# 構造解析におけるモーメントとデルタ関数

I.Saiki

モーメントは，偶力としてモデル化するのが現実に即しているであろう．図ははりの一部に，2 つの大きさが等しく，かつ，向きが逆である力の組が作用した状況を表しているが，このような力の組を偶力 (couple) とよび，2 つの力によるモーメント $M = P\mathrm{d}x$ の $M$ を一定に保ったまま距離 $\mathrm{d}x$ を小さくしていった極限が集中モーメントである．したがって，モーメントを分布荷重で表そうとすると，2 つの集中荷重に相当するデルタ関数で表すことができそうである．モーメントの作用位置を $x = a$ とすると，対応する分布荷重は

$$q(x) = P\delta(x-a) - P\delta(x-(a+\mathrm{d}x)) \tag{1}$$

と表せる．$P = \frac{M}{\mathrm{d}x}$ とし，$\mathrm{d}x \to 0$ の極限を考えると

$$q(x) = \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{M}{\mathrm{d}x}\left\{\delta(x-a) - \delta(x-(a+\mathrm{d}x))\right\} = M \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{\delta(x-a) - \delta(x-a-\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

を得る．上式最右辺は $\delta$ の微分になっているので

$$q(x) = M\,\frac{\mathrm{d}\,\delta(x-a)}{\mathrm{d}x} \tag{3}$$

と表せ，結局，集中モーメントはデルタ関数の微分で表されることがわかった．なお，デルタ関数の微分の性質としては，なめらかな関数 $v(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\,\frac{\mathrm{d}\,\delta(x-a)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} \tag{4}$$

が成り立つことが挙げられる．このことは，部分積分を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\,\frac{\mathrm{d}\,\delta(x-a)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \Big[v(x)\delta(x-a)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}x}\,\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} \tag{5}$$

と確認できるだろう．

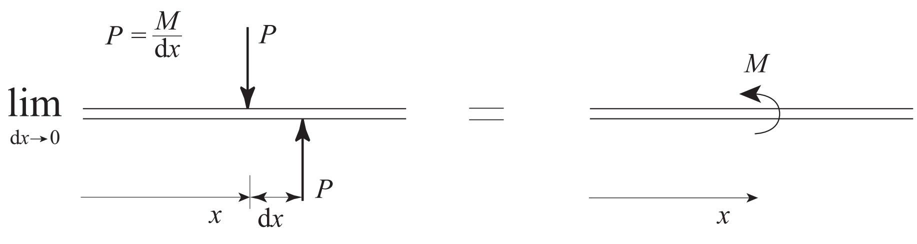


**図: 偶力によるモーメント**

単位荷重法では，つり合い系の分布荷重として，たわみ角を求めたい点（たとえば $x = a$）に単位の集中モーメントを考えるが，これは補仮想仕事式の分布外力項が

$$\int_0^{\ell} v(x)\overline{q}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ell} v(x)\frac{\mathrm{d}\,\delta(x-a)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} = \theta(a) \tag{6}$$

となることをもくろんでいるのである．