卒業論文概要集 1999 年 2 月 東北大学工学部土木工学科

3 相から成る複合材料の平均弾性の予測

Prediction of Average Elasticity of Three-Phase Composites

小倉　崇生*
Takao OGURA

*構造強度学研究室（指導教官：岩熊哲夫 教授）

複合材料の巨視的な力学挙動を微視的な観点から予測する方法の 1 つに森・田中理論がある．この理論は等価介在物法を用いながら，複合材料を構成する母材，介在物それぞれの弾性定数と介在物の体積率から平均弾性を予測する手法である．本論文では森・田中理論によって 3 相の複合材料の平均弾性を求めるいくつかのアプローチを考え，これらの方法で得られた平均弾性を比較することによってそれぞれの平均化手法を考察する．

Key Words : *Composites, Mori-Tanaka theory, Equivalent inclusion method, Average elasticity*

1.　まえがき

土木構造材料はほとんどが複合材料と考えてよく，その内部に空隙，亀裂，介在物等の微視構造を有している．これらの微視構造は材料の性質を決定する要因であり，微視的挙動はもちろんのこと，土木の分野で第一に必要とされる巨視的挙動にも大きな影響を与える．微視的な観点から，巨視的挙動の情報である巨視的平均弾性を予測する研究は古くから行われており，その多くが Eshelby の研究[1)]に基礎を置く等価介在物法[2)]を利用している．本論文では介在物同士の相互作用を近似する方法として森・田中理論を用いて，3 相から成る複合材料の平均弾性の予測を行う．

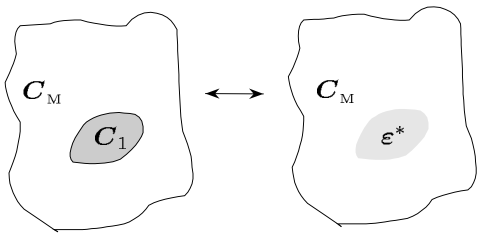
2.　解析方法

(1)　2 相から成る複合材料の平均化手法

解析対象を，**図–1** 左に示すような，介在物を含む不均一な材料とする．図中の $\boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}$，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}$ はそれぞれ母材，介在物の応力テンソルである．等価介在物法による解析では，介在物の弾性定数を母材の弾性定数に置き換え，かつ介在物内部がもとの応力ひずみ関係を満たすように eigen ひずみと呼ばれる量を ε_* を分布させる (**図–1** 右)．したがって介在物内の挙動は平均的に次のように表せる．

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_{\mathrm{I}} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}\{\langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{\gamma}\}\\ &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{M}}\{\langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{D}}+\boldsymbol{\gamma}-\varepsilon^*\}\end{aligned} \tag{1}$$

ここに $\langle\rangle$ はその材料中の体積平均を表す記号である．また $\langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{D}}$ は介在物が多数存在する効果を含んだ材料全体の平均ひずみであり，これが森・田中のアイデアによる介在物同士の相互作用の評価方法である．さらに $\boldsymbol{\gamma}$ は介在物の存在による乱れ成分を表しており，この成分は介在物の境界の影響と介在物同士の相互作用が無視できる場合に Eshelby のテンソル $\boldsymbol{S}$ を用いて $\gamma=\boldsymbol{S}\varepsilon^*$ と表せる．一方，各相の平均的な応力ひずみ関係からひずみと応力の全体平均 $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ を



図–1　等価介在物法

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv f\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_{\mathrm{I}}+(1-f)\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_{\mathrm{M}} \tag{2}$$

$$\bar{\varepsilon} \equiv f\langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{I}}+(1-f)\langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{D}} \tag{3}$$

と定義する．ここに f は介在物の体積比率である．以上の式を用い，応力とひずみの全体関係を $\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\overline{\boldsymbol{C}}\bar{\varepsilon}$ と表すと巨視的平均弾性 $\overline{\boldsymbol{C}}$ を求めることができる．介在物が回転楕円体である場合，複合材料の平均体積弾性率と平均せん断弾性係数は

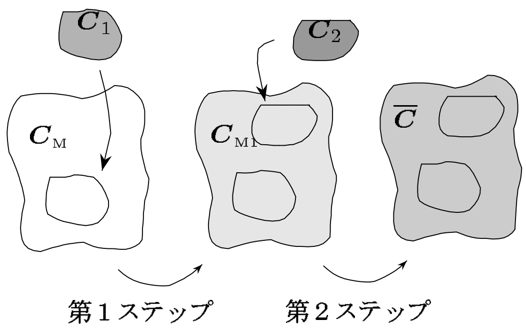
$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_{\mathrm{M}}}=1-\frac{f(1-\frac{\kappa_{\mathrm{I}}}{\kappa_{\mathrm{M}}})}{1-(1-f)(1-\frac{\kappa_{\mathrm{I}}}{\kappa_{\mathrm{M}}})\alpha} \tag{4a}$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_{\mathrm{M}}}=1-\frac{f(1-\frac{\mu_{\mathrm{I}}}{\mu_{\mathrm{M}}})}{1-(1-f)(1-\frac{\mu_{\mathrm{I}}}{\mu_{\mathrm{M}}})\beta} \tag{4b}$$

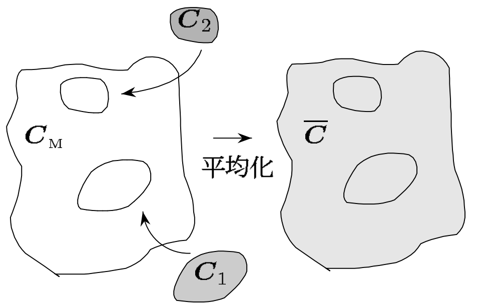
となる．ここに α, β は $\boldsymbol{S}$ 中の定数で，母材のポアソン比の関数である．

(2)　3 相から成る複合材料の平均化手法

本論文では森・田中理論を 3 相から成る複合材料に応用する方法として 2 つのアプローチを考える．1 つは



図–2 2相の重ね合わせによる方法



図–3 3相を同時に平均化する方法

図–2のように，第1ステップで3種類の材料のうちの2つの材料に注目して平均化を行い，続いて第2ステップでは，第1ステップの平均化によって新たにできた材料と残りの材料の2相で再度平均化する方法である．介在物材料1，介在物材料2の体積率をそれぞれ f_1，f_2 で表すと，3相から成る複合材料を2相の平均化の繰り返しによって求めた平均弾性は

$$\frac{\kappa_{(M1)2}}{\kappa_M} = \left\{1 - \frac{\frac{f_1}{1-f_2}\left(1-\frac{\kappa_1}{\kappa_M}\right)}{1-\left(1-\frac{f_1}{1-f_2}\right)\left(1-\frac{\kappa_1}{\kappa_M}\right)\alpha_1}\right\} \times \left\{1 - \frac{f_2\left(1-\frac{\kappa_2}{\kappa_{M1}}\right)}{1-(1-f_2)\left(1-\frac{\kappa_2}{\kappa_{M1}}\right)\alpha_{M1}}\right\} \quad (5)$$

と表すことができる．ここに添字の(M1)2は各材料を上に示した順序で導入することを意味している．

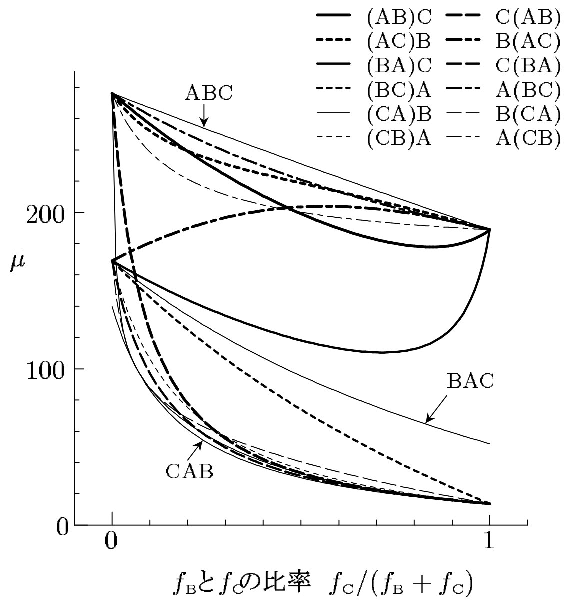
もう1つの方法は**図–3**のように3種類の材料を同時に平均化するものである．式(3)を用いてひずみと応力の全体平均の関係を

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv f_1\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_1 + f_2\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_2 + (1-f_1-f_2)\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_M \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon} \equiv f_1\langle\varepsilon\rangle_1 + f_2\langle\varepsilon\rangle_2 + (1-f_1-f_2)\langle\varepsilon\rangle_D \quad (7)$$

と表現できる．したがって3相を同時に平均化したときの平均弾性は次のように表せる．

$$\frac{\kappa_{M12}}{\kappa_M} = \frac{1 + \sum_{i=1}^{2} \frac{f_i(\alpha_i-1)(\kappa_M-\kappa_i)}{\kappa_M-(\kappa_M-\kappa_i)\alpha_i}}{1 + \sum_{i=1}^{2} \frac{f_i\alpha_i(\kappa_M-\kappa_i)}{\kappa_M-(\kappa_M-\kappa_i)\alpha_i}} \quad (8)$$



図–4 2つのアプローチから求めた平均弾性

3. 数値例

2相問題に森・田中理論を用いると剛性の高い材料に，低い材料を導入した場合に平均弾性は上界を示し，逆の場合は下界を示す．**図–4**は式(5)を用いて3相の平均弾性を求めた結果である．ここに各材料の弾性定数は，κ_M=2000，μ_M=1000，κ_1=300，μ_1=100，κ_2=35，μ_2=7，弾性係数の単位はMPaである．介在物の体積比率 f_1+f_2 は0.7とした．2相の重ね合わせによる平均化では材料を導入する順序を変えることによって12通りの平均弾性を求めることができる．特に f_C= 0，f_B=0の場合は母材と介在物の2相から成る複合材料と見なすことができ，それぞれの場合の上界と下界は，材料が元々2つしかない2相問題の与える上界と下界に一致する．しかし3相同時に平均化する場合に f_C=0，f_B=0で3種類の平均弾性を与えている．これは先に示した2相問題に上下界を与える2点に加え，介在物同士の平均化から得られる解である．$f_C \neq 0$，$f_B \neq 0$ では2つのアプローチから得られる平均弾性の上下界は判然としない．

参考文献

1) Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376–396, 1957.
2) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
3) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act Metalurgical*, Vol.21, pp.571–574, 1973.

(1999年2月22日 提出)