構造解析学及び同演習

課題 02 解答例

問 1

図 1 に示すはり（曲げ剛性は EI で一定）のたわみを求めよ．また，右端の支点におけるはりの回転角を求めよ．

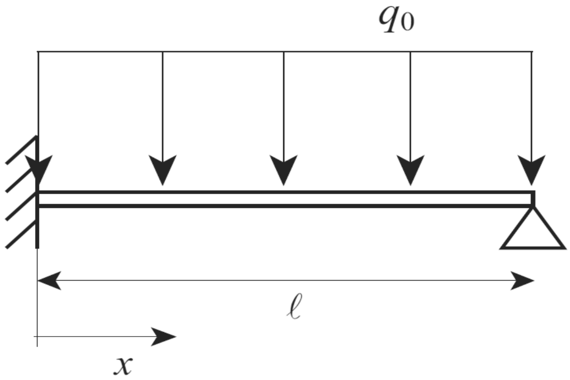

図 1

境界条件

図 1 の梁の左端は埋め込み，右端はヒンジである．したがってたわみ曲線を微分方程式で解くときに必要となる境界条件は

$$v(0) = 0 \tag{1}$$

$$v(\ell) = 0 \tag{2}$$

$$\theta(0) = -v'(0) = 0 \tag{3}$$

$$M(0) = -EIv''(\ell) = 0 \tag{4}$$

である．

微分方程式

たわみに関する微分方程式を求める．梁全体にわたって分布荷重 q_0 が作用しているので

$$v''''(x) = \frac{q_0}{EI} \tag{5}$$

が成り立つ．これを不定積分し，解きやすいように x の項を ℓ で無次元化すると，たわみ曲線の式とそれを微分した式

$$v(x) = \frac{q_0\ell^4}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 + c_1\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + c_2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + c_3\left(\frac{x}{\ell}\right) + c_4\right\} \tag{6}$$

$$v'(x) = \frac{q_0\ell^3}{24EI}\left\{4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 3c_1\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 2c_2\left(\frac{x}{\ell}\right) + c_3\right\} \tag{7}$$

$$v''(x) = \frac{q_0\ell^2}{12EI}\left\{6\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 3c_1\left(\frac{x}{\ell}\right) + c_2\right\} \tag{8}$$

が得られる．

積分定数に関する連立方程式

これらの式 (6) から (8) に境界条件を与えることで，以下のような積分定数に関する連立方程式が求められる．

- 式 (1)： $v(0) = 0$ から

$$c_4 = 0 \tag{9}$$

- 式 (2)： $v(\ell) = 0$ から

$$1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \tag{10}$$

- 式 (3)： $v'(0) = 0$ から

$$c_3 = 0 \tag{11}$$

- 式 (4) $\to v''(0) = 0$ から

$$6 + 3c_1 + c_2 = 0 \tag{12}$$

式 (9) から (12) の連立方程式を解くと，

$$c_1 = -\frac{5}{2}, \quad c_2 = \frac{3}{2}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0$$

が得られ，求めるたわみは

$$v(x) = \frac{q_0\ell^4}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{5}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\} \tag{13}$$

となる．

またこれより回転角は

$$\theta(x) = -v'(x) = -\frac{q_0\ell^3}{24EI}\left\{4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{15}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\} \tag{14}$$

と求められる．したがって右端の支点におけるはりの回転角は

$$\theta(\ell) = \frac{q_0\ell^3}{48EI} \tag{15}$$

である．