

モデルの修正が不要な影響線解析の 平面シェル要素への適用

斉木 功¹・三井 涼平²・横山 薫³・鈴木 俊光⁴・橋本 幹司⁵

¹正会員 東北大学大学院准教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail: isao.saiki.a4@tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

²非会員 研究当時 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻

現 東日本高速道路株式会社 関東支社 千葉工事事務所 (〒261-0014 千葉県千葉市美浜区若葉 2-9-3)

E-mail: r.mitsui.aa@e-nexco.co.jp

³正会員 エム・エムブリッジ株式会社 計画部 (〒103-0006 東京都中央区日本橋富沢町 9-19)

E-mail: yokoyama.kaoru@mm-bridge.co.jp

⁴正会員 エム・エムブリッジ株式会社 計画部 (〒103-0006 東京都中央区日本橋富沢町 9-19)

E-mail: suzuki.toshimitsu@mm-bridge.co.jp

⁵非会員 エム・エムブリッジ株式会社 技術部 (〒733-0036 広島県広島市西区観音新町 1-20-24)

E-mail: hashimoto.tsuyoshi@mm-bridge.co.jp

橋梁のように移動荷重を受ける構造物の設計において、着目点の影響線は必要不可欠な概念である。有限要素モデルに対して影響線を求めるためには荷重作用範囲の節点数と同じ数の解析が必要となる。Müller-Breslau の原理を有限要素解析に適用することも可能であるが、着目点に不連続変位を与えるため、手間のかかるモデルの修正が必要となる。これに対し、著者らはモデルの修正が不要で汎用有限要素解析コードへの実装が容易な影響線の解析手法を過去に提案した。本論文はこの手法を橋梁の解析モデルでよく用いられる平面シェル要素に適用する方法を提案する。単純な板曲げおよび鋼床版を有する鋼鈹桁橋のモデルに対して、提案手法により求められた影響線を通常の単位荷重による有限要素解析結果と比較することで提案手法の妥当性を確認した。

Key Words: reciprocal theory, Müller-Breslau, finite element model, influence line, shell element

1. はじめに

橋梁のように不確定な移動荷重を受ける構造物の設計において影響線は必要不可欠な概念である。実際に、設計においては、構造解析における断面力の影響線が用いられる。格子解析とも呼ばれる骨組要素による設計においては、単位荷重を載荷位置を変えながら載荷する方法で近似的に影響線を求める方法が用いられている。

一方で、連続体要素やシェル要素を用いた 3 次元有限要素モデルの影響線を単位荷重載荷で求めるためには、荷重の載荷位置を変化させた解析ケースが床版面の節点数分必要になること、およびその結果から着目点応答を荷重載荷位置と関連付ける処理を行わなくてはならない。例えば、森ら¹⁾は鋼床版の疲労検討のために 3 次元有限要素モデルの 1000 点を超える載荷位置に対する解析を行っている。同様の

目的で、横関ら²⁾や横山ら³⁾は単位荷重ではなくダブルタイヤを模した接地面への等分布荷重位置を離散的に移動させた有限要素解析を行っている。

一方、構造解析における影響線の解析手法として知られる Müller-Breslau の原理は、有限要素モデルにも適用可能である⁴⁾⁻⁶⁾。この方法では荷重位置を変更する必要がなく、一つの着目点に対して一度の解析を実行するだけでよく、着目点の応答を床版面に関連付ける処理も不要であり、計算量を大幅に低減することが可能である。しかし、原理的に内力に不連続性を持たせる必要があるため、着目点を 2 重節点化する必要がある。この操作は、影響線を求めたい着目点ごとに行う必要がある、改善の余地があると考えられる。Müller-Breslau の原理とは別なアプローチとして、adjoint 法に基づく影響線の解法も提案されている^{7),8)}が、汎用有限要素解析コードへの直接的な実装には適していない⁹⁾。

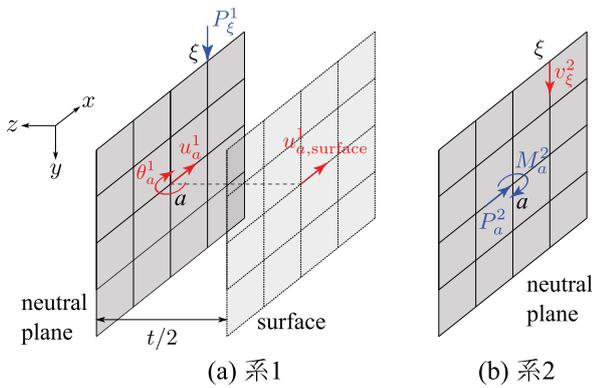


図-1 節点の板表面における変位の影響線の解析

これに対し、著者らは相反定理を有限要素離散化した構造解析の問題に直接適用する影響線解析手法を提案している¹⁰⁾。この方法は Müller-Breslau の原理に基づく方法の利点を有し、かつ有限要素モデルの修正が不要で汎用有限要素解析コードへの実装も容易である。文献¹⁰⁾では連続体ソリッド要素のみに対する定式化と検証例が述べられている。本論文では、この方法を基に、橋梁の有限要素モデルによく利用されるシェル要素でモデル化された有限要素モデルの影響線解析を行うための定式化と具体的な方法を述べることで、単位荷重に基づく結果との比較によりその妥当性を示すことを目的とする。

2. 平面シェル要素における影響線の解析

平面シェル要素で離散化された有限要素モデルを考える。平面シェル要素では、曲げの影響を考慮するために板表面におけるひずみや応力を求める必要がある。以下では板表面における変位の影響線から、板表面におけるひずみ・応力の影響線を求める方法について順に述べる。

(1) 板表面における変位の影響線

まず、図-1に示すような有限要素モデルで、節点 a の板表面における x 方向変位 $u_{a,surface}^1$ の影響線を求める方法について考える。図中の系1と2は同じ有限要素モデルである。系1には任意位置にある節点 ξ に y 方向単位荷重 $P_\xi^1 = 1$ が作用しており、系2には節点 a に x 方向荷重 P_a^2 と y 軸まわり曲げモーメント M_a^2 が作用している。節点 ξ の y 方向の変位を v_ξ とし、節点 a の x 方向変位を u_a 、 y 軸まわり回転角を θ_a とする。板厚を t とすると、図中 'surface' と示した z 軸負の向きの板表面における変位 $u_{a,surface}$ は

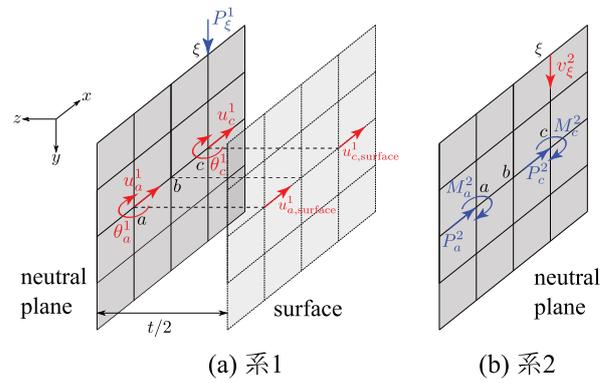


図-2 節点の板表面におけるひずみの影響線の解析

$$u_{a,surface} = u_a - \frac{t}{2}\theta_a \quad (1)$$

となる。このことと、相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + \theta_a^1 M_a^2 = v_\xi^2 P_\xi^1 \quad (2)$$

より、節点 a に以下の荷重

$$P_a^2 = 1, \quad M_a^2 = -\frac{t}{2} \quad (3)$$

を与えたときの各節点の y 方向変位が着目点 a の板表面における変位 $u_{a,surface}$ の影響線となることが示される。

(2) 板表面におけるひずみの影響線

変位の影響線が得られれば、文献¹⁰⁾で提案されている方法でひずみ・応力の影響線を求めることができる。例として、図-2に示すような有限要素モデルで、節点 b の板表面における x 方向の垂直ひずみ $(\epsilon_x)_{b,surface}$ の影響線を求める方法を述べる。簡単のため、要素はすべて辺長 l の正方形で板厚 t の平面シェル要素とする。これ以外の場合でも、有限要素離散化を用いる限り任意点の変位は節点変位で表現できることから、以下の手法は適用可能である。

系1には任意位置にある節点 ξ に y 方向単位荷重 $P_\xi^1 = 1$ が作用しており、系2には節点 b の x 方向に隣接する節点 a と c に x 方向荷重 P_a^2, P_c^2 、 y 軸まわり曲げモーメント M_a^2, M_c^2 が作用している。節点 ξ の y 方向の変位を v_ξ とし、節点 a, c の x 方向の変位を u_a, u_c 、 y 軸まわりの回転角を θ_a, θ_c とする。系1と2に相反定理を適用すると

$$u_a^1 P_a^2 + \theta_a^1 M_a^2 + u_c^1 P_c^2 + \theta_c^1 M_c^2 = v_\xi^2 P_\xi^1 \quad (4)$$

が成立する。したがって、節点 a, c の荷重およびモーメントを

$$\begin{aligned} M_c^2 &= -M_a^2 = -\frac{t}{4l} \\ P_c^2 &= -P_a^2 = \frac{1}{2l} \end{aligned} \quad (5)$$

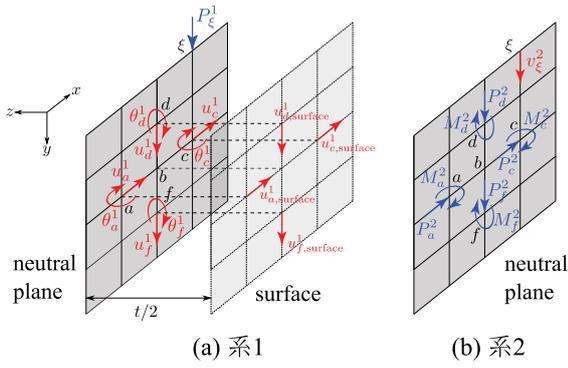


図-3 節点の板表面における応力の影響線の解析

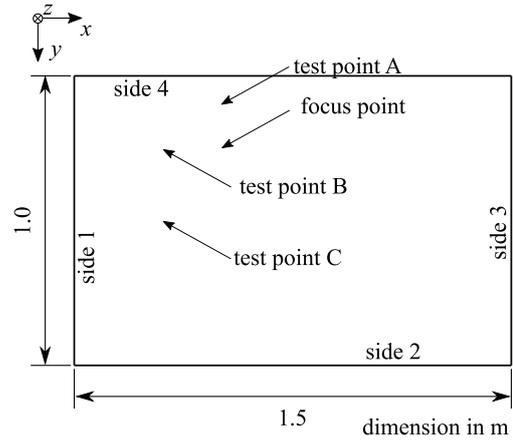


図-4 4辺単純支持板

とすると、相反定理 (4) は式 (1) より

$$\frac{u_{c,surface}^1 - u_{a,surface}^1}{2\ell} = v_{\xi}^2 \quad (6)$$

となり、上式の左辺を節点 b におけるひずみとみなすと式 (5) の荷重を載荷した系 2 の各節点の y 方向変位が節点 b の板表面における x 方向垂直ひずみ $(\epsilon_x)_{b,surface}$ の影響線となる。

(3) 板表面における応力の影響線

平板の問題は平面応力状態であり、その構成関係は垂直応力を σ_x, σ_y 、せん断応力を τ_{xy} 、垂直ひずみを ϵ_x, ϵ_y 、せん断ひずみを γ_{xy} とすると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

である。ここに、 E は Young 率、 ν は Poisson 比である。したがって、垂直応力の影響線を得るためには 2 成分の垂直ひずみの影響線が必要となる。

ここで、前節で考えた有限要素モデルで、節点 b の板表面における x 方向の垂直応力 $(\sigma_x)_{b,surface}$ の影響線を求める方法を考える。前節で x 方向の垂直ひずみ $(\epsilon_x)_{b,surface}$ の影響線を求めるには、着目点の x 方向に隣り合う節点の変位の影響線を組み合わせればよいことがわかった。したがって、2 方向の垂直ひずみの影響線を組み合わせることにより垂直応力の影響線を求めることができる。そこで、図-3 に示すように、着目点の x 方向および y 方向に隣り合う節点に荷重および曲げモーメントが作用した状況を考える。

系 1 には任意位置にある節点 ξ に y 方向単位荷重 $P_{\xi}^1 = 1$ が作用している。系 2 には節点 b の x 方向に隣接する節点 a と c に x 方向荷重 P_a^2, P_c^2 、 y 軸まわり曲げモーメント M_a^2, M_c^2 が作用しており、節点 b の y 方向に隣接する節点 d と f に y 方向荷重 P_d^2, P_f^2 、 x 軸まわり曲げモーメント M_d^2, M_f^2 が作用している。

節点 ξ の y 方向の変位を v_{ξ} とし、節点 a, c の x 方向の変位を u_a, u_c 、 y 軸まわりの回転角を θ_a, θ_c 、節点 d, f の y 方向の変位を u_d, u_f 、 x 軸まわりの回転角を θ_d, θ_f とする。系 1 と 2 に相反定理を適用すると

$$\begin{aligned} u_a^1 P_a^2 + \theta_a^1 M_a^2 + u_c^1 P_c^2 + \theta_c^1 M_c^2 \\ + u_d^1 P_d^2 + \theta_d^1 M_d^2 + u_f^1 P_f^2 + \theta_f^1 M_f^2 = v_{\xi}^2 P_{\xi}^1 \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。したがって

$$\begin{aligned} \frac{2}{t} M_a^2 = -\frac{2}{t} M_c^2 = -P_a^2 = P_c^2 = \frac{E}{2\ell(1-\nu^2)} \\ -\frac{2}{t} M_d^2 = \frac{2}{t} M_f^2 = -P_d^2 = P_f^2 = \frac{\nu E}{2\ell(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (9)$$

とすると、相反定理 (8) は式 (1) より

$$\begin{aligned} \frac{u_{c,surface}^1 - u_{a,surface}^1}{2\ell} \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ + \frac{u_{f,surface}^1 - u_{d,surface}^1}{2\ell} \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} = v_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

となる。上式は、式 (7) に示した平面応力の構成関係を考慮すると

$$\frac{E(\epsilon_x)_{b,surface}}{(1-\nu^2)} + \frac{\nu E(\epsilon_y)_{b,surface}}{(1-\nu^2)} = (\sigma_x)_{b,surface} = v_{\xi}^2 \quad (11)$$

となり、式 (9) の荷重を載荷した系 2 の各節点の y 方向変位が節点 b の板表面における x 方向垂直応力 $(\sigma_x)_{b,surface}$ の影響線となる。

3. 4 辺単純支持板の影響線

図-4 に示す 4 辺単純支持板を対象として、本手法による影響線の値を従来法である単位荷重による応答と比較することで本手法の妥当性を確認する。板の大きさは $1.0 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$ 、板厚は 0.01 m 、材料は Young 率 $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 、Poisson 比 $\nu = 0.3$ の

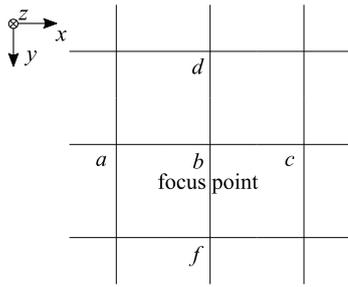


図-5 着目点付近の要素と節点の配置

等方弾性体とした。図中，side 1 および 3 で x, y, z 方向変位と x 軸まわり回転を拘束し，side 2 および 4 で x, y, z 方向変位と y 軸まわり回転を拘束した。平板の左上の板厚中心を座標系の原点とし，着目点を $x = 0.5 \text{ m}, y = 0.25 \text{ m}, z = -0.005 \text{ m}$ の位置とする。

解析対象を 4 辺形双一次アイソパラメトリック平面シェル要素で分割しモデル化した。要素は $0.01 \text{ m} \times 0.01 \text{ m}$ の正方形とし，総要素数は 15,000 要素である。

(1) ひずみの影響線

2(2) で述べたように，図-5 に示す着目点付近の節点に式 (5) のとおり，それぞれ以下の x 方向荷重

$$P_c = -P_a = \frac{1}{2\ell} = 50 \text{ m}^{-1} \quad (12)$$

および y 軸まわりモーメント

$$-M_c = M_a = \frac{t}{4\ell} = -0.25 \quad (13)$$

を与えれば，そのときの各節点の変位が着目点である節点 b の x 方向垂直ひずみの影響線となる。ここで， ℓ は要素長， t は板厚であり， P_α, M_α はそれぞれ節点 α における x 方向荷重および y 軸まわり外力モーメントである。

この解析によって得られた結果から，平板面の z 方向変位，すなわち着目点の x 方向垂直ひずみの影響線コンターを図-6 に示す。この結果の妥当性を確認するために，図-4 に示す A, B, C の 3 点を参照点として選び，通常単位荷重載荷の解析を行い，着目点ひずみとの比較を行う。参照点の座標と参照点に単位荷重を載荷したときの着目点ひずみと，本手法による参照点における影響線の値を表-1 にまとめる。表中の相対差は

$$\text{相対差} = \frac{\text{本手法による解} - \text{単位荷重による解}}{\text{単位荷重による解}} \quad (14)$$

と定義した。表にある通り，本手法は単位荷重を載荷する通常解法による解と比較し， $10^{-3}\%$ 程度の精度で一致している。

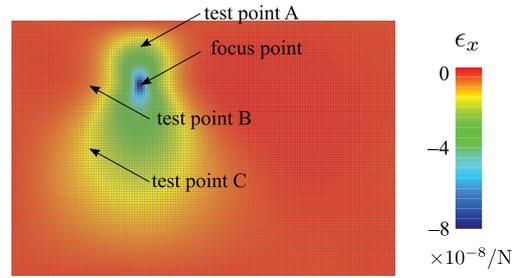


図-6 4 辺単純支持板の x 方向垂直ひずみの影響線

表-1 4 辺単純支持板の x 方向垂直ひずみの影響線 (1/N)

荷重位置	A	B	C
座標 (x, y)	(0.5, 0.1)	(0.3, 0.25)	(0.3, 0.5)
本手法 ($\times 10^{-8}$)	-1.85287	-0.40152	-1.16940
単位荷重 ($\times 10^{-8}$)	-1.85287	-0.40153	-1.16940
相対差%	6.7×10^{-5}	1.5×10^{-3}	-2.6×10^{-4}

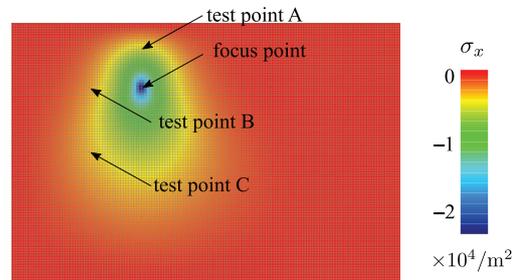


図-7 4 辺単純支持板の x 方向垂直応力の影響線

(2) 応力の影響線

2(3) で述べたように，図-5 に示す着目点付近の節点に式 (9) のとおり，それぞれ以下の x 方向荷重

$$(P_x)_c = -(P_x)_a = \frac{E}{2\ell(1-\nu^2)} = 1.09890 \times 10^{13} \text{ N/m}^3 \quad (15)$$

y 軸まわりモーメント

$$-(M_y)_c = (M_y)_a = \frac{tE}{4\ell(1-\nu^2)} \frac{t}{4\ell} = 5.49451 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad (16)$$

y 方向荷重

$$(P_y)_f = -(P_y)_d = \frac{\nu E}{2\ell(1-\nu^2)} = 3.29670 \times 10^{12} \text{ N/m}^3 \quad (17)$$

x 軸まわりモーメント

$$(M_x)_f = -(M_x)_d = \frac{\nu tE}{4\ell(1-\nu^2)} = 1.64835 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad (18)$$

を与えれば，そのときの各節点の変位が着目点である節点 b の x 方向垂直応力の影響線となる。ここで， $(P_\beta)_\alpha, (M_\beta)_\alpha$ はそれぞれ節点 α における β 方向荷重および β 軸まわり外力モーメントである。

この解析によって得られた結果から，平板面の z

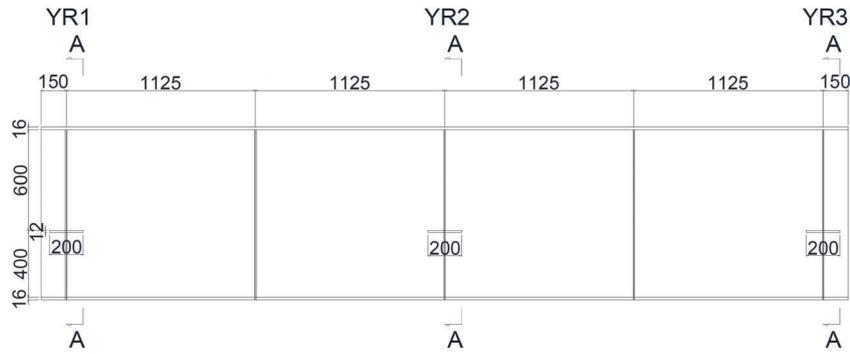


図-8 解析モデルの側面図

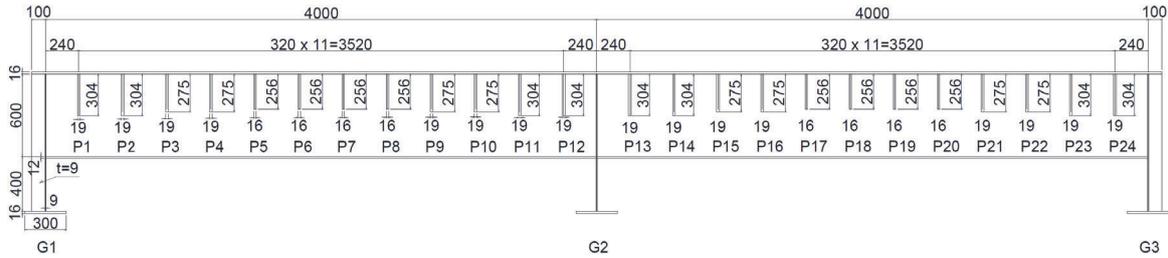


図-9 解析モデルの断面図 (A-A 断面)

方向変位，すなわち着目点の x 方向垂直応力の影響線コンターを図-7 に示す．この結果の妥当性を確認するために，図-4 に示す参照点 A, B, C に通常の単位荷重載荷の解析を行い，着目点応力との比較を行う．各参照点に単位荷重を載荷したときの着目点応力と，本手法による参照点における影響線の値を表-2 にまとめる．表にある通り，本手法は単位荷重を載荷する通常の解法による解と比較し， $10^{-1}\%$ 程度の精度で一致している．

4. 鋼床版を有する鋼桁橋の影響線

鋼床版を有する鋼桁橋の部分モデルを用いて，提案する影響線の解析手法の妥当性を通常の有限要素解析結果と比較することで確認する．

(1) 解析対象と有限要素モデル

文献³⁾ で用いられた鋼床版の改良モデルを解析対象とする．図-8 と図-9 に示すように，対象構造は3本の主桁と3本の横リブからなる部分モデルである．

表-2 4辺単純支持板の x 方向垂直応力の影響線 ($1/m^2$)

荷重位置	A	B	C
本手法 ($\times 10^3$)	-5.10004	-2.88951	-3.40096
単位荷重 ($\times 10^3$)	-5.09538	-2.90474	-3.39907
相対差%	-9.1×10^{-2}	5.2×10^{-1}	-5.5×10^{-2}

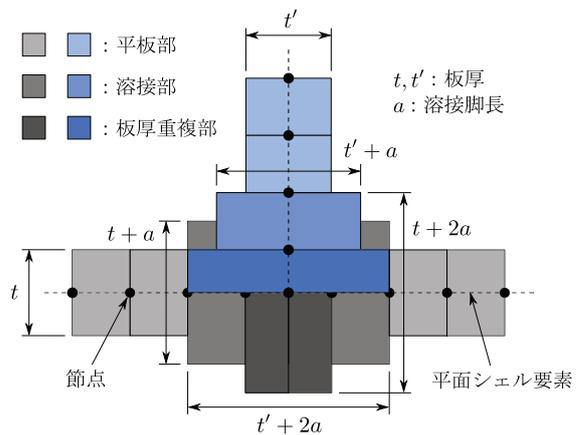


図-10 溶接部の板厚¹⁾

主桁の諸元は，ウェブ高 1,000 mm，ウェブ厚 9 mm，下フランジ幅 300 mm，下フランジ厚 16 mm である．横リブの諸元は，横リブ高 600 mm，ウェブ厚 12 mm，フランジ幅 200 mm，フランジ厚 12 mm である．縦リブは平リブとし，横リブとの交差部は全周溶接されている．それぞれの縦リブサイズは P1, P2, P11~P14, P23, P24 は 304 mm \times 19 mm, P3, P4, P9, P10, P15, P16, P21, P22 は 275 mm \times 19 mm, P5~P8, P17~P20 は 256 mm \times 16 mm である．主桁と主桁隣接縦リブとの間隔は 240 mm，それ以外の縦リブ間隔はすべて 320 mm である．デッキプレート厚は 16 mm である．

材料は均質で Young 率 $E = 2 \times 10^5$ N/mm²，Poisson 比 $\nu = 0.3$ の等方線形弾性体とし，すべての部材を 4 辺形双一次アイソパラメトリック平面シェル要素で

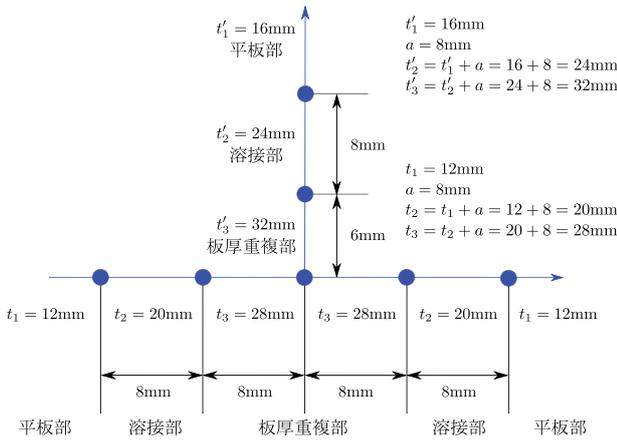


図-11 着目溶接部の板厚設定 (横リブ厚=12mm, 縦リブ厚=16mm)

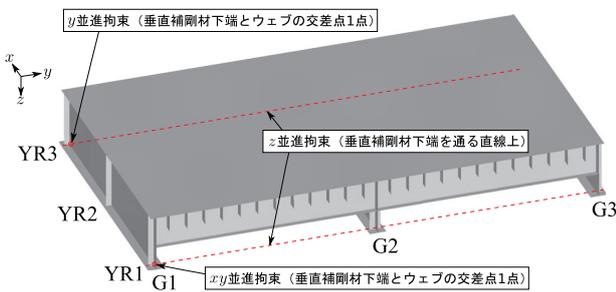


図-12 鋼床版を有する鋼桁橋の有限要素モデル

モデル化した。このとき、総要素数は1,216,498、総節点数は1,215,775となった。溶接部近傍のモデル化は既往の検討¹¹⁾を参考に溶接部の板厚を増厚し、ビードによる剛性の変化を再現した。着目溶接部近傍のモデル化要領を図-10に、実際の板厚設定の一例を図-11に示す。

橋軸方向を x 軸、橋軸直角水平方向を y 軸、鉛直下向きを z 軸とする。図-12に示すように、横リブ YR1 および YR3 の直下を支点とし、主桁の下フランジの z 方向変位を線状に拘束した。そのうち主桁 G1 のウェブ下端と横リブ YR1 との交点の x, y 方向変位、主桁 G1 のウェブ下端と横リブ YR3 との交点の y 方向変位も拘束し、モデル全体の剛体運動を拘束した。

(2) 着目点と荷重の設定

着目点は主桁 G2 に隣接する縦リブ P12 と横リブ YR2 との交差部近傍に位置する2点とした。この点は文献³⁾において疲労照査を行っている点である。図-13に着目点1, 2を赤丸で示した。これらの着目点において、横リブ YR1 側板表面の溶接止端直角方向垂直応力の影響線を求める。平面応力状態の構成関係を考慮して、節点に与える荷重は以下に示すよ

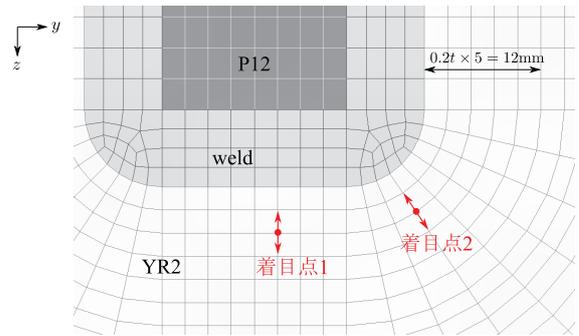


図-13 縦リブ P12 と横リブ YR2 との交差部近傍における着目点

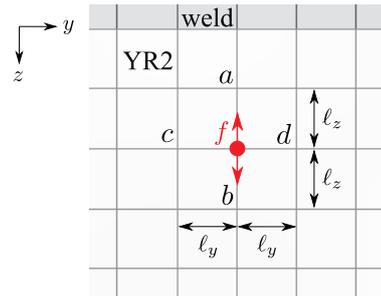


図-14 着目点1付近の要素分割の様子

うに設定した。

着目点1付近の有限要素モデルを図-14に示す。着目点1においては溶接止端直角方向は z 方向に等しい。ここに、 af 間の長さを l_z 、 cf 間の長さを l_y とすると

$$l_y = 2.37500 \text{ mm}, \quad l_z = 2.40000 \text{ mm} \quad (19)$$

であり、 fb は l_z 、 fd は l_y に等しい。横リブ YR2 の板厚を $t = 12 \text{ mm}$ として式(9)から、節点 a, b に z 方向荷重 P_z と y 軸まわりモーメント M_y 、節点 c, d に y 方向荷重 P_y と z 軸まわりモーメント M_z を

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{t}(M_y)_a &= \frac{2}{t}(M_y)_b = -(P_z)_a = (P_z)_b \\
 &= \frac{E}{2l_z(1-\nu^2)} = 4.57876 \times 10^4 \text{ N/mm}^3 \\
 \frac{2}{t}(M_z)_c &= -\frac{2}{t}(M_z)_d = -(P_y)_c = (P_y)_d \\
 &= \frac{\nu E}{2l_y(1-\nu^2)} = 1.38809 \times 10^4 \text{ N/mm}^3
 \end{aligned} \quad (20)$$

と与えれば、そのときの各節点の変位が着目点1の横リブ YR1 側板表面における溶接止端直角方向垂直応力の影響線となる。

着目点2付近の有限要素モデルを図-15に示す。溶接止端直角方向を s 軸、溶接止端方向を t 軸と新たに定義する。図中 af 、 fb は s 軸と平行であるが、 cf 、 fg は t 軸と平行ではない。そこで、節点 f から t 方向に伸ばした直線と隣接する要素辺との交点を

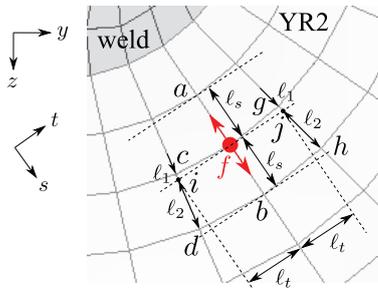


図-15 着目点2付近の要素分割の様子

i, j とし、点 a, f, b, i, j に対して 2(3) で述べた荷重を適用することで応力の影響線を求める。なお、点 i の変位は節点 c, d の変位から、点 j の変位は節点 g, h の変位から有限要素離散化に基づき重み付き平均で表せるので、荷重は節点 c, d および節点 g, h に与えるものとする。 af, if, ci, id 間の長さをそれぞれ l_s, l_t, l_1, l_2 とすると、

$$\begin{aligned} l_s &= 2.40000 \text{ mm}, & l_t &= 2.54608 \text{ mm}, \\ l_1 &= 0.250767 \text{ mm}, & l_2 &= 2.14923 \text{ mm} \end{aligned} \quad (21)$$

であり、 fb は l_s 、 fj は l_t 、 gj は l_1 、 jh は l_2 に等しい。横リブ YR2 の板厚を $t = 12 \text{ mm}$ として節点 a, b に s 方向荷重 P_s と t 軸まわりモーメント M_t 、節点 c, d, g, h に t 方向荷重 P_t と s 軸まわりモーメント M_s を

$$\begin{aligned} -\frac{2}{t}(M_t)_a &= \frac{2}{t}(M_t)_b = -(P_s)_a = (P_s)_b \\ &= \frac{E}{2l_s(1-\nu^2)} = 4.57876 \times 10^4 \text{ N/mm}^3 \\ \frac{2}{t}(M_s)_c &= -\frac{2}{t}(M_s)_g = -(P_t)_c = (P_t)_g \\ &= \frac{l_2}{l_1+l_2} \cdot \frac{\nu E}{2l_t(1-\nu^2)} = 1.15953 \times 10^4 \text{ N/mm}^3 \\ \frac{2}{t}(M_s)_d &= -\frac{2}{t}(M_s)_h = -(P_t)_d = (P_t)_h \\ &= \frac{l_1}{l_1+l_2} \cdot \frac{\nu E}{2l_t(1-\nu^2)} = 1.35290 \times 10^3 \text{ N/mm}^3 \end{aligned} \quad (22)$$

と与えれば、これらの荷重に対する各節点の変位が着目点2の横リブ YR1 側板表面における溶接止端直角方向垂直応力の影響線となる。

(3) 本手法による影響線と妥当性の検証

この解析によって得られた結果から、床版上面の z 方向変位、すなわち着目点1および2の溶接止端直角方向垂直応力の影響線コンターをそれぞれ図-16, 17に示す。図には主桁、横リブおよび縦リブ P12 の位置も示している。これらの図は影響線の値の2次元的な分布を示しており、橋軸直角方向位置を固定し1次元的に見た分布が輪荷重通過時の応力変動と

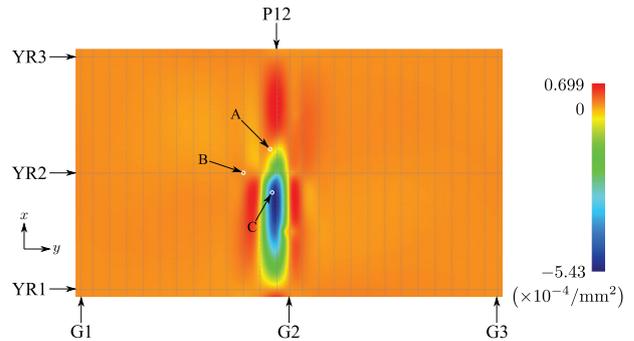


図-16 床版上面での着目点1の応力影響線

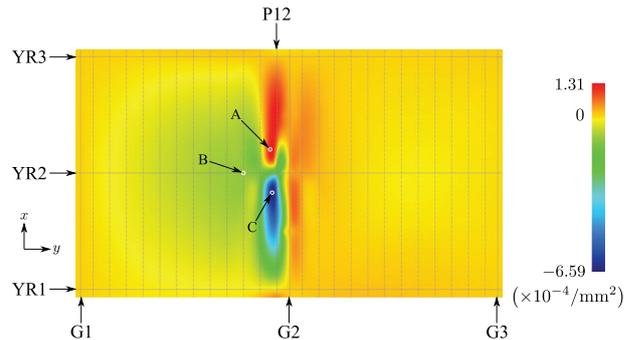


図-17 床版上面での着目点2の応力影響線

なる。

提案手法の妥当性を確認するために、図-16, 17に示す A, B, C の3点を参照点として選び、通常の単位荷重載荷の解析を行い、着目点応力との比較を行う。各参照点に単位荷重を載荷したときの着目点応力と、本手法による参照点における影響線の値を表-3, 4に示す。両者の差は絶対差

表-3 提案手法と単位荷重による着目点1の応力の比較

参照点	A	B	C
本手法 ($\times 10^{-4}/\text{mm}^2$)	-0.27947	0.02465	-5.05347
単位荷重 ($\times 10^{-4}/\text{mm}^2$)	-0.28336	0.02679	-5.05481
絶対差 ($\times 10^{-7}/\text{mm}^2$)	3.89	-2.14	1.34
相対差%	-1.4	-8.0	-2.7×10^{-2}

表-4 提案手法と単位荷重による着目点2の応力の比較

参照点	A	B	C
本手法 ($\times 10^{-4}/\text{mm}^2$)	1.31177	-1.04516	-6.59335
単位荷重 ($\times 10^{-4}/\text{mm}^2$)	1.31165	-1.04311	-6.59228
絶対差 ($\times 10^{-7}/\text{mm}^2$)	0.12	-2.05	-1.07
相対差%	9.1×10^{-3}	2.0×10^{-1}	1.6×10^{-2}

絶対差 = 本手法による解 - 単位荷重による解 (23)

と式(14)で定義した相対差で比較する。表-3, 4にある通り、本手法は単位荷重を載荷する通常の解法による解と比較し、 $10^{-1}\%$ 程度の精度で一致している。着目点1の参照点A, Bにおける相対差は他と比較して大きくなっているが、応力の値そのものが他と比べて小さいためであり、絶対差は他と同程度である。

5. おわりに

著者らが提案したモデルの修正が不要な有限要素モデルに対する影響線解析手法¹⁰⁾を基に、平面シェル要素でモデル化された有限要素モデルの影響線を求める方法を提案した。本手法によれば、従来の単位荷重による方法のように、単位荷重の載荷位置を変更し多数回の解析を行う必要がなく、一つの着目点に対して一度の解析を実行するだけでよく、着目点の応答を床版面に関連付ける処理も不要であり、計算量を大幅に低減することが可能である。また、従来のMüller-Breslauの原理に基づく方法と異なり、2重節点化のモデル修正が不要であるため、従来法よりも効率よく影響線を解析することができる。本提案手法において影響線の解析のためにモデルに与える荷重は、要素長・要素厚さと材料定数から容易に設定できることから、汎用有限要素解析コードへの実装も容易である。

4辺単純支持板を対象として単位荷重に対する応答を求め、本手法によるひずみ、あるいは応力の影響線の値と比較した。両者の差は最大でも $10^{-1}\%$ 程度であり、本手法の妥当性を確認することができた。また、鋼床版を有する鋼桁橋のモデルにおいても単位荷重による解との比較を行った。このときの着目点付近は鋼床版横リブの縦リブとの溶接部付近であり、要素形状が長方形ではない溶接止端直角方向の応力の影響線解析を行った。その結果、影響線の値が周囲に比べて極めて小さい参照点を除いて $10^{-1}\%$ 程度で単位荷重による解と一致した。以上のように、従来法と同じ結果を少ない解析コストで得ることができるので、本手法は有限要素解析を利用した鋼橋の応力照査の効率化に貢献できると考える。

謝辞：本研究は東北大学とエム・エムブリッジ株式会社との共同研究の一環として実施したものである。また、本研究の一部はJSPS 科研費22K04278(代表：斉木 功)の助成を受けたものです。

REFERENCES

- 1) 森 猛, 金子 想, 林 暢彦, 内田大介, 小笠原照夫: 鋼床版デッキ進展き裂の起点を対象とした応力影響面とその利用, 土木学会論文集 A1, Vol. 73, No. 1, pp. 21-31, 2017. [Mori, T., Kaneko, S., Hayashi, N., Uchida, D. and Ogasawara, T.: Stress influence plane at originating point of fatigue crack propagating into deck plate of steel plate deck and its application, *Journal of JSCE Ser. A1*, Vol. 73, No. 1, pp. 21-31, 2017.]
- 2) 横関耕一, 横山 薫, 富永知徳, 三木千壽: 鋼床版縦横リブ交差部構造の高疲労強度化, 土木学会論文集 A1, Vol. 73, No. 1, pp. 206-217, 2017. [Yokozeki, K., Yokoyama, K., Tominaga, T. and Miki, C.: Fatigue enhancement of longitudinal-to-transverse rib connection in orthotropic steel deck, *Journal of JSCE Ser. A1*, Vol. 73, No. 1, pp. 206-217, 2017.]
- 3) 横山 薫, 鈴木俊光, 橋本幹司, 三木千壽: 主桁に隣接する縦リブに着目した鋼床版縦横リブ交差部の疲労寿命に関する一検討, 土木学会第71回年次学術講演会概要集, I-56, 2020. [Yokoyama, K., Suzuki, T., Hashimoto, T. and Miki, C.: A study on fatigue life of longitudinal-to-transverse rib connection in orthotropic steel deck, *Proc. 71st Annual Conf. JSCE*, I-56, 2020.]
- 4) Cifuentes, A. and Paz, M.: A note on the determination of influence lines and surfaces using finite elements, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, pp. 299-305, 1991.
- 5) Orakdoğen, E. and Girgin, K.: Direct determination of influence lines and surfaces by F.E.M., *Structural Engineering Mechanics*, Vol. 20, pp. 279-292, 2005.
- 6) 古市 亨, 松井繁之, 佐光浩継: ミューラー・ブレスロウの原理を応用した3次元立体FEM解析による影響面作成と疲労の一考察, 土木学会論文集 A, Vol. 65, No. 4, pp. 949-954, 2009. [Furuichi, T., Matsui, S. and Sako, H.: Preparation of influence surface for three dimensional structures by employing Müller-Breslau's theorem into 3D FEM analysis and some fatigue examinations, *Journal of JSCE Ser. A*, Vol. 65, No. 4, pp. 949-954, 2009.]
- 7) Belegundu, A. D.: The adjoint method for determining influence lines, *Computers & Structures*, Vol. 29, pp. 345-350, 1988.
- 8) Memari, A. M. and West, H. H.: Computation of bridge design forces from influence surfaces, *Computers & Structures*, Vol. 38, pp. 547-556, 1991.
- 9) Jepsen, M. and Damkilde, L.: A direct and fully general implementation of influence lines/surfaces in finite element software, *Advances in Engineering Software*, Vol. 120, pp. 55-61, 2018.
- 10) 斉木 功, 三井涼平, 横山 薫, 鈴木俊光, 橋本幹司: 相反定理に基づく有限要素モデルの修正が不要な影響線の解析, 土木学会論文集 A1, Vol. 78, No. 3, pp. 480-489, 2022. [Saiki, I., Mitsui, R., Yokoyama, K., Suzuki, T. and Hashimoto, T.: Influence line analysis of finite element models without model modification based on the reciprocal theory, *Journal of JSCE Ser. A1*, Vol. 78, No. 3, pp. 480-489, 2022.]
- 11) 町田 進, 的場正明, 吉成仁志, 西村隆一: ホットスポット応力基準による疲労強度評価(第3報)-FEMによる評価-, 日本造船学会論文集, No. 171, pp. 477-484, 1992. [Machida, S., Matoba, M., Yoshinari, H. and Nishimura, R.:

Definition of hot spot stress in welded structure for fatigue assessment (3rd report), *J. Soc. Naval Archit. Jap.*, No. 171, pp. 477-484, 1992.]

(Received May 15, 2024)
(Accepted December 28, 2024)

APPLICATION OF INFLUENCE LINE ANALYSIS WITHOUT MODEL MODIFICATION TO PLANAR SHELL ELEMENT

Isao SAIKI, Ryohei MITSUI, Kaoru YOKOYAMA, Toshimitsu SUZUKI
and Tsuyoshi HASHIMOTO

In the design of structures subjected to moving loads, such as bridges, the influence line is indispensable. The same number of analyses as the number of nodes on the surface to which the load is possibly applied is required to obtain the influence line for finite element models. The Müller-Breslau principle, when used in finite element analysis, necessitates intricate model modification for introducing discontinuous displacements at the point of interest. To solve this problem, we proposed an influence line analysis method that can be effortlessly incorporated into standard finite element codes without necessitating model modifications. In this paper, we introduce a method for applying this technique to shell elements, which are commonly used in bridge finite element models.