介在物の分布と弾塑性挙動の異方性との関係の定量把握

Quantitative evaluation of relation between inclusion distribution and anisotropy of elasto-plastic behavior

廣瀬 恒太*
Kota HIROSE

*構造強度学研究室（指導教官：岩熊哲夫 教授）

An incremental elasto-plastic formulation for two-phases composites based on Mori-Tanaka theory is generalized for the inclusions which have several directions and individual material characteristics. Then the initial yield surface is expanded or contracted by interactive between inclusions which have difference of the direction of major axis. when inclusions have equable distribution on a plane, yield surface is isotropic on that plane.

Key Words : *composites, overall flow rule, overall yield surface, overall plastic strain rate, Mori-Tanaka theory, double slip model, polycrystal*

1. まえがき

複合材料は構造材料としてはもちろん，幅広い分野で活用されている．例えば繊維補強材料のような新材料は積極的に開発が進められ，また広く普及している．そのような複合材料を開発する際に森・田中理論[1)]のような平均化手法があると，材料の配合率等を決定するために解析や実験を網羅的に行う必要がなくなり，非常に効率的である．

その森・田中理論を弾塑性を含む様々な定式化に当てはめた研究はいくつかあるが，ほとんどは 2 相問題に対するものであり，複数種類の介在物を対象としたものは少ない．そこで本論文では森・田中理論を用いて，増分型の定式化をさらに任意の種類数の介在物を考慮できる形に拡張する．また多結晶体を念頭においてすべりメカニズムで降伏するような複合材料に対する定式化も行い，介在物の分布と巨視的降伏の異方性の関係について定量的に把握する．

2. 多種介在物を含む複合材料に対して一般化した定式化

森・田中理論は無限体中に多くの介在物がランダムに位置するものを対象としている．ここでは回転楕円体介在物が様々な寸法比や方向を有し，それぞれが個々の材料特性を持っているものとして扱う．森・田中の平均化を用いると，巨視的応力増分 $\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ が作用したときの各増分量の式は

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{A}\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \sum_i \left(\boldsymbol{D}_i\right)\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{M}} - \sum_i \left(\boldsymbol{D}_i\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_i\right) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i = {} & \boldsymbol{B}_i\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \left\{\boldsymbol{L}_i\sum_i\left(\boldsymbol{D}_i\right) - \boldsymbol{M}_i\right\}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{M}} \\ & + \boldsymbol{M}_i\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_i - \boldsymbol{L}_i\sum_i\left(\boldsymbol{D}_i\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_i\right)\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = {} & \overline{\boldsymbol{C}}^{-1}\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \left\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}\sum_i\left(\boldsymbol{D}_i\right) - \sum_i\left(\boldsymbol{P}_i\right)\right\}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{M}} \\ & + \sum_i\left\{\left(\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_i\right)\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_i\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

のような関係式で表される．ここに $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_i$, $\boldsymbol{D}_i$, $\boldsymbol{L}_i$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}_i$, $\boldsymbol{P}_i$ は 4 階のテンソルで添え字‘$_i$’が付くものは介在物の種類によってそれぞれ求められる．$\overline{\boldsymbol{C}}^{-1}$ は巨視的接線弾性コンプライアンスである．また，巨視的塑性ひずみ増分は巨視的ひずみ増分から弾性部分を除いたもの，つまり

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}^{\mathrm{p}} \equiv \dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} - \overline{\boldsymbol{C}}^{-1}\dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{4}$$

で定義する点に注意が必要である．

3. J_2 流れ則に従う材料の場合

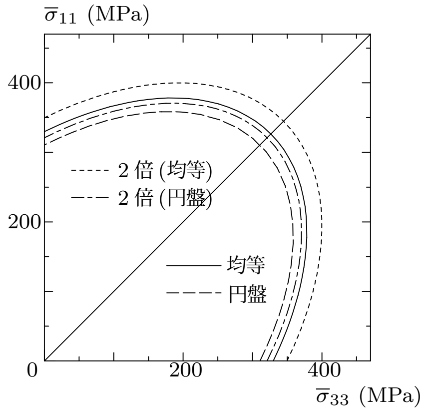
(1) 降伏条件

降伏条件は母材・各介在物ともに von Mises の降伏条件に従うものとし，その降伏関数は

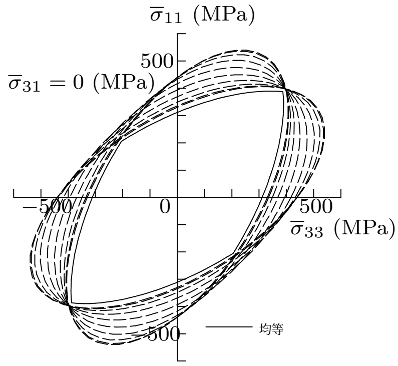
$$f_{\mathrm{M}} = \sqrt{\left(J_2\right)_{\mathrm{M}}} - F_{\mathrm{M}}\left(\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{M}}\right) \tag{5}$$

$$f_i = \sqrt{\left(J_2\right)_i} - F_i\left(\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}_i\right) \tag{6}$$

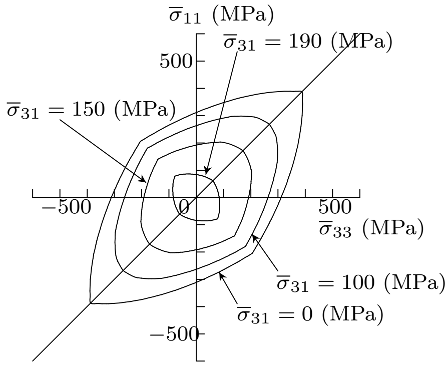
で与えられるものとする．硬化関数 F については代表的な文献でよく用いられている power-law を用いた．



図–1 長軸方向を均等に分布させた場合の巨視的初期降伏曲面（母材降伏）



図–2 長軸方向を均等に分布させた場合の巨視的初期降伏曲面（介在物降伏）



図–3 長軸方向を均等に分布させた場合の降伏曲面のコンター図（介在物降伏）

(2)　流れ則

流れ則は最も基本的な関連流れ則に従うものとし，塑性ひずみ増分は

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{M}} = \frac{1}{H_{\mathrm{M}}} \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_{\mathrm{M}}}{4\,(J_2)_{\mathrm{M}}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{M}} \tag{7}$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}_{i} = \frac{1}{H_i} \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{i} \otimes \boldsymbol{\sigma}'_{i}}{4\,(J_2)_{i}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i} \tag{8}$$

となる．

(3)　母材が降伏する場合

介在物形状は半径比が 1:1:2 のフットボール型の回転楕円体で，材料定数は SiC で補強した 2124Al を想定して文献[2)]から引用したもので，母材の材料定数はヤング率 $E_{\mathrm{M}} = 60$ GPa，ポアソン比 $\nu_{\mathrm{M}} = 0.3$，単軸引張り降伏応力 $\sigma^{\mathrm{y}}_{\mathrm{M}} = 290$ MPa，硬化パラメータ $h_{\mathrm{M}} = 700$ MPa，$n_{\mathrm{M}} = 0.55$ で，介在物の材料定数は $E_i = 450$ GPa，$\nu_i = 0.2$ で，降伏しないものとした．その向き θ を 0 〜 170 度までの 10 度刻みとした 18 種類の回転楕円体介在物が母材中に同じ体積比率 $13.2/18 = 0.733\%$ ずつ分布する複合材料の，$\overline{\sigma}_{33}$-$\overline{\sigma}_{11}$ 平面内での巨視的初期降伏曲面を**図–1** に示した．また同じ図中に，同じ材料定数と体積比率を持つ円盤状介在物が存在する場合の降伏曲面を長破線で描いた．

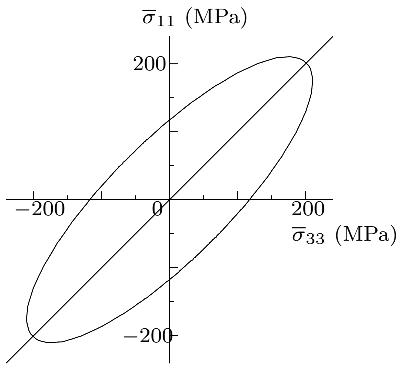
介在物の補強効果を考えてみると特にその長軸方向に強く働く．この場合のように面内に均等に長軸方向が分布している場合には，補強効果が均等に働くため，降伏曲面はこの面内で等方性を示す．しかし，多くの長軸方向を持つ介在物同士の相互作用によって単なる円盤型介在物の場合よりも外側に降伏曲面が拡がったものと考えられる．さらに同図には，介在物の体積比率を 1.5 倍の $f = 19.8\%$ とした場合についても，長軸方向を均等に分布したものを短破線で，円盤型介在物を存在させた場合を一点鎖線で示した．この場合にも長軸方向を均等に分布させた場合の降伏曲面の方が拡がっている．2 つの体積比率の場合を比較すると，降伏曲面が拡大する程度がその体積比率の比と同様に 1.5 倍程度になっている．

(4)　介在物が降伏する場合

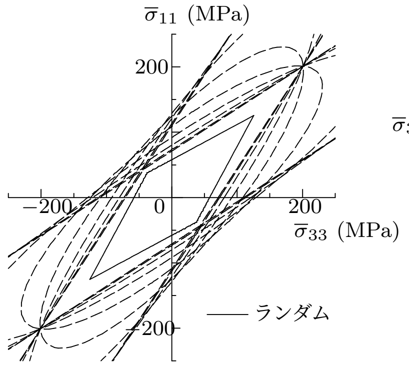
介在物形状は半径比が 1:1:2 のフットボール型の回転楕円体で，母材の材料定数は 2124Al を想定して，ヤング率 $E_{\mathrm{M}} = 60$ GPa，ポアソン比 $\nu_{\mathrm{M}} = 0.3$ で，降伏しないものとした．また，介在物の材料定数は文献[2)]にならって，SiC を想定して $E_i = 450$ GPa，$\nu_i = 0.2$，$\sigma^{\mathrm{y}}_i = 700$ MPa，$h_i = 1$ GPa，$n_{\mathrm{M}} = 0.5$ とした．介在物集合の総体積比率 f_i は $f_i = 13.2\%$ に固定してある．

介在物の長軸方向を θ を 0 〜 170 度までの 10 度刻みで与えた 18 種類の長軸方向を持つ回転楕円体介在物が母材中に同じ体積比率で分布する複合材料の，巨視的初期降伏曲面を**図–2** に示した．また，図中には長軸方向を $\theta = 0$ 〜 170 度の範囲で 10 度刻みとした 18 種類の介在物のうち，どれか 1 種類のみを含む場合の巨視的降伏曲面を破線で示してある．その場合，介在物の体積比率は 1 種類のみで $f = 13.2\%$ とした．1 種類の長軸方向を持つ場合の個々の降伏曲面（破線）は重なりあい，その最も内側の線を構成しているのは $\theta = 0$ 度と $\theta = 90$ 度の場合の 2 つである．そして，長軸方向が均等に分布している場合の降伏曲面（実線）は，その破線の最も内側の線とほぼ同じ形状を示し，やや内側に位置する．介在物が降伏する場合には，長軸方向を均等に分布させてもこの応力平面内では載荷方向によらず，$\theta = 0$ 度と 90 度の介在物のどちらかが必ず先に降伏するため，巨視的な降伏もこのどちらかの介在物の降伏によって決定される．そのため降伏曲面は角をもつ形状となる．

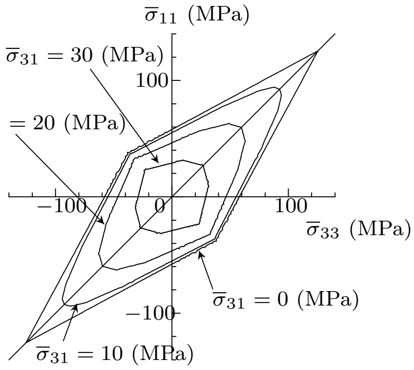
この場合に $\overline{\sigma}_{31}$ を変化させて，$\overline{\sigma}_{33}$-$\overline{\sigma}_{11}$ 平面に投影した降伏曲面のコンター図が**図–3** である．介在物が降伏する場合には先に降伏する介在物の向きが載荷状態に



図–4 $\theta = 45$ 度でランダムな ψ の分布を持つ場合の巨視的初期降伏曲面



図–5 ランダムな介在物の分布を持つ場合に $\overline{\sigma}_{33}$-$\overline{\sigma}_{11}$ 平面で描いた巨視的初期降伏曲面 ($\overline{\sigma}_{31} = 0$ MPa)



図–6 ランダムな介在物の分布を持つ場合に $\overline{\sigma}_{33}$-$\overline{\sigma}_{11}$ 平面に投影した巨視的初期降伏曲面のコンター図

よって異なるため，ある 1 種類の方向の介在物を含む場合の降伏曲面を重ね合わせたものの内側に巨視的初期降伏曲面が位置する．$\overline{\sigma}_{31}$ の値に応じてその重なり方が変化するため，降伏曲面は角を持ったり，一方の角が丸くなったりし，3 次元的には丸みを持った 8 面体のような形状を示す．

4. すべりメカニズムで降伏する材料の場合

金属のように結晶構造を持つ材料の降伏は，転位の存在の上で結晶格子の稠密面上のすべり変形によって起きることが知られている．単結晶であればそのようなすべりで降伏するが，それがランダムに分布する多結晶体である鋼などの材料では，巨視的には前章のような J_2 流れ則のようになり，具体的にはすべりメカニズムで生じているようには見えない．ここでは，そのすべり則で微視的には支配されるメカニズムを有する多結晶体や複合材料の巨視的降伏を考察したい．すべり変形のメカニズムの塑性モデルとしてここでは Asaro の 2 重すべりモデル[3),4)]を用いる．

(1) すべり系を有する複合材料の構成則

すべり面上に発生するせん断応力速度は

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^{\alpha} \tag{9}$$

で表される．ここに p_{ij}^{α} は各すべり系の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とすべり方向ベクトル $\boldsymbol{s}$ で

$$p_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(s_i^{\alpha} n_j^{\alpha} + s_j^{\alpha} n_i^{\alpha}\right) \tag{10}$$

と定義される．また流れ則に相当するすべり面上のせん断応力速度とすべり変形速度の関係は

$$\dot{\tau}^{\alpha} = h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \tag{11}$$

で与えられるものとする．よって，すべり系の発展則は

$$\dot{\sigma}_{ij} p_{ij}^{\alpha} = h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \tag{12}$$

となる．これに対し降伏関数は，すべり面上で発生するせん断応力 τ がそのすべり系の降伏せん断応力 $\tau_{\mathrm{y}}^{\alpha}$ に達したときに材料が降伏すると仮定する Schmid 則に従うものとし

$$f^{\alpha} = \tau - \tau_{\mathrm{y}}^{\alpha} = \sigma_{ij} p_{ij}^{\alpha} - \tau_{\mathrm{y}}^{\alpha} \tag{13}$$

で表される．そして微視的には法線則が成立している．

(2) 問題の設定

母材の材料定数は $E = 60$ GPa, $\nu = 0.3$ で, 介在物の材料定数は $E = 450$ GPa, $\nu = 0.2$，せん断降伏応力 $\tau_{\mathrm{y}}^{\alpha} = 100$ MPa，抵抗係数 $K = 1.0$ MPa とした．またすべり系の向きについては，立方晶の場合の稠密面のなす角をおよそ 70 度と考え，35 度にした．また介在物の形状は半径比が 1:1:5 の回転楕円体である．

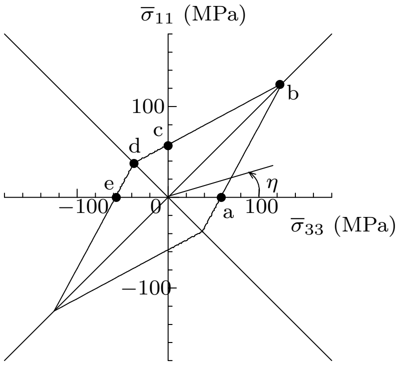
(3) 結晶方位を複数種有する場合

介在物の長軸向きは 45 度として，それに対して結晶方位を 0 〜 175 度まで 5 度ずつ変化させた 36 種類の介在物を含む場合の巨視的初期降伏曲面が**図–4** である．介在物の体積比率は合計で 16.2% となるようにそれぞれを 0.45% とした．区分的直線であるが巨視的初期降伏曲面はほぼ楕円形状になっている．少なくとも降伏曲面の形状に関してはいわゆる von-Mises の巨視的な降伏曲面が，微視的にはすべりメカニズムで降伏している場合であっても得られるということが確認できる．

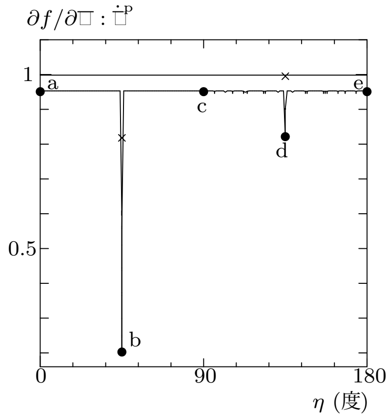
(4) 介在物の向きと結晶方位を均等に分布させた場合

ここでは θ も 0 〜 170 度まで 10 度刻みで分布させ，各 θ に対して結晶方位の代表向きも $\psi = 0 \sim 175$ 度の範囲で 5 度刻みで与えた複合材料を対象とする．介在物の体積比率は合計で 16.2% である．この場合の巨視的初期降伏曲面が**図–5** である．

この巨視的初期降伏曲面は 4 つの角を持つ菱形をしている．これは $\theta = 0$ 度と $\theta = 90$ 度の場合の個々の降伏曲面（破線）が最も内側にあることからも類推できるよ



図–7 均等な介在物の分布を持つ場合の巨視的初期降伏曲面



図–8 降伏曲面の法線方向と巨視的塑性ひずみ増分の内積

うに，この 2 つの介在物中の降伏によって巨視的な降伏が決定されるためである．また様々な長軸向きを持つ介在物が同時に含まれるため，相互作用によって $\theta = 0$ 度の介在物のみが含まれる場合と $\theta = 90$ 度の介在物のみが含まれる場合の降伏曲面を結んだ線よりも若干内側に降伏曲面が位置する．

$\overline{\sigma}_{33}$- $\overline{\sigma}_{11}$ 平面に投影して描いた巨視的初期降伏曲面のコンター図が**図–6** である．均等な介在物の分布を持つ場合，巨視的初期降伏曲面の 3 次元的な形は，一部の頂点が尖った 8 面体状の曲面になっている．

(5) 初期降伏曲面における塑性の発展則

ここでは，降伏曲面の角点での平均挙動に対する流れ則がどうなるかを中心にして，巨視的発展則について考察をする．

巨視的な降伏関数は

$$f = B_{ijkl}\overline{\sigma}_{kl}p_{ij} - \tau_{\mathrm{y}} \tag{14}$$

で表される．したがって巨視的初期降伏曲面の法線方向は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{\sigma}_{ij}} &= B_{klmn}\frac{\overline{\sigma}_{mn}}{\overline{\sigma}_{ij}}p_{kl} \\ &= B_{klij}p_{kl} \end{aligned} \tag{15}$$

となる．これと巨視的塑性ひずみ増分の向きをベクトル的に扱って内積を計算すれば，法線性が確認できる．

図–7 は介在物の長軸向き・結晶方向の代表向きともに均等に分布した場合を考え，介在物の長軸向きを $\theta =$ 0 〜 170 度の範囲で 10 度刻みに与え，各 θ に対して結晶方向の代表向きを $\psi = 0$ 〜 175 度の範囲で 5 度刻みに与えた場合の巨視的初期降伏曲面で，**図–8** は降伏曲面の法線方向と巨視的塑性ひずみ増分の内積の値である．角に位置する b 点と d 点以外では内積が 1 に近く法線則はほぼ満足されている．その b 点と d 点についても角の両側の降伏曲面の法線方向の中間的な向きとの内積をとったものは×印となり，中間的にはそれほど大きく法線性が崩れていない．

5. まとめ

増分型の森・田中理論を多種の介在物に対して一般化した定式化を行った結果次のような知見を得た．

- 複数種類の介在物を考慮できる形に増分型の弾塑性での定式化を拡張した．
- 介在物が均等に分布しているとき，補強効果が均等にはたらくため巨視的降伏曲面は等方になる．
- 向きの違う複数種類の介在物が存在すると相互作用により降伏曲面の大きさが変わることが分かった．
- 介在物が降伏する場合，巨視的降伏は最も先に降伏する介在物の降伏で決定され，降伏曲面には角が生まれる．
- 微視的にはすべりで降伏する場合にも形状に関しては von-Mises の巨視的降伏曲面が得られることを確認した．
- 巨視的な法線則はだいたい満たされており，角点においては 2 つの法線の中間方向を向くことを定量的に確かめた．
- ランダムにすべりメカニズムを持つ介在物が分布している場合の現象論的降伏の近似モデルは von-Mises や関連流れ則でも可能であることを確認した．

参考文献

1) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571–574, 1973.
2) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
3) Asaro, R.J.: Micromechanics of Crystals and Polycrystals, *Advances in Appl. Mech.*, Vol.23, pp.1–115, 1983.
4) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S.: Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol.A394, pp.87–119, 1984.

(2003 年 2 月 6 日 提出)