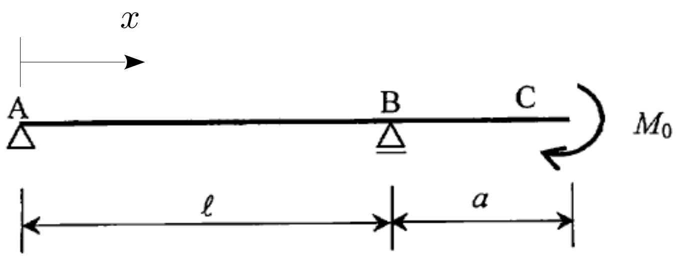
構造解析学及び同演習 課題07 解答例

問題

単位荷重法またはCastiglianoの第二定理を用いて，次に示すはり（曲げ剛性は EI で一定）のたわみやたわみ角を求めよ．

(2)



点Aから点Cに向かって x 軸を定義する． $0 \leq x \leq \ell + a$ である．この梁の曲げモーメント分布は

$$M(x) = \begin{cases} -\dfrac{M_0}{\ell}x & \equiv M_1(x) \quad (0 \leq x \leq \ell) \\ -M_0 & \equiv M_2(x) \quad (\ell \leq x \leq \ell + a) \end{cases} \tag{1}$$

と書ける．

δ_{C} を単位荷重法で求める

点Cに鉛直下向きに単位の荷重 $\overline{1}$ を作用させた梁の曲げモーメント分布は

$$\overline{M}(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{\ell}x & \equiv \overline{M}_1(x) \quad (0 \leq x \leq \ell) \\ x - (\ell + a) & \equiv \overline{M}_2(x) \quad (\ell \leq x \leq \ell + a) \end{cases} \tag{2}$$

である．よって点Cの鉛直変位は

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{C}} &= \int_0^{\ell} \frac{M_1 \overline{M}_1}{EI}\,\mathrm{d}x + \int_{\ell}^{\ell+a} \frac{M_2 \overline{M}_2}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\ell}\left(-\frac{M_0}{\ell}x\right)\left(-\frac{a}{\ell}x\right)\mathrm{d}x + \int_{\ell}^{\ell+a}(-M_0)\left\{x - (\ell + a)\right\}\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{aM_0}{EI}\left(\frac{\ell}{3} + \frac{a}{2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

と求められる．

δ_{C} を **Castigliano** の定理で求める

点 C に鉛直下向きに荷重 $\hat{P}$ を作用させた梁の曲げモーメント分布は

$$M_{\hat{P}}(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{\ell}\hat{P}x & \equiv M_{\hat{P}1}(x) \quad (0 \le x \le \ell) \\ \hat{P}\left\{x - (\ell + a)\right\} & \equiv M_{\hat{P}2}(x) \quad (\ell \le x \le \ell + a) \end{cases} \tag{4}$$

である．これを式 (1) と重ね合わせることで，問題の梁の点 C に鉛直下向きに荷重 $\hat{P}$ を作用させたときの曲げモーメントとその偏微分が

$$\hat{M}(x) = \begin{cases} -\dfrac{M_0 + \hat{P}a}{\ell}x & \equiv \hat{M}_1(x) \quad (0 \le x \le \ell) \\ \hat{P}\left\{x - (\ell + a)\right\} - M_0 & \equiv \hat{M}_2(x) \quad (\ell \le x \le \ell + a) \end{cases} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \hat{M}_1(x)}{\partial \hat{P}} = -\frac{a}{\ell}x, \quad \frac{\partial \hat{M}_2(x)}{\partial \hat{P}} = x - (\ell + a) \tag{6}$$

と求められる．またこの系の補ひずみエネルギーは

$$U^* = \int_0^\ell \frac{\hat{M}_1^2}{2EI}\,\mathrm{d}x + \int_\ell^{\ell+a} \frac{\hat{M}_2^2}{2EI}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

である．微分の連鎖率 $\dfrac{\partial U^*}{\partial \hat{P}} = \dfrac{\partial U^*}{\partial \hat{M}}\dfrac{\partial \hat{M}}{\partial \hat{P}}$ に式 (5) から (7) を用い，仮想的に与えた荷重を $\hat{P} = 0$ とすることで点 C の鉛直変位は

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{C}} &= \left.\frac{\partial U^*}{\partial \hat{P}}\right|_{\hat{P}=0} = \left.\left(\frac{\partial U^*}{\partial \hat{M}}\frac{\partial \hat{M}}{\partial \hat{P}}\right)\right|_{\hat{P}=0} = \int_0^\ell \left.\left(\frac{\hat{M}_1}{EI}\frac{\partial \hat{M}_1}{\partial \hat{P}}\right)\right|_{\hat{P}=0}\mathrm{d}x + \int_\ell^{\ell+a} \left.\left(\frac{\hat{M}_2}{EI}\frac{\partial \hat{M}_2}{\partial \hat{P}}\right)\right|_{\hat{P}=0}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\left[\int_0^\ell \left(-\frac{M_0}{\ell}x\right)\left(-\frac{a}{\ell}x\right)\mathrm{d}x + \int_\ell^{\ell+a} (-M_0)\left\{x - (\ell + a)\right\}\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{aM_0}{EI}\left(\frac{\ell}{3} + \frac{a}{2}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

と求められる．

θ_{C} を単位荷重法で求める

点 C に反時計回りに単位の曲げモーメント $\overline{1}$ を作用させた梁の曲げモーメント分布は

$$\overline{M}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ell}x & \equiv \overline{M}_1(x) \quad (0 \le x \le \ell) \\ 1 & \equiv \overline{M}_2(x) \quad (\ell \le x \le \ell + a) \end{cases} \tag{9}$$

である．よって点 C の回転角は，単位の曲げモーメントの向き，つまり反時計回りを正として

$$\begin{aligned} \theta_{\mathrm{C}} &= \int_0^\ell \frac{M_1\overline{M}_1}{EI}\,\mathrm{d}x + \int_\ell^{\ell+a} \frac{M_2\overline{M}_2}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^\ell \left(-\frac{M_0}{\ell}x\right)\left(-\frac{1}{\ell}x\right)\mathrm{d}x + \int_\ell^{\ell+a} (-M_0)\cdot 1\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= -\frac{M_0}{EI}\left(\frac{\ell}{3} + a\right) \end{aligned} \tag{10}$$

と求められる．

θ_{C} を Castigliano の定理で求める

問題の系の補ひずみエネルギーは式 (1) の曲げモーメント分布を用いて

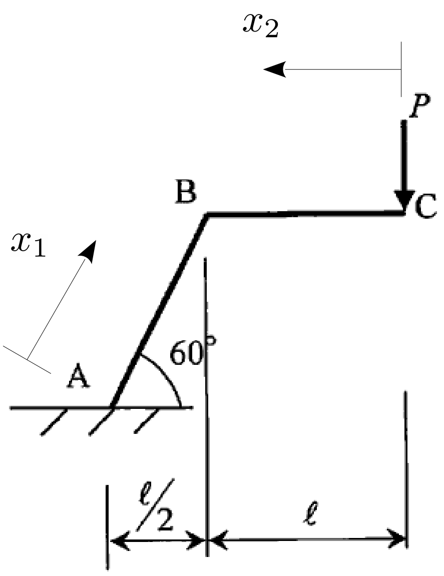
$$\begin{aligned}U^* &= \int_0^{\ell} \frac{M_1^2}{2EI}\,\mathrm{d}x + \int_{\ell}^{\ell+a} \frac{M_2^2}{2EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2EI}\left\{\int_0^{\ell}\left(-\frac{M_0}{\ell}x\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\ell}^{\ell+a}(-M_0)^2\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{M_0^2}{2EI}\left(\frac{\ell}{3}+a\right) \qquad (11)\end{aligned}$$

と書ける．よって点 C の回転角は，点 C に作用している曲げモーメント M_0 の向き，つまり時計回りを正として

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{C}} &= \frac{\partial U^*}{\partial M_0} \\ &= \frac{M_0}{EI}\left(\frac{\ell}{3}+a\right) \qquad (12)\end{aligned}$$

と求められる．

(3)



点 A から点 B に向かって x_1 軸，点 C から点 B に向かって x_2 軸を定義する． $0 \le x_1 \le \ell$, $0 \le x_2 \le \ell$ である．この梁の曲げモーメント分布は

$$M(x_1) = -\frac{P}{2}(3\ell - x_1) \qquad (13)$$

$$M(x_2) = -Px_2 \qquad (14)$$

と書ける．

δ_{CV} を単位荷重法で求める

点 C に鉛直下向きに単位の荷重 $\overline{1}$ を作用させた場合の曲げモーメント分布は，式 (13)，(14) で $P \to 1$ と置き換えることで

$$\overline{M}(x_1) = -\frac{1}{2}(3\ell - x_1) \tag{15}$$

$$\overline{M}(x_2) = -x_2 \tag{16}$$

と書ける．よって点 C の鉛直変位は

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{CV}} &= \int_0^\ell \frac{M(x_1)\overline{M}(x_1)}{EI}\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^\ell \frac{M(x_2)\overline{M}(x_2)}{EI}\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^\ell \frac{P}{4}(3\ell - x_1)^2\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^\ell Px_2^2\,\mathrm{d}x_2\right\} \\ &= \frac{23P\ell^3}{12EI}\end{aligned} \tag{17}$$

と求められる．

δ_{CV} を **Castigliano** の定理で求める

問題の系の補ひずみエネルギーは式 (13)，(14) の曲げモーメント分布を用いて

$$\begin{aligned}U^* &= \int_0^\ell \frac{\{M(x_1)\}^2}{2EI}\,\mathrm{d}x_1 + \int_\ell^{\ell+a} \frac{\{M(x_2)\}^2}{2EI}\,\mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{1}{2EI}\left\{\int_0^\ell \frac{P^2}{4}(3\ell - x_1)^2\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^\ell P^2x_2^2\,\mathrm{d}x_2\right\}\end{aligned} \tag{18}$$

と書ける．よって点 C の鉛直変位は

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{CV}} &= \frac{\partial U^*}{\partial P} \\ &= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^\ell \frac{P}{4}(3\ell - x_1)^2\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^\ell Px_2^2\,\mathrm{d}x_2\right\} \\ &= \frac{23P\ell^3}{12EI}\end{aligned} \tag{19}$$

と求められる．

δ_{CH} を単位荷重法で求める

点 C に水平右向きに単位の荷重 $\overline{1}$ を作用させた場合の曲げモーメント分布は

$$\overline{M}(x_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - x_1) \tag{20}$$

$$\overline{M}(x_2) = 0 \tag{21}$$

と書ける．よって点 C の水平変位は，単位の荷重 $\overline{1}$ の向き，つまり右向きを正として

$$\delta_{\mathrm{CH}} = \int_0^\ell \frac{M(x_1)\overline{M}(x_1)}{EI}\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^\ell \frac{M(x_2)\overline{M}(x_2)}{EI}\,\mathrm{d}x_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{EI}\int_0^\ell \left\{-\frac{P}{2}(3\ell - x_1)\right\}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - x_1)\right\} \mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{P\ell^3}{\sqrt{3}EI} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

と求められる．

δ_{CH} を Castigliano の定理で求める

点 C に水平右向きに荷重 $\hat{P}$ を作用させた場合の曲げモーメント分布は

$$
M_{\hat{P}}(x_1) = -\frac{\sqrt{3}\hat{P}}{2}(\ell - x_1) \qquad (23)
$$

$$
M_{\hat{P}}(x_2) = 0 \qquad (24)
$$

である．これらを式 (13)，(14) と重ね合わせることで，問題の梁の点 C に水平右向きに荷重 $\hat{P}$ を作用させたときの曲げモーメントとそれらの偏微分が

$$
\hat{M}(x_1) = -\frac{P}{2}(3\ell - x_1) - \frac{\sqrt{3}\hat{P}}{2}(\ell - x_1) \qquad (25)
$$

$$
\hat{M}(x_2) = -Px_2 \qquad (26)
$$

$$
\frac{\partial \hat{M}(x_1)}{\partial \hat{P}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - x_1) \qquad (27)
$$

$$
\frac{\partial \hat{M}(x_2)}{\partial \hat{P}} = 0 \qquad (28)
$$

と求められる．またこの系の補ひずみエネルギーは

$$
U^* = \int_0^\ell \frac{\{\hat{M}(x_1)\}^2}{2EI}\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^\ell \frac{\{\hat{M}(x_2)\}^2}{2EI}\,\mathrm{d}x_2 \qquad (29)
$$

である．微分の連鎖率 $\dfrac{\partial U^*}{\partial \hat{P}} = \dfrac{\partial U^*}{\partial \hat{M}}\dfrac{\partial \hat{M}}{\partial \hat{P}}$ に式 (25) から (29) を用い，仮想的に与えた荷重を $\hat{P} = 0$ とすることで点 C の水平変位は

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{CH}} &= \left.\frac{\partial U^*}{\partial \hat{P}}\right|_{\hat{P}=0} = \left.\left(\frac{\partial U^*}{\partial \hat{M}}\frac{\partial \hat{M}}{\partial \hat{P}}\right)\right|_{\hat{P}=0} = \int_0^\ell \left.\left(\frac{\hat{M}_1}{EI}\frac{\partial \hat{M}_1}{\partial \hat{P}}\right)\right|_{\hat{P}=0} \mathrm{d}x_1 + \int_0^\ell \left.\left(\frac{\hat{M}_2}{EI}\frac{\partial \hat{M}_2}{\partial \hat{P}}\right)\right|_{\hat{P}=0} \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{EI}\int_0^\ell \left\{-\frac{P}{2}(3\ell - x_1)\right\}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - x_1)\right\} \mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{P\ell^3}{\sqrt{3}EI} \qquad (30)
\end{aligned}
$$

と求められる．