解析的手法を利用した複合材料の有限要素と上下界

Finite Element and Upper and Lower Bounds of Composites Applied Holomorphic method

樋口 耕平*
Kohei HIGUCHI

*構造強度学研究室（指導教官：岩熊哲夫 教授）

複合材料は高機能・高性能な材料として様々な分野で研究・開発が行なわれているが，その設計では森・田中理論のような解析的な手法や Hashin-Shtrikman の上下界の利用は便利である．この森・田中の手法を直接複合材料の境界値問題に適用できれば，構造物レベルでの複合材料の最適設計などが可能になる．そこで本論文では有限要素法の材料則に森・田中の結果をそのまま用いた要素を定式化した．それにより繊維補強コンクリート梁等の境界値問題の解析を行い，その要素の利用の可能性を示した．

Key Words : *composites, Mori-Tanaka theory, finite element, upper and lower bounds*

1. はじめに

コンクリートや繊維補強材等の複合材料の巨視的な挙動は微視的なものの平均として現れている．平均化手法には均質化法のような数値的なものもあるが，森・田中理論[1)]は Eshelby のテンソルを通して介在物の形状も考慮することができ，解析的に平均を求めることが可能な場合がある点で優れている．しかしその理論はそのままでは境界値問題には適用できない．そこで，有限要素の材料則に森・田中の結果を用いれば，確率有限要素法の適用や最適設計で材料開発を定めることが構造物のレベルで可能になると考えた．また，剛性の上下界も予測できるので，材料開発にも有用であると考えられる．ここでは平面ひずみ状態を例にして，いくつかの結果を示す．

2. 平面ひずみ状態の森・田中有限要素

無限体である母材中に，1 種類の材料からなる相似な形状の無数の介在物が，同じ方向を向いて不規則に分布しているとき，複合材料の平均応力と平均ひずみ，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ の関係は文献[2)]にあるように森・田中の手法により

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{1}$$

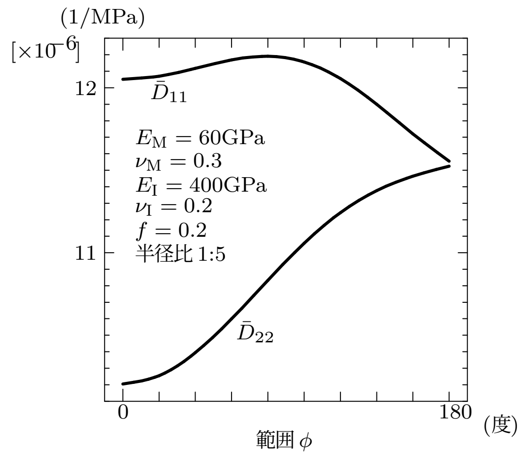
$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\{&\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (1-f)(\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{S}\}^{-1} \\ &[\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}})\{\boldsymbol{S} - f(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I})\}]\end{aligned} \tag{2}$$

と表すことができる．ここに，$\boldsymbol{S}$ は Eshelby のテンソル，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}, \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}$ は母材，介在物の弾性係数テンソル，f は介在物の体積比率，$\boldsymbol{I}$ は単位テンソルである．介在物の形状は x_3 方向に無限に長い楕円柱介在物に限定し，それを平面ひずみ状態として，$x_1 - x_2$ 平面において楕円形状の介在物が存在する場合を考える．

3. 一様場の場合の挙動

(1) 直交異方性と横等方性

最も基本的な例として，正方形の領域が周囲で一様な荷重を受けているときの挙動を検討し，本アプローチの特性をまず明らかにする．正方形の領域を 400 個の定ひずみ三角形要素に分割する．各要素の剛性は式 (2) で与えるが，要素毎に介在物の向きを変化させる．楕円柱介在物の半径比を 1:5 とし，その長軸の向きを x_2 方向に対して対称にある範囲 ϕ の中で乱数で与え，それをランダムに 400 の要素に割り当てた．つまり，$\phi = 0$ 度の場合はすべての介在物の長軸が x_2 方向を向き，$\phi = 180$ 度の場合はあらゆる方向にランダムに長軸方向が分布している．**図–1** に正方形の変形から求まる平均的なコンプライアンス $\bar{D}_{11}$ と $\bar{D}_{22}$ を示した．材料定数は図中に示したとおりである．$\phi = 0$ 度の場合はこの 2 つは同じ値にはならず，直交異方性を明確に示している．$\phi = 180$ 度ではこの 2 つの値が一致し，対象としている材料がこの $x_1 - x_2$ 平面で等方であることを示している．



図–1 直交異方性と横等方性

(2) 上下界の予測

森・田中の手法では，構成材料のうちどちらを母材と選ぶかによって異なる解が得られ，弾性の場合にはその解が Hashin-Shtrikman の上下界に一致することがわかっている．したがって有限要素内で母材と介在物の役割を交代させることにより，この上下界が求まる．前節において介在物をランダムに並べた場合（$\phi = 180$ 度）のコンプライアンス $\bar{D}_{ij}$ の上下界を求めてみる．複合材料の母材の材料定数は前節と同じにした．楕円介在物の半径比を 1:5，1:100 とした場合のコンプライアンス $\bar{D}_{11}$ の上下界は**図–2** に示した．各コンプライアンス成分 $\bar{D}_{11}$，$\bar{D}_{22}$，$\bar{D}_{12}$，$\bar{D}_{66}$ はともに半径比 1:1 の円柱の場合の上下界内側に位置しており，半径比を 1:5，1:100 と大きくするにつれて，内側に幅を狭めながら一本の線に収束する．実は森・田中の手法あるいは Hashin-Shtrikman の上下界は，楕円形状が細長くなると互いに近づいてしまう特性を持つ．これが手法の限界とも考えられる．半径比 1:5 でランダムに分布させた場合は，巨視的には円柱の場合になりそうではあるが，上記のように介在物との相互作用を強めに考慮してしまうためやや内側になっているものと考えられる．

また，半径比 1:100 の場合の結果が f の小さい領域でコンプライアンスの下界，つまり森・田中のオリジナルの予測の逆の界に漸近しているのは興味深い．f が大きい場合はその逆である．これは Hill の self-consistent[3] と逆の傾向になっている．つまり，オリジナルの森・田中の逆の界の予測とは，介在物との相互作用が非常に強い場合を解いているのではないかと予測される．

4. 境界値問題の例

境界値問題の例として，**図–3** に示した炭素繊維で補強されたコンクリート片持ち梁の解析を行なった．材料定数，寸法，境界値条件，は図中に示したとおりである．母材のみの場合に対して，体積比率 15 %でランダムな向きに入れた場合，水平方向に向けて入れた場合のそれぞれのたわみの上下界を**図–4** に示した．これはコンクリートを炭素繊維で補強した場合に期待できる剛性の範囲を表していると考えられる．また，介在物をランダムな向きに入れるよりも，力学を考慮して水平方向に入れたほうが剛性が大きくなっていることがわかる．

5. おわりに

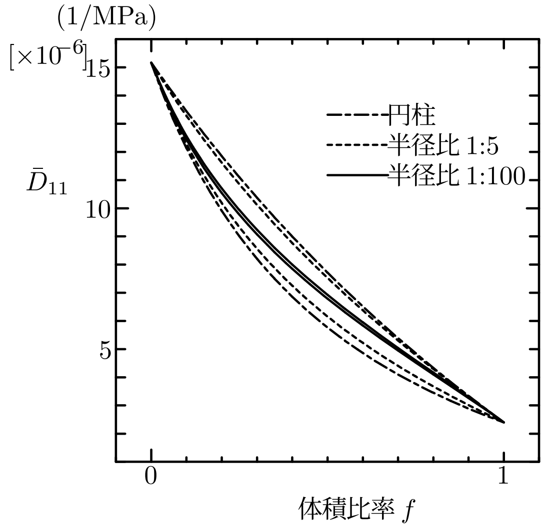
森・田中の手法による材料則に従う有限要素の特性を明らかにした上で，炭素繊維補強コンクリートを用いた梁の有限要素解を求め，その可能性を示した．

参考文献

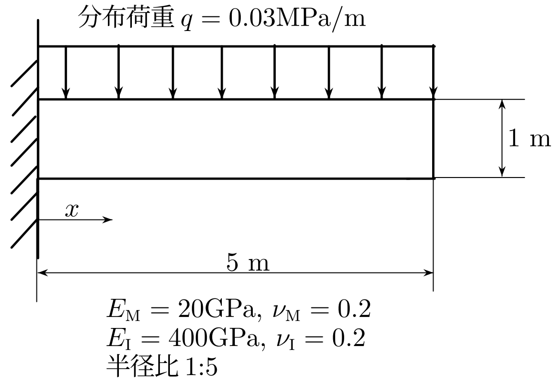
1) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571–574, 1973.

2) 岩熊哲夫・堀 宗朗・森 勉・村外志夫：複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価，構造工学論文集，Vol.37A, pp.435–442, 1991.

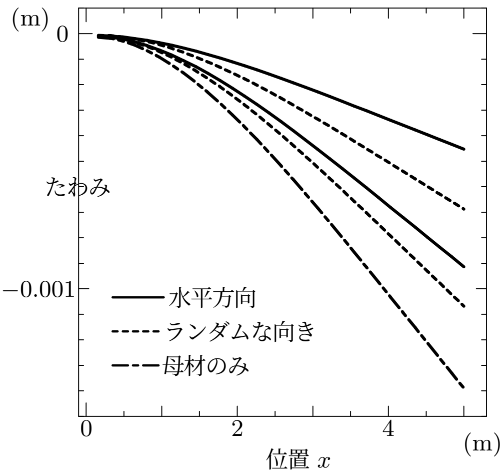
3) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213–222, 1965.



図–2 $\bar{\boldsymbol{D}}_{11}$ の上下界



図–3 繊維補強コンクリート梁



図–4 たわみ分布の上下界

(2003 年 2 月 13 日 提出)