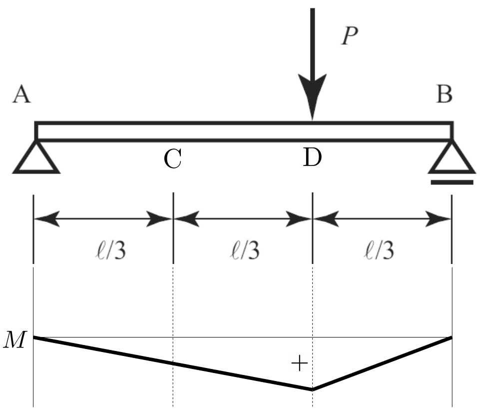
構造解析学及び同演習 課題 06 解答例

問題

図に示す梁（曲げ剛性は EI で一定）の θ_A，δ_C，δ_D，θ_C，θ_D を，単位荷重法を用いて求めよ．

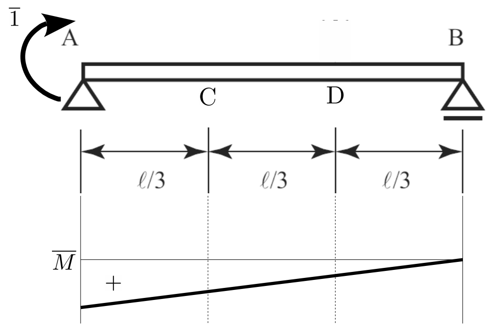


この梁の曲げモーメント分布は

$$M = \begin{cases} \dfrac{1}{3}Px & \left(0 \le x \le \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ \dfrac{2}{3}P\left(\ell - x\right) & \left(\dfrac{2}{3}\ell \le x \le \ell\right) \end{cases}$$

である．

θ_A



点 A に単位モーメント $\overline{1}$ を反時計回りに作用させたときの曲げモーメント分布は

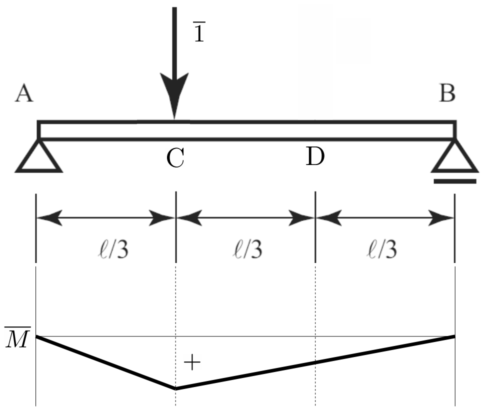
$$\overline{M} = -\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

となる．よって点 A のたわみ角は

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{A}} &= \int_0^{\ell} \frac{M\overline{M}}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\frac{2}{3}\ell} \frac{1}{3}Px\left\{-\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right\}\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell} \frac{2}{3}P(\ell - x)\left\{-\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right\}\mathrm{d}x\right] \\ &= -\frac{4P\ell^2}{81EI}\end{aligned}$$

と求められる．

δ_{C}



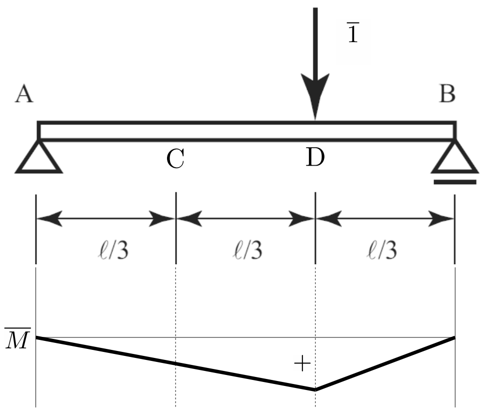
点 C に単位荷重 $\overline{1}$ を鉛直下向きに作用させたときの曲げモーメント分布は

$$\overline{M} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x & \left(0 \le x \le \dfrac{1}{3}\ell\right) \\ \dfrac{1}{3}(\ell - x) & \left(\dfrac{1}{3}\ell \le x \le \ell\right) \end{cases}$$

となる．よっ点 C の鉛直変位は

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{C}} &= \int_0^{\ell} \frac{M\overline{M}}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{1}{3}\ell} \frac{1}{3}Px \cdot \frac{2}{3}x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell} \frac{1}{3}Px \cdot \frac{1}{3}(\ell - x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell} \frac{2}{3}P(\ell - x) \cdot \frac{1}{3}(\ell - x)\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{7P\ell^3}{486EI}\end{aligned}$$

と求められる．



δ_D

点 D に単位荷重 $\overline{1}$ を鉛直下向きに作用させたときの曲げモーメント分布は

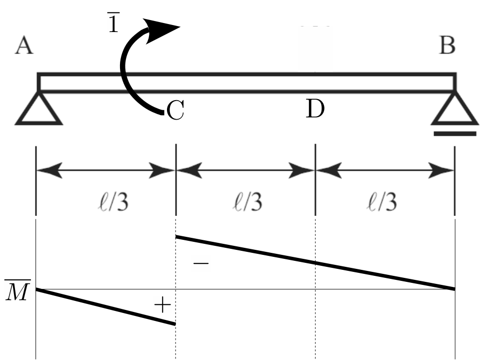
$$\overline{M} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ \dfrac{2}{3}(\ell - x) & \left(\dfrac{2}{3}\ell \leq x \leq \ell\right) \end{cases}$$

となる．よっ点 D の鉛直変位は

$$\begin{aligned} \delta_D &= \int_0^\ell \frac{M\overline{M}}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{2}{3}\ell} \frac{1}{3}Px \cdot \frac{1}{3}x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell} \frac{2}{3}P(\ell - x) \cdot \frac{2}{3}(\ell - x)\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{4P\ell^3}{243EI} \end{aligned}$$

と求められる．

θ_C



点 C に単位モーメント $\overline{1}$ を反時計回りに作用させたときの曲げモーメント分布は

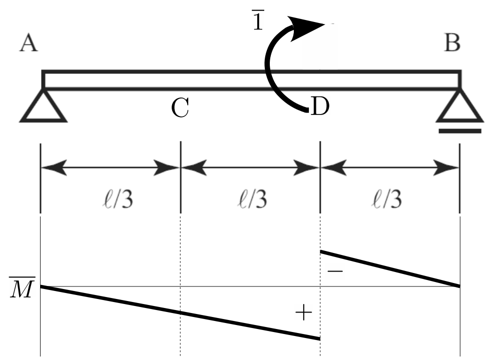
$$\overline{M} = \begin{cases} \dfrac{x}{\ell} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}\ell\right) \\ -\left(1 - \dfrac{x}{\ell}\right) & \left(\dfrac{1}{3}\ell \leq x \leq \ell\right) \end{cases}$$

となる．よって点 C のたわみ角は

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{C}} &= \int_0^{\ell} \frac{M\overline{M}}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\frac{1}{3}\ell} \frac{1}{3}Px\,\frac{x}{\ell}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell} \frac{1}{3}P(\ell - x)\left\{-\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right\}\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell} \frac{2}{3}P(\ell - x)\left\{-\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right\}\mathrm{d}x\right] \\ &= -\frac{5P\ell^2}{162EI}\end{aligned}$$

と求められる．

θ_{D}



点 D に単位モーメント $\overline{1}$ を反時計回りに作用させたときの曲げモーメント分布は

$$\overline{M} = \begin{cases} \dfrac{x}{\ell} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ -\left(1 - \dfrac{x}{\ell}\right) & \left(\dfrac{2}{3}\ell \leq x \leq \ell\right) \end{cases}$$

となる．よって点 D のたわみ角は

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{D}} &= \int_0^{\ell} \frac{M\overline{M}}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\frac{2}{3}\ell} \frac{1}{3}Px\,\frac{x}{\ell}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell} \frac{2}{3}P(\ell - x)\left\{-\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right\}\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{2P\ell^2}{81EI}\end{aligned}$$

と求められる．

課題 03 との比較

課題 03 では弾性曲線方程式により，この問題と同じ梁のたわみ曲線 $v(x)$ を求めた．この $v(x)$ およびそれを微分して求めたたわみ角の関数を用いてそれぞれの点における鉛直変位やたわみ角を求めても，今回導いた値と同じ結果を得ることができる．