構造解析学及び同演習

課題03 解答例

問 2

図1に示すはり（曲げ剛性は EI で一定）のたわみを求めよ．また，荷重載荷点のたわみとたわみ角を求めよ．

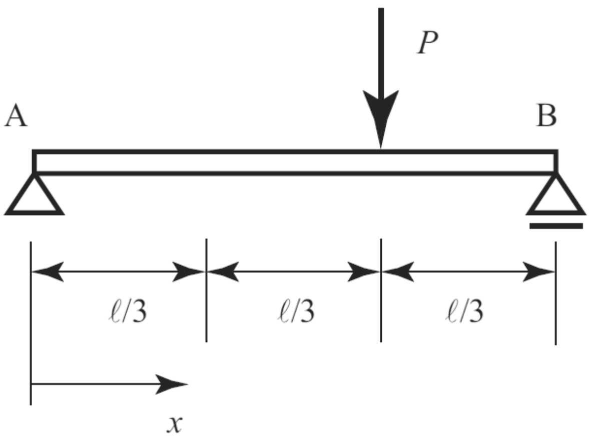

図2

微分方程式

図2の梁には分布荷重が作用していないから，たわみに関する微分方程式は

$$v''''(x) = 0 \tag{1}$$

である．これより，たわみ曲線の式は

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) = \dfrac{\ell^3}{EI}\left\{c_1\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 + c_2\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + c_3\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + c_4\right\} & \left(0 \le x \le \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ v_2(x) = \dfrac{\ell^3}{EI}\left\{c_5\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 + c_6\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + c_7\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + c_8\right\} & \left(\dfrac{2}{3}\ell \le x \le \ell\right) \end{cases} \tag{2}$$

と書ける．また，たわみ角と曲げモーメント，せん断力は

$$\theta(x) = -v'(x) = \begin{cases} -v_1'(x) = -\dfrac{\ell^2}{EI}\left\{3c_1\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + 2c_2\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + c_3\right\} & \left(0 \le x \le \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ -v_2'(x) = -\dfrac{\ell^2}{EI}\left\{3c_5\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + 2c_6\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + c_7\right\} & \left(\dfrac{2}{3}\ell \le x \le \ell\right) \end{cases} \tag{3}$$

$$M(x) = -EIv''(x) = \begin{cases} -EIv_1''(x) = -\ell\left\{6c_1\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + 2c_2\right\} & \left(0 \le x \le \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ -EIv_2''(x) = -\ell\left\{6c_5\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + 2c_6\right\} & \left(\dfrac{2}{3}\ell \le x \le \ell\right) \end{cases} \tag{4}$$

$$Q(x) = -EIv'''(x) = \begin{cases} -EIv_1'''(x) = -6c_1 & \left(0 \le x \le \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ -EIv_2'''(x) = -6c_5 & \left(\dfrac{2}{3}\ell \le x \le \ell\right) \end{cases} \tag{5}$$

と表せる．

境界条件

図 2 の梁の両端はヒンジ支点である．よって両端における境界条件は

$$v(0) = 0 \tag{6}$$

$$v(\ell) = 0 \tag{7}$$

$$M(0) = -EIv''(0) = 0 \tag{8}$$

$$M(\ell) = -EIv''(\ell) = 0 \tag{9}$$

である．また， $x = \dfrac{2}{3}\ell$ の位置に集中荷重が作用している．したがってこの点においては

$$v_1\left(\frac{2}{3}\ell\right) = v_2\left(\frac{2}{3}\ell\right) \tag{10}$$

$$\theta_1\left(\frac{2}{3}\ell\right) = \theta_2\left(\frac{2}{3}\ell\right) \tag{11}$$

$$M_1\left(\frac{2}{3}\ell\right) = M_2\left(\frac{2}{3}\ell\right) \tag{12}$$

$$Q_1\left(\frac{2}{3}\ell\right) = Q_2\left(\frac{2}{3}\ell\right) + P \tag{13}$$

という条件が得られる．

なお，式 (6)， (7)， (10)， (11) のように，たわみやたわみ角を与える境界条件を幾何学的境界条件や Dirichlet 条件などという．また，式 (8)， (9)， (12)， (13) のように，境界における力学的な性質を与える条件を力学的境界条件や Neumann 条件などという．

積分定数に関する連立方程式

式 (2) から (4) に境界条件を与えることで，積分定数に関する連立方程式

$$
\begin{cases}
c_4 = 0 \\
c_5 + c_6 + c_7 + c_8 = 0 \\
2c_2 = 0 \\
6c_5 + 2c_6 = 0 \\
\dfrac{8}{27}c_1 + \dfrac{4}{9}c_2 + \dfrac{2}{3}c_3 + c_4 = \dfrac{8}{27}c_5 + \dfrac{4}{9}c_6 + \dfrac{2}{3}c_7 + c_8 \\
\dfrac{4}{3}c_1 + \dfrac{4}{3}c_2 + c_3 = \dfrac{4}{3}c_5 + \dfrac{4}{3}c_6 + c_7 \\
4c_1 + 2c_2 = 4c_5 + 2c_6 \\
-6c_1 = -6c_5 + P
\end{cases}
\tag{14}
$$

が得られる．これを解くと積分定数は

$$
c_1 = -\frac{1}{18}P, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{4}{81}P, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{1}{9}P, \quad c_6 = -\frac{1}{3}P, \quad c_7 = \frac{22}{81}P, \quad c_8 = -\frac{4}{81}P \tag{15}
$$

と求められる．したがってたわみ曲線は

$$
v(x) = \begin{cases}
v_1(x) = \dfrac{P\ell^3}{EI}\left\{-\dfrac{1}{18}\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 + \dfrac{4}{81}\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\} & \left(0 \le x \le \dfrac{2}{3}\ell\right) \\
v_2(x) = \dfrac{P\ell^3}{EI}\left\{\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + \dfrac{22}{81}\left(\dfrac{x}{\ell}\right) - \dfrac{4}{81}\right\} & \left(\dfrac{2}{3}\ell \le x \le \ell\right)
\end{cases}
\tag{16}
$$

となる．

また載荷点のたわみは

$$
v\left(\frac{2}{3}\ell\right) = \frac{4P\ell^3}{243EI} \tag{17}
$$

である．回転角については

$$
v_1'(x) = \frac{P\ell^2}{EI}\left\{-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{4}{81}\right\} \tag{18}
$$

であるから，載荷点の回転角は

$$
\theta\left(\frac{2}{3}\ell\right) = -v_1'\left(\frac{2}{3}\ell\right) = \frac{2P\ell^2}{81EI} \tag{19}
$$

である．

別解

力のつり合いにより図 2 の梁の曲げモーメント分布を求めると

$$
M(x) = \begin{cases}
M_1(x) = \dfrac{P}{3}x & \left(0 \le x \le \dfrac{2}{3}\ell\right) \\
M_2(x) = \dfrac{2}{3}P(\ell - x) & \left(\dfrac{2}{3}\ell \le x \le \ell\right)
\end{cases}
\tag{20}
$$

となる．これは先の式 (4) に積分定数の解 (15) を代入した結果とも整合する．これを積分してたわみ角とたわみ曲線の式を求めると

$$\theta(x) = -v'(x) = \frac{\int M(x)\,\mathrm{d}x}{EI} = \begin{cases} -v_1'(x) = \dfrac{P\ell^2}{6EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + C_1\right\} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ -v_2'(x) = -\dfrac{P\ell^2}{3EI}\left\{\left(\dfrac{\ell - x}{\ell}\right)^2 + C_3\right\} & \left(\dfrac{2}{3}\ell \leq x \leq \ell\right) \end{cases} \tag{21}$$

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) = -\dfrac{P\ell^3}{18EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 + 3C_1\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + C_2\right\} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ v_2(x) = -\dfrac{P\ell^3}{9EI}\left\{\left(\dfrac{\ell - x}{\ell}\right)^3 - 3C_3\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + C_4\right\} & \left(\dfrac{2}{3}\ell \leq x \leq \ell\right) \end{cases} \tag{22}$$

となる．未知の積分定数は 4 つであり，境界条件は式 (6)，(7)，(10)，(11) の 4 つの幾何学的境界条件を使えばよい．そうすることで積分定数に関する連立方程式は

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ -3C_3 + C_4 = 0 \\ \dfrac{4}{27} + C_1 - \dfrac{1}{2}C_2 = \dfrac{1}{27} - 2C_3 + C_4 \\ -\dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{2}C_1 = \dfrac{1}{9} + C_3 \end{cases} \tag{23}$$

となり，積分定数はそれぞれ

$$C_1 = -\frac{8}{27}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{5}{27}, \quad C_4 = -\frac{5}{9} \tag{24}$$

と求められる．したがってたわみ曲線は

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) = -\dfrac{P\ell^3}{18EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 - \dfrac{8}{9}\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}\ell\right) \\ v_2(x) = -\dfrac{P\ell^3}{9EI}\left\{\left(\dfrac{\ell - x}{\ell}\right)^3 + \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{x}{\ell}\right) - \dfrac{5}{9}\right\} & \left(\dfrac{2}{3}\ell \leq x \leq \ell\right) \end{cases} \tag{25}$$

となり，式 (16) と一致する．