構造解析における集中荷重とデルタ関数

I.Saiki

初学者にとって，分布荷重は扱いづらく，集中荷重はやさしいものであると思われる．しかしながら，そもそも，面積（長さ）ゼロの区間に有限な大きさの荷重を作用させると，圧力としては無限大になるので，そのような集中荷重は非現実的なモデルであると気づくだろう．図–1に，分布荷重の積分値（総量）P を一定にして，載荷幅を $2b$ から b，そして無限小にした場合の分布荷重の大きさを模式的に示した．載荷幅をゼロにした分布荷重，すなわち集中荷重は，数学的には超関数であるデルタ関数で表される．デルタ関数 $\delta(x)$ とは，$x=0$ の点以外はいたるところゼロであるが，$x=0$ の点で値そのものは定義されていない．しかしながら，$x=0$ を含む領域を積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{1}$$

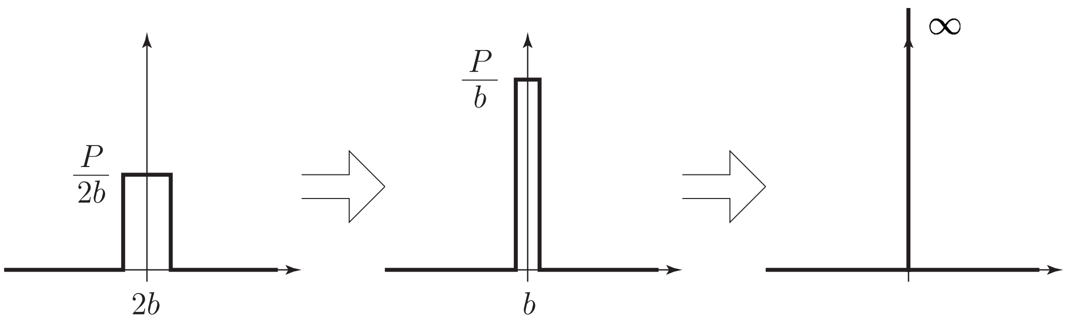
のようにイチとなるような関数（超関数なので，厳密には関数ではなく，分布である）である．デルタ関数のに関して知っておくと便利なもう一つの性質は滑らかな関数 $v(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = v(a) \tag{2}$$

が成り立つことが挙げられる．以上から，$x=a$ に作用する集中荷重 P は，分布荷重 $q(x)$ として

$$q(x) = P\delta(x-a) \tag{3}$$

と表すことができる．



図– 1: 荷重の総量を変えずに分布荷重の幅を小さくすると...