響 ($\alpha = \beta = 0$, $H/\mu = 0.001$)

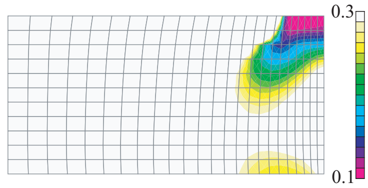
えば Jaumann 速度から変形速度項を減じた Oldroyd 速度は， Jaumann 速度に比べ引張では応力レベルが大きいのに対し圧縮では小さくなり， Jaumann 速度に変形速度項を加えた convected 速度はその逆の応答を示す．一方で，**図–1 , 2** に示すように一般的な金属材料を想定し $\alpha = \beta = 0$ とした場合は，体積膨張項 $d_{kk}\sigma_{ij}$ の影響はほとんど現れなかったため，以降では Jaumann 速度および Truesdell 速度を中心に議論を展開する．

図–1 の H/μ の影響に対しては，局所化応力レベルが大きい速度ほどその変化率は小さいがせん断帯角度変化率は大きく，局所化応力レベルが小さい速度ほどその変化率は大きいが角度変化率は小さくなることが分かる．また， H/μ の値が大きいほど局所化応力値の差は縮まるが，やはり変形速度項による影響が大きい．せん断帯角度はいずれも 45 度から離れ，ここでも変形速度項による影響が顕著である．

図–2 の $\bar{\mu}/\mu$ の影響に対しては，局所化応力レベルが大きい速度ほどその変化率と角度変化も大きく，局所化応力レベルが小さい速度ほどその変化率と角度変化も小さい．局所化応力レベルに関しては， $\bar{\mu}/\mu$ の値が大きいほど Jaumann 速度は比較的大きくなり非現実的なレベルまで達してしまう可能性があるが，せん断帯角度は先とは逆でいずれも 45 度に漸近していく傾向にある．以上より，現実的なレベルの局所化応力を得るためには材料パラメタの同定を行うことが必要である．



図–3 Jaumann 速度を用いた場合 (平面ひずみ，圧縮)



図–4 Truesdell 速度を用いた場合 (平面ひずみ，圧縮)

(2) 有限要素解析法を用いた局所化予測

図–3 , 4 に平面ひずみ状態において Jaumann 速度および Truesdell 速度を用いた場合の有限要素解析法による局所化の結果を示した．ここに例として用いたモデルの境界条件は，下端完全固定で左右端は水平方向変位が生じないよう拘束し，右上端に横幅の $1/10$ 長さで鉛直下向きに分布的に変位を与えた．これは圧縮問題として扱う．またここでは，図中の値が小さい箇所から連続的に局所化が起こることですべりが生じることを想定している．なお，図中の凡例は局所化パラメタと呼ぶこととし，白い部分は弾性域であることを示す．

図–1 , 2 では Jaumann 速度と Truesdell 速度を用いた場合の局所化応力値はひと桁程度の差があるが，**図–3 , 4** の局所化パラメタにはそれほどの差はないことが分かる．しかし，やはり Truesdell 速度の方が圧縮状態では応力値は小さかった． 2 つの図を見比べると，パラメタのオーダーは違うものの Jaumann 速度の方が Truesdell 速度に比べて明確なすべり線を予測しているのが分かる．

6. 結論

平面ひずみおよび軸対称応力状態の局所化において， Jaumann 速度と Kirchhoff 速度， また， Truesdell 速度と Oldroyd 速度における特性はそれぞれ互いに類似しており，変形速度項の存在が局所化応力レベルおよびせん断帯角度変化を決定づけることが分かった．また，現実的なレベルの局所化応力を得るためには，応力速度によっては材料パラメタに適用限界を課した上で解析を行う必要がある．

参考文献

1) Nemat-Nasser, S. and Shokooh, A.: On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solids Structures*, Vol.16, pp.495-514, 1980.

2) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.

(2012 年 2 月 14 日 提出)