

面外曲げを受ける平面セル構造体の 非線形マクロ・ミクロ連立解析

本田宏孝*

Hiroataka HONDA

*構造強度学研究室 (指導教員: 斉木 功 准教授)

一般化収束論による面外曲げを受ける平板構造の非線形マクロミクロ連立解析の定式化を行い平面セル構造体の面外曲げに関する非線形マクロミクロ連立解析を行った。定式化を元にマクロ構造を板曲げ平板要素, ミクロ構造を骨組要素でモデル化した。解析例として平面セル構造体の面外曲げ解析を行い, セル構造体の曲げモーメント曲率関係から面外曲げ挙動における幾何剛性の影響を評価した。

Key Words: マルチスケール解析, Kármán 板理論, 均質化法, 幾何学的非線形性

1. はじめに

平面セル構造体は, 剛性や重量比などの観点から高機能な材料であり様々な用途に利用される。しかし, その力学的特性は, 条件によって強い異方性, 非線形性を示し, ときには座屈による不安定化を引き起こす。そしてこれらの複雑な現象が相互に影響を及ぼしあうため, 材料としての応答を非線形域まで含めて現象論的にモデル化することは一般的に困難である。一方でマルチスケール解析は非線形な力学特性をミクロスケール解析により非現象論的にモデル化することができる点で有効である。平面セル構造体の面内非線形マクロミクロ連立解析が大植ら¹⁾によって行なわれた一方で, 平面セル構造体がジオテキスタイルなどに利用される場合は, 面内変形に加え面外変形も考慮する必要がある。これに対して, 面外変形を考慮した非線形ミクロスケール解析の定式化が著者らによってなされた²⁾。本報告では著者らの定式化に従い, 面外変形を考慮した平面セル構造体のマクロミクロ連立解析を行う。

2. 一般化収束論による平板の非線形 2 変数境界値問題の定式化

大きさ ϵY ($\epsilon \ll 1$) の平面骨組が面内に周期的に配置された, 非均質な断面を持つ平板を解析対象とする。図中, Y として示された領域が $1/\epsilon$ を乗じることにより拡大された微視構造であり, もとの対象領域ではこの微視構造の大きさが ϵY となる。ここで, ϵ は十分小さな値とするが, 微視構造の大きさ ϵY は平板の平均的な板厚よりも大きいと仮定する。この仮定から, 対象とする平板は領域に比較して非常に薄く, かつ微視構造内の板厚変化は緩やかであるので, 平板を Kármán の仮定に従う薄肉平板とみなすことができる。そこで, 斉木

らの文献³⁾で示した Kirchhoff の平板に対する一般化収束論に基づく線形 2 変数境界値問題の定式化を拡張し, Kármán の平板に対する非線形 2 変数境界値問題の定式化の概要を示す。

中立面を含む領域を Ω , その境界を $\partial\Omega$ とする。対象とする平板の面内および面外方向の釣合式は, それぞれ変位表示の板の支配方程式は

$$\nabla \cdot N + f = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \nabla : M - qN : \nabla \nabla w + f \cdot \nabla w = 0 \quad (2)$$

である。ここに, N は面内力テンソル, f は面内分布外力, M は曲げモーメントテンソル, w は面外変位 (以後たわみと呼ぶことにする), ∇ は面内の勾配を取る演算子である。釣合式 (1), (2) と適切な境界条件と等価な変分問題は以下のポテンシャルエネルギー汎関数

$$\Pi := \int_{\Omega} W^m(\nabla u, \nabla w) + W^b(\nabla \nabla w) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u + qw d\Omega \quad (3)$$

を最小化する問題となる。ここに, W^m, W^b はそれぞれ面内力, 曲げモーメントに関するひずみエネルギー密度関数であり, 面内力 - 面内ひずみ関係

$$N = \frac{\partial W^m}{\partial \left(\nabla u + \frac{\nabla w \otimes \nabla w}{2} \right)} \quad (4)$$

および曲げモーメント - 曲率関係

$$M = \frac{\partial W^b}{\partial \nabla \nabla w} \quad (5)$$

を規定するものとする。

一般化収束論は, ひずみエネルギーに変位の 1 階の導関数のみが含まれる場合は問題なく適用が可能であるが, 2 階の導関数が含まれる場合の適用性は自明ではな

いため、齊木ら²⁾によってたわみの1階導関数であるたわみ角を独立変数とし、たわみとたわみ角の関係をLagrange未定係数法により組み込んだ汎関数を定義し一般化収束論を適用する定式化が示された。ここではそれに習い、たわみ w とたわみ角 θ の関係

$$\theta = \nabla w \quad (6)$$

を拘束条件とし、Lagrange未定定数法により、この拘束条件を組み込んだ汎関数 Π

$$\begin{aligned} \Pi := & \int_{\Omega} W^m(\nabla u, \nabla w) + W^b(\nabla \theta) \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} f \cdot u + qw \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \cdot (\nabla w - \theta) \, d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

を定義すると、平板の境界値問題はこの汎関数を停留させる問題となる。この汎関数の独立変数は ϵ 、 θ 、 w 、 Q であり、 Q は未定定数である。この汎関数 Π の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限、すなわち均質化汎関数 Π^H は

$$\begin{aligned} \Pi^H = & \int_{\Omega} W^m(\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1, \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1) \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} W^b(\nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1) \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} f \cdot u^0 + qw^0 \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} Q \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 - \theta^0) \, d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここで上付き0の変数はマクロスケール変数、上付き1の変数は代表体積要素 $^N Y$ における周期性($^N Y$ 周期性)を有するミクロスケール変数である。またこのとき、面内ひずみ ∇u 、たわみ角 ∇w 、曲率 $\nabla \theta$ は、それぞれ

$$\nabla u \rightarrow \nabla_x u^0 + \nabla_y u^1 \quad (9)$$

$$\nabla w \rightarrow \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 \quad (10)$$

$$\nabla \theta \rightarrow \nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1 \quad (11)$$

に収束することが一般化収束論により保証される。

この均質化汎関数の停留条件は

$$\begin{aligned} \delta \Pi^H = & \int_{\Omega} \langle N^0 : (\nabla_x \delta u^0 + \nabla_y \delta u^1) \rangle \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \langle N^0 : (\theta^0 \otimes \delta \theta^0) \rangle \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \langle M^0 : (\nabla_x \delta \theta^0 + \nabla_y \delta \theta^1) \rangle \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \langle f \delta u^0 \rangle \, d\Omega - \int_{\Omega} \langle q \delta w^0 \rangle \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \langle \delta Q^0 (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 - \theta^0) \rangle \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \langle Q^0 (\nabla_x \delta w^0 + \nabla_y \delta w^1 - \delta \theta^0) \rangle \, d\Omega \\ = & 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここに、 $\langle \bullet \rangle$ は

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \bullet \, dY \quad (13)$$

で定義される Y における体積平均、 N^0 は全面内ひずみ

$$\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1 + \frac{1}{2}(\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1) \otimes (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1)$$

に対する面内力である。 M^0 は全曲率

$$\nabla_x \theta^0 + \nabla_y \theta^1$$

に対する曲げモーメントである。上式を各独立変数 ϵ 、 θ 、 w 、 Q それぞれの変分について整理することで以下のマクロスケール釣合式

$$0 = \nabla_x \nabla_x : \tilde{M} - \tilde{q} - \tilde{N} : \nabla_x \nabla_x w^0 + \tilde{f} \cdot \nabla_x w^0 \quad (14)$$

とミクロスケール釣合式

$$0 = \nabla_y \nabla_y : M^0 = N^0 : \nabla_y \nabla_y w^1 + \nabla_y \cdot Q^0 \quad (15)$$

が得られる。ここで $\tilde{\bullet}$ は代表体積要素における平均量であり

$$\tilde{\bullet} := \langle \bullet \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \bullet \, dY$$

により定義した。

ミクロスケールでの実変形に起因する内力の自己釣り合い問題については、マクロ変形(曲率)に相当する相対変位(ここでは回転角および変位)を境界条件として解析を行う。式(11)で表される全曲率をミクロスケール y により積分することにより、代表体積要素における実回転角 λ は

$$\lambda(x, y) = \{ \nabla_x \theta^0(x) \} \cdot y + \theta^1(x, y) \quad (16)$$

と表され、代表体積要素両端における相対回転角は

$$\lambda(x, y + Y_i) - \lambda(x, y) = \{ \nabla_x \theta^0(x) \} \cdot Y_i \quad (17)$$

となる。

また、実たわみ ζ は式(10)で表されるたわみ角をミクロスケール y により積分することにより

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & -y \cdot \{ \nabla_x \theta^0(x) \} \cdot y \\ & + \{ \nabla_x w^0(x) \} \cdot y + w^1(y) \end{aligned} \quad (18)$$

と表され、代表体積要素両端における相対たわみは

$$\begin{aligned} \zeta(x, y + Y_i) - \zeta(x, y) = & \{ \nabla_x w^0(x) \} \cdot Y_i - 2y \cdot \nabla_x \theta^0(x) \cdot Y_i - \nabla_x w^0(x) \cdot Y_i \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

さらに面内変形に関する周期境界条件に対する相対変位は文献¹⁾より実変位は

$$\xi(x, y) = \{ \nabla_x u^0(x) \} \cdot y + u^1(x, y) \quad (20)$$

と定義され、相対変位は

$$\xi(x, y + Y_i) - \xi(x, y) = \{\nabla_x u^0(x)\} \cdot Y_i \quad (21)$$

と定義される。これまでのマクロ面内変形に相当する相対面内変位、マクロ曲率に相当する相対回転角、そしてマクロたわみ角に相当する相対面外変位を代表体積要素に与えることで、その応答として面内力、マクロ曲げモーメントが算出可能となる。

マクロ曲げモーメントは全曲げモーメント M^0 の代表体積要素内の体積平均であるが、ミクロ構造が本報告で対象としているような骨組構造の場合は、境界積分で表された方が都合がよい。斉木らの文献³⁾と同様に、Gauss の発散定理を利用し、マクロ曲げモーメント \bar{M} を

$$\bar{M}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} y \otimes \{n \cdot M^0(x, y)\} d\partial Y \quad (22)$$

により表し、マクロ面内力 \bar{N} を

$$\bar{N}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} y \otimes \{n \cdot N^0(x, y)\} d\partial Y \quad (23)$$

と表すことにする。

3. 平面セル構造体のマクロミクロ連立解析

図-??, 図-3 に示すような単位周期構造を持つ平面セル構造体の解析を面内応力制御、面内ひずみ制御それぞれで場合について行った。マクロ構造の特性評価点である各 Gauss 点におけるミクロ構造は図-4, 図-5 に示す。単位周期構造を 2×2 個を含み、基本周期ベクトルがそれぞれ $Y_1 = \{2.0, 0\}$, $Y_2 = \{0, 2.0\}$, そして $Y_1 = \{31.7, 0\}$, $Y_2 = \{0, 27.5\}$ となるような代表体積要素とした。それぞれのセルを構成する骨組要素は幅と高さを 1 の正方形断面の Bernoulli-Euler はりとし、Young 率 E を 1, 要素数は単位周期構造あたりそれぞれ 20, 30 とした。

(1) 応力制御解析

ここではマクロ面内変形をすべてゼロ、マクロ曲率 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$ のみが漸増し、他の曲率成分はゼロとなるようなマクロ構造の特性評価点でのミクロ解析の結果を示す。マクロ変形は式(19), (17), (21)によって定義された相対たわみ、相対回転、相対変位としてミクロ構造に与えられることになる。この解析ではミクロ構造の面内応力を制御しながら解析を行った。応力制御での変形形状を図-6,7 に示す。どちらのミクロ構造も一様にやわらかく変形している。

(2) ひずみ制御解析

ここでは前節と同様にマクロ面内変形をすべてゼロ、マクロ曲率 $(\nabla_x \nabla_x w^0)_{11}$ のみが漸増し、他の曲率成分を

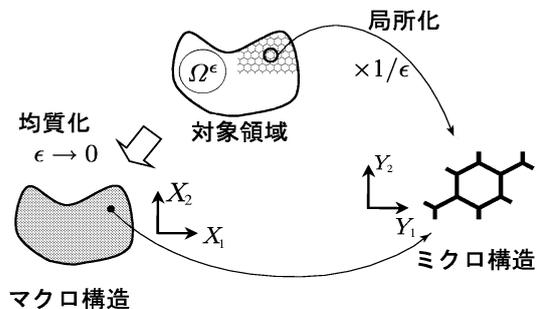


図-1 平面構造

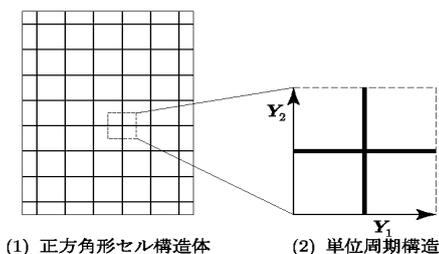


図-2 正四角形セル構造体の単位周期構造

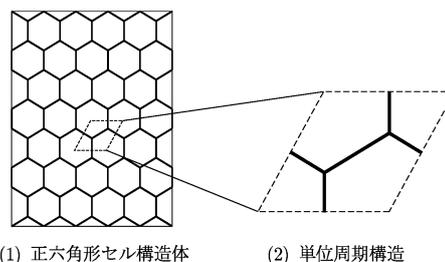


図-3 正六角形セル構造体の単位周期構造

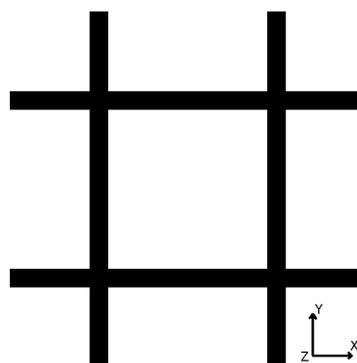


図-4 正四角形セル構造体のミクロ構造

ゼロとなるようなマクロ構造の特性評価点でのミクロ解析の結果を示す。ミクロ構造に与えられるマクロ変形については前解析と同様である。この解析では面内のひずみを制御し幾何剛性の影響の様子を調べた。ひずみ制御での変形形状を図-8,9 に示す。どちらの変形も変形が進むにつれ面内ひずみによる幾何剛性の影響により剛性が大きくなっておりたわみにくくなっている。

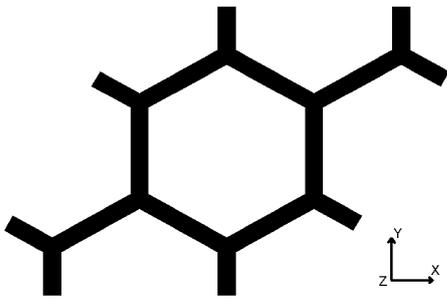


図-5 正六角形セル構造体のマイクロ構造

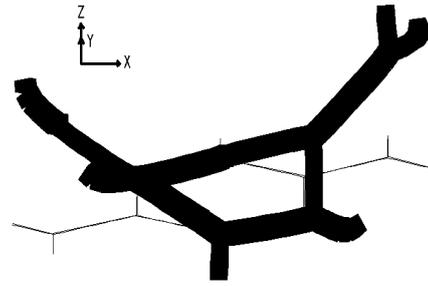


図-9 ひずみ制御による正六角形セル構造体の変形

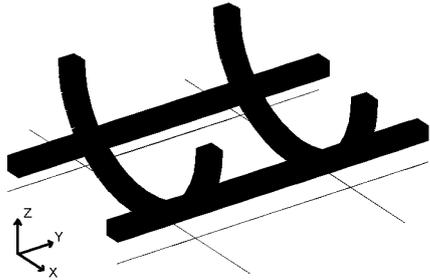


図-6 応力制御による正四角形セル構造体の変形

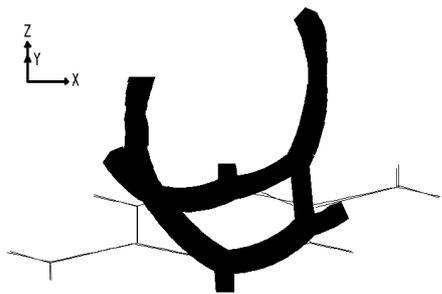


図-7 応力制御による正六角形セル構造体の変形

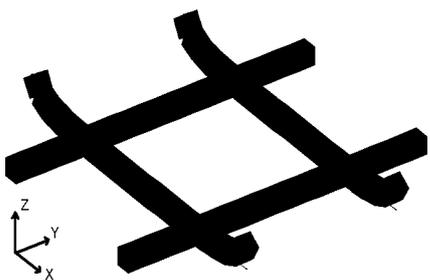


図-8 ひずみ制御による正四角形セル構造体の変形

いては幾何剛性による幾何学的な非線形性を示す結果となった。

参考文献

- 1) 大植 健, 斉木 功, 寺田賢二郎, 中島章典: 骨組要素を用いたセル構造材料のための非線形マルチスケールモデリング, 土木学会論文集, No.724/I-62, pp.249-256, 2003.
- 2) 斉木 功, 佐野道徳, 中島章典: はり・平板構造に対する均質化理論の適用に関する一考察, 応用力学論文集, Vol.7, pp.407-413, 2004.
- 3) 斉木功, 本田宏孝, 岩熊哲夫, 中島章典: 一般化収束論による平板構造に対する非線形均質化理論の適用, 応用力学論文集, Vol.9, pp.203-210, 2006.

(2008年2月5日提出)

4. おわりに

一般化収束論を用いて Kármán の仮定に従う面外曲げを受ける平板の非線形マクロミクロ解析の定式化の概要を示した。またこの定式化に基づいてマクロ構造のある特性評価点におけるミクロ解析の結果を、応力制御の場合とひずみ制御の場合について示した。ひずみ制御にお