網状構造の非線形マルチスケール解析

A nonlinear multi-scale analysis of reticulated structures

村上和也*
Kazuya MURAKAMI

*構造強度学研究室（研究指導教員：斉木　功　准教授）

複合材料である平面セル構造体は，微視構造の座屈や大変形による不安定化など非線形な挙動を示すことが知られている．このような平面セル構造体に対し計算効率が高い骨組要素によりモデル化したマルチスケール解析では，面内変形に限りその非線形性を考慮したマルチスケール解析手法が提案されているが, 面外変形に関してはミクロスケールでの線形解析の範囲にとどまっている．そこで本研究では面外変形を考慮したミクロスケール解析を発展させ幾何学的非線形性を考慮した解析を行なうための一般化収束論による定式化を行い，ミクロスケールでの非線形解析の例を示す.

Key Words : マルチスケール解析，平面セル構造体，一般化収束論，平板

1.　まえがき

平面セル構造体は，剛性や質量比などの観点から高機能な材料であり様々な用途に利用される．しかし，その力学的特性は，構造や荷重によって強い異方性，非線形性，座屈による不安定化などの特徴を示す．このような面内変形に対して，面内の非線形マルチスケール解析が大植ら[1)]によって行なわれた．平面セル構造体がジオテキスタイルなどに利用される場合は面内変形に加え面外変形も受ける．これに関しては，面外変形を考慮した非線形ミクロスケール解析が著者ら[2)]によって行なわれたが，平面セル構造体の面外変形に関する特性は未だ解明されていない．本報告では，平面セル構造の面外変形に関しての異方性，非線形性，座屈による不安定化などの特性を非線形ミクロスケール解析手法を用いて解析する．

2.　一般化収束論による平板の非線形２変数境界値問題の定式化

図 1 に示すような大きさ $\epsilon Y(\epsilon \ll 1)$ の平面骨組が面内に周期的に配置された構造物を解析対象とする．もとの対象領域ではこの微視構造の大きさが ϵY となる．この平面構造は，Kirchhoff の仮定に従う薄肉平板と仮定し，中立面を含む領域を Ω，その境界を $\partial\Omega$ とする．この解析対象に対し，著者ら[2)]が示した一般化収束論による面外変形に対する平板の線形 2 変数境界値問題の定式化を基礎として，面外変形を考慮した平板の非線形 2 変数境界値問題を導く．

面外たわみ w とたわみ角 $\boldsymbol{\theta}$ の関係，$\boldsymbol{\theta} = -\nabla w$ を拘束条件とし，Lagrange 未定定数法により，この拘束条件を組み込んだ汎関数 Π

$$\begin{aligned}\Pi := &\int_\Omega W^{\mathrm{m}}(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla w) + W^{\mathrm{b}}(\nabla \boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}\Omega \\ &- \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} + q w\, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{Q} \cdot (\nabla w + \boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{1}$$

を定義すると，平板の境界値問題はこの汎関数を停留させる問題となる．ここに，$\boldsymbol{f}$ は外力，$\boldsymbol{u}$ は面内変位である．$W^{\mathrm{m}}, W^{\mathrm{b}}$ はひずみエネルギ関数であり，それぞれ膜力-膜ひずみおよび曲げモーメント-曲率関係

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial W^{\mathrm{m}}}{\partial\left(\nabla \boldsymbol{u} + \frac{\nabla w \otimes \nabla w}{2}\right)} \quad \boldsymbol{M} = \frac{\partial W^{\mathrm{b}}}{\partial \nabla \boldsymbol{\theta}} \tag{2}$$

を規定するものとする．この汎関数の独立変数は ϵ, $\boldsymbol{\theta}, w, \boldsymbol{Q}$ であり，$\boldsymbol{Q}$ は未定定数である．この汎関数 Π の $\epsilon \to 0$ の極限は，一般化収束論によると均質化汎関数 Π^{H} は

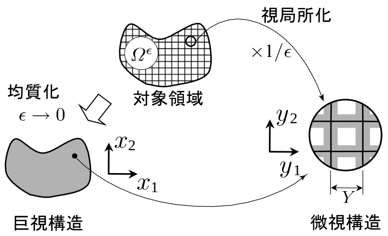
$$\begin{aligned}\Pi^{\mathrm{H}} = &\int_\Omega W^{\mathrm{m}}(\nabla_x \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y \boldsymbol{u}^1, \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1)\, \mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_\Omega W^{\mathrm{b}}(\nabla_x \boldsymbol{\theta}^0 + \nabla_y \boldsymbol{\theta}^1)\, \mathrm{d}\Omega \\ &- \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}^0 + q w^0 \mathrm{d}\Omega \\ &- \int_\Omega \boldsymbol{Q} \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 + \boldsymbol{\theta}^0)\, \mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{3}$$

となる．ここで上付きの 0 および 1 はそれぞれマクロスケール，ミクロスケールに属する物理量であることを意味する．このとき，膜ひずみ $\nabla \boldsymbol{u}$，たわみ角 ∇w，曲率 $\nabla \boldsymbol{\theta}$ は，それぞれ

$$\nabla \boldsymbol{u} \to \nabla_x \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y \boldsymbol{u}^1 \tag{4}$$

$$\nabla w \to \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 \tag{5}$$

$$\nabla \boldsymbol{\theta} \to \nabla_x \boldsymbol{\theta}^0 + \nabla_y \boldsymbol{\theta}^1 \tag{6}$$



図–1 平面セル構造体

に収束する．この均質化汎関数のマクロスケールの変数に関する停留条件からマクロスケール釣合式

$$\nabla_x \nabla_x : \widetilde{\boldsymbol{M}} = \widetilde{\boldsymbol{N}} : \nabla_x \nabla_x w^0 - \widetilde{q} - \widetilde{\boldsymbol{f}} \cdot \nabla_x w^0 \tag{7}$$

および，ミクロスケールの変数に関する停留条件からミクロスケール釣合式

$$\nabla_y \nabla_y : \boldsymbol{M}^0 = 0 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{N}^0 : \nabla_y \nabla_y w^1 + \nabla_y \cdot \boldsymbol{Q}^0 = 0 \tag{9}$$

が得られる．ここで $\widetilde{\bullet}$ は代表体積要素における平均量であり

$$\widetilde{\bullet} := \langle \bullet \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \bullet \, \mathrm{d}Y$$

により定義した．

ミクロスケールの釣合式 (8)(9) は実変形に起因する内力の自己釣り合い式になっている．ここでは，著者ら[2)]の面外ミクロスケール問題と同様に，マクロ変形 (曲率) に相当する相対変位 (ここでは回転角および変位) を境界条件として解析を行う．式 (6) で表される全曲率をミクロスケール $\boldsymbol{y}$ により積分することにより，代表体積要素における面内問題の実変位に相当する実回転角 $\boldsymbol{\lambda}$ は

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left\{ \nabla_x \boldsymbol{\theta}^0(\boldsymbol{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\theta}^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{10}$$

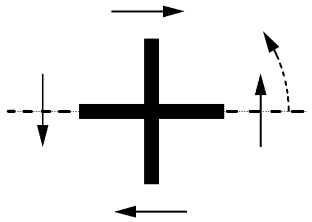
と表される．同様に，実面外変位 ζ は式 (5) で表されるたわみ角をミクロスケール $\boldsymbol{y}$ により積分することにより

$$\begin{aligned} \zeta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad = \quad & -\boldsymbol{y} \cdot \left\{ \nabla_x \boldsymbol{\theta}^0(\boldsymbol{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{y} \\ & + \left\{ \nabla_x w^0(\boldsymbol{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{y} + w^1(\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{11}$$

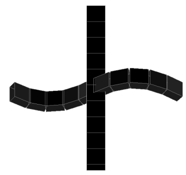
と表される．上記の実回転角，実面外変位およびミクロスケール変数の周期性を考慮し，マクロ曲率 $\nabla_x \theta^0$ に相当する相対回転角，およびマクロたわみ角に相当する相対面外変位を算出する．そして相対回転角，相対面外変位を代表体積要素に与えることで，その応答としてマクロ曲げモーメント $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ が算出可能となる．

3. 非線形解析例

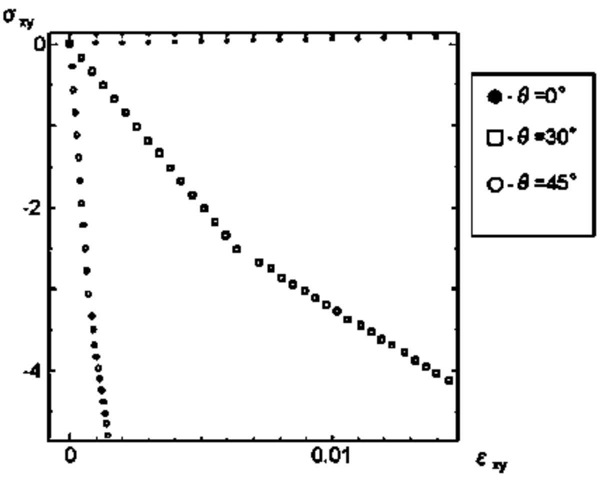
ミクロ構造の変形に伴う幾何剛性の増加や座屈による剛性の低下を調べるために，同じ大きさのせん断ひずみを方向を変えながらミクロ構造に与えて解析を行った．解析対象は図 2 に示す正方形セル構造体である．図 4 に解析結果を示す．図 4 はせん断ひずみを与える角度を 0°，30°，45° 回転させて与えて得られた応力，ひずみの値をせん断ひずみを与えた方向に座標変換してプロットしたものであり，ミクロ構造のせん断ひずみを与えた方向に対する応力-ひずみ曲線を表す．このグラフより，正方形セル構造の剛性がひずみを与える方向により著しく変化することが確認できる．また，30°，45° の曲線は載荷中に座屈しているが，その座屈が生じる時のひずみも，載荷する角度によって変化していることがわかる．



図–2 解析対象モデル



図–3 45° 方向せん断時座屈形状



図–4 荷重-ひずみ曲線 1

参考文献

1) 大植　健，斉木　功，寺田賢二郎，中島章典：骨組要素を用いたセル構造材料のための非線形マルチスケールモデリング，土木学会論文集, No.724/I-62, pp.249-256, 2003.
2) 斉木　功，佐野道徳，中島章典：はり・平板構造に対する均質化理論の適用に関する一考察，応用力学論文集, Vol.7, pp.407-413, 2004.

(2009 年 2 月 10 日 提出)