土木学会論文集, Vol. 80, No. 15, 23-15003, 2024.

任意断面に適用可能なねじりによる断面変形を考慮した梁理論

須田　陽平[1]・斉木　功[2]

[1]正会員　国土交通省　四国地方整備局　徳島河川国道事務所
（〒770–8554　徳島市上吉野町 3 丁目 35）
[2]正会員　東北大学大学院准教授　工学研究科土木工学専攻
（〒980–8579　仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: isao.saiki.a4@tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

任意の断面に適用可能なねじりによる断面変形を持つ梁理論を提案する．この理論では，ねじり角とは独立したそりの大きさを導入し，そりによる断面変形をそりの大きさと断面内分布を表す断面変形モードの積で表す．断面変形モードは周期的な境界条件を持つ代表体積要素の有限要素解析により数値的に求める．この均質化過程により，提案手法は任意の断面に対して適用可能である．導出された支配方程式は，断面変形モードを断面積分した断面パラメタを含み，異種材料からなる非均質断面を持つ梁に対して提案手法を適用したところ，有限要素解析の結果と良い一致を示した．

Key Words: *torsion, warping, representative volume element, cross-sectional deformation, homogenized beam theory*

1. はじめに

棒のねじり問題に関して，そり変形を拘束しない純ねじり理論が St.Venant により構築され，そり変形が拘束を受けて軸変形を生じる，いわゆる曲げねじり理論が Wagner や Vlasov によって体系化された．曲げねじり理論は，薄肉断面に対する解析的なアプローチ[1)]，そり応力によって生じる二次的なせん断変形の考慮[2)]，曲げねじりを考慮できる有限要素の開発[3)] といった流れを経て，現在も研究がなされている．

近年ではそり関数を数値解析により求めて曲げねじり理論で利用する試みも行われている．Prokíc[4)] は薄肉閉断面および開断面に対して，断面内の角点でのそり変位を自由度とした有限要素を提案している．Schulz and Filippou[5)] は，断面剛の仮定とねじり率一定の仮定からそり関数についての Laplace 方程式を導出し，有限要素法で解くことを提案している．また，Gruttmann らの研究グループは Hu-Washizu 変分原理に基づき局所的に定義されたそり関数を求めるための有限要素解析を提案している[6)]．また，有限要素法により求めたそり関数をねじりの弾塑性問題へ適用している[7),8)]．曲げやせん断も含む梁理論の最近の研究のレビューは Carrera et al.[9)] や Gonçalves et al.[10)] に詳しく述べられている．

非均質断面棒のねじりに焦点を絞ると，Kollár and Pluzsik[11)] による積層薄肉梁を対象とした有限要素や Kim and White[12)] による積層箱断面を対象とした有限要素が開発されている．Fatmi and Zenzri[13)] は複合断面を含む任意断面を対象に断面特性を求める数値解法を提案しているが，ねじりに関しては St.Venant ねじり定数の導出に留まっている．

土木の分野では，道路橋示方書[14)] においてコンクリート系床版と鋼桁の合成作用を考慮する必要性が明記されている．このため，曲線橋の設計においては床版と鋼桁の合成断面で曲げねじりを考慮しなくてはならないケースがあるが，その設計法や合成断面の曲げねじりを解析する方法が確立されていない．そこで，本研究の目的を任意非均質断面の曲げねじりを考慮できる理論を構築することとする．

著者らの研究グループは，任意形状の断面を代表体積要素として周期境界条件を相対変位として与え，曲げ，せん断，ねじりの平均剛性を評価することのできる数値解析手法[15)] を提案している．この手法では断面変形を表す自由度を導入することで，幅広フランジを持つ梁のせん断遅れを考慮できることが示

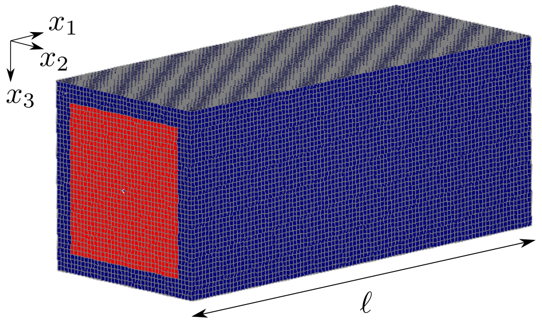


図-1　解析対象と座標・領域の設定

されている[16)–19)]．さらに，非均質断面のせん断剛性を適切に評価する方法[20)–22)] や Poisson 効果による面内変形を考慮できる梁理論[23)]，横せん断とせん断遅れを統一的に考慮した梁理論[24)] を提案している．一般的な非均質断面に対して適用可能な曲げねじり理論は先に述べたように著者らの知る限り開発されていないので，本論文では，著者らの文献[24)] に倣い，ねじりに伴うそり変形を表す面外変形自由度を導入した曲げねじり理論を提案する．

2. 断面変形自由度を導入したねじり問題の定式化

(1) 変位場

図-1 に示すような長さ ℓ の長さ方向に一様な任意形状断面の梁を解析対象とする．梁軸方向を x_1，梁軸直角水平方向を x_2，鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する．解析対象の梁軸方向領域を $L = \{x_1 \mid 0 \le x_1 \le \ell\}$，断面の領域を A，ねじり中心を x_2，x_3 の原点とする．

著者ら[24)] は任意形状断面の全断面領域において，せん断遅れに起因する軸方向変位と横せん断に起因する軸方向変位の両者を統合して断面変形の x_1 方向の変位場を $f(x_2, x_3)$ と定義することを提案している．本論文でもこの変位場と同様に，そりねじりによる断面変形に起因する梁軸方向の変位場を $f_{\mathrm{t}}(x_2, x_3)$ とすることを提案する．梁のねじり角を $\varphi(x_1)$，断面変形 f_{t} に対する一般化変位を $g_{\mathrm{t}}(x_1)$ とし，梁の変位場をそれぞれ

$$u_1 = f_{\mathrm{t}}(x_2, x_3)\, g_{\mathrm{t}}(x_1) \tag{1}$$

$$u_2 = -x_3 \varphi(x_1) \tag{2}$$

$$u_3 = x_2 \varphi(x_1) \tag{3}$$

と表す．ここに u_i は x_i 方向の変位を表す．式 (2), (3) から断面の面内運動は剛体回転を仮定していることになるが，薄肉理論においても同様の仮定をしており，本論文ではこの変位場で表現できる範囲の問題を対象とする．後述するように，軸方向に一様な梁の場合には本理論の精度は実用的であることから，この仮定は妥当であると考えれらる．次に，$f_{\mathrm{t}} g_{\mathrm{t}}$ は長さの次元を持つことになるが，後述するように薄肉梁理論におけるそり関数と f_{t} が対応するようにするため，f_{t} は長さ 2 乗の次元，g_{t} は長さの –1 乗の次元とする．

変位場から導かれるひずみは

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = f_{\mathrm{t}}\, g_{\mathrm{t}}' \tag{4}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_{\mathrm{t},2}\, g_{\mathrm{t}} - x_3 \varphi' \tag{5}$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = f_{\mathrm{t},3}\, g_{\mathrm{t}} + x_2 \varphi' \tag{6}$$

となる．ここに，$(\cdot)_{,i}$ は x_i $(i = 2,\ 3)$ に関する偏導関数，$(\cdot)'$ は x_1 に関する導関数を表す．$\epsilon_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ 以外のひずみ成分はゼロとし，梁の 1 軸応力状態を仮定し対応する応力成分もゼロとする．

(2) 支配方程式の定式化

解析領域を $V \coloneqq L \times A$ とし，$\partial L \coloneqq \{x_1 \mid x_1 = 0, x_1 = \ell\}$ の断面における表面力 t_i を考慮した仮想仕事式は

$$\int_V \{E\epsilon_{11}\delta\epsilon_{11} + G(\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13})\}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \{t_1\delta u_1 + t_2\delta u_2 + t_3\delta u_3\}\,\mathrm{d}A \tag{7}$$

と表せる．ここで $\coloneqq$ は定義，$\partial V \coloneqq \partial L \times A$ は解析領域の境界面（梁の両端の断面），$\delta(\cdot)$ は $(\cdot)$ の仮想ひずみもしくは仮想変位を表す．上式に式 (4)，(5)，(6) で表されるひずみ場を代入すると

$$\begin{aligned}\int_V \Big\{&E(f_{\mathrm{t}}g_{\mathrm{t}}')(f_{\mathrm{t}}\delta g_{\mathrm{t}}') + G(f_{\mathrm{t},2}g_{\mathrm{t}} - x_3\varphi')(f_{\mathrm{t},2}\delta g_{\mathrm{t}} - x_3\delta\varphi') \\ &+G(f_{\mathrm{t},3}g_{\mathrm{t}} + x_2\varphi')(f_{\mathrm{t},3}\delta g_{\mathrm{t}} + x_2\delta\varphi')\Big\}\,\mathrm{d}V \\ &= \int_{\partial V} \{t_1\delta u_1 + t_2\delta u_2 + t_3\delta u_3\}\,\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{8}$$

を得る．上式を展開すると

$$\begin{aligned}&\int_V \Big\{E f_{\mathrm{t}}^2 g_{\mathrm{t}}'\delta g_{\mathrm{t}}' + G(f_{\mathrm{t},2}^2 g_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{t},2}x_3\varphi')\delta g_{\mathrm{t}} \\ &\qquad - G(f_{\mathrm{t},2}x_3 g_{\mathrm{t}} - x_3^2\varphi')\delta\varphi' + G(f_{\mathrm{t},3}^2 g_{\mathrm{t}} + x_2 f_{\mathrm{t},3}\varphi')\delta g_{\mathrm{t}} \\ &\qquad + G(x_2 f_{\mathrm{t},3} g_{\mathrm{t}} + x_2^2\varphi')\delta\varphi'\Big\}\,\mathrm{d}V \\ &= \int_{\partial V} \{t_1 f_{\mathrm{t}}\delta g_{\mathrm{t}} - x_3 t_2\delta\varphi + x_2 t_3\delta\varphi\}\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{9}$$

となり，さらに断面積分を実行すると，最終的に弱形式の支配方程式

$$\int_L \Big\{R_{\mathrm{t}1} g_{\mathrm{t}}'\delta g_{\mathrm{t}}' + (R_{\mathrm{t}2} g_{\mathrm{t}} + R_{\mathrm{t}3}\varphi')\delta g_{\mathrm{t}}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (R_{t3} g_t + K_t \varphi')\delta\varphi' \Big\} \, \mathrm{d}x_1 \\
= &\left(\overline{D_t}\delta g_t + \overline{T}\delta\varphi\right)\Big|_{x=0,\ell}
\end{aligned} \tag{10}
$$

を得る．ここに，K_t はそり変位がない場合の合成断面のねじり剛性，R_{ti} $(i = 1, 2, 3)$ は断面変形に関するパラメタであり

$$
\begin{aligned}
K_t &:= \int_A G\left\{(x_2)^2 + (x_3)^2\right\} \mathrm{d}A, \\
R_{t1} &:= \int_A E f_t^2 \, \mathrm{d}A, \\
R_{t2} &:= \int_A G\left\{(f_{t,2})^2 + (f_{t,3})^2\right\} \mathrm{d}A, \\
R_{t3} &:= \int_A G(f_{t,3}x_2 - f_{t,2}x_3) \, \mathrm{d}A
\end{aligned} \tag{11}
$$

と定義した．また，$\overline{D_t}$，$\overline{T}$ は端部断面に作用する外力の合力で

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_t &:= \int_A t_1 f_t \, \mathrm{d}A, \\
\overline{T} &:= \int_A (x_2 t_3 - x_3 t_2) \, \mathrm{d}A
\end{aligned} \tag{12}
$$

と定義した．$\overline{D_t}$ は断面変形に関する一般化外力，$\overline{T}$ はねじりモーメントである．

弱形式の支配方程式 (10) の δg_t に関する項を取り出し，δg_t の導関数を含む項を部分積分すると

$$
\begin{aligned}
&\left[R_{t1} g_t' \delta g_t\right]_0^\ell + \int_L \left\{\left(-R_{t1} g_t'' + R_{t2} g_t + R_{t3}\varphi'\right)\delta g_t\right\} \mathrm{d}x_1 \\
&= \left(\overline{D}_t \delta g_t\right)\Big|_{x_1=0,\ell}
\end{aligned} \tag{13}
$$

を得る．同様に式 (10) の $\delta\varphi$ に関する項を取り出し，$\delta\varphi$ の導関数を含む項を部分積分すると

$$
\begin{aligned}
&\left[(R_{t3} g_t + K_t \varphi')\delta\varphi\right]_0^\ell + \int_L \left\{(R_{t3} g_t' + K_t \varphi'')\delta\varphi\right\} \mathrm{d}x_1 \\
&= \left(\overline{T}\delta\varphi\right)\Big|_{x_1=0,\ell}
\end{aligned} \tag{14}
$$

を得る．以上から，強形式の支配方程式は

$$
R_{t3} g_t' + K_t \varphi'' = 0 \tag{15}
$$

$$
-R_{t1} g_t'' + R_{t2} g_t + R_{t3}\varphi' = 0 \tag{16}
$$

となる．

Hooke の法則より，直応力とせん断応力はそれぞれ $\sigma_{11} = E\epsilon_{11}$, $\sigma_{12} = G\gamma_{12}$, $\sigma_{13} = G\gamma_{13}$ と表せる．それらによる合応力，すなわち断面力 D_t，T を表面力による外力の定義式 (12) と同様に定義すると

$$
\begin{aligned}
D_t &:= \int_A f_t \sigma_{11} \, \mathrm{d}A = \int_A E\epsilon_{11} f_t \, \mathrm{d}A \\
&= \int_A E f_t^2 g_t' \, \mathrm{d}A = R_{t1} g_t'
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
T &:= \int_A (-x_3\sigma_{12} + x_2\sigma_{13}) \, \mathrm{d}A \\
&= \int_A (-x_3 G\gamma_{12} + x_2 G\gamma_{13}) \mathrm{d}A \\
&= \int_A \left\{G(x_2^2 + x_3^2)\varphi' + G(f_{t,3}x_2 - f_{t,2}x_3)g_t\right\} \mathrm{d}A \\
&= K_t \varphi' + R_{t3} g_t
\end{aligned} \tag{18}
$$

のように断面力を変形で表現することができる．ここに，D_t は断面変形に関する一般化変位 g_t と仕事共役な一般化力，T はねじりモーメントである．

式 (13), (14) の境界 $x_1 = 0,\ \ell$ の項より，境界条件が

$$
\begin{aligned}
n_i(R_{t1} g_t') = (\overline{D_t})_i \quad &\text{or} \quad g_t = (g_t)_i \\
n_i(R_{t3} g_t + K_t\varphi') = \overline{T}_i \quad &\text{or} \quad \varphi = \varphi_i
\end{aligned} \tag{19}
$$

により与えられる．ここに，下付き $i = 1, 2$ はそれぞれ $x_1 = 0,\ \ell$ における諸量を意味し，$n_1 = -1$, $n_2 = 1$ である．

(3) 断面パラメタの物理的意味

a) Saint-Venant のねじり剛性

St.Venant のねじり剛性はそり変形を拘束しないときのねじり剛性である．したがって，そり変形を拘束しないとき，単位のねじり率 $\varphi' = 1$ に対する一般化変位 g_t もまた単位であり $g_t = 1$ である．このとき，式 (5)，(6) より

$$
\gamma_{12} = f_{t,2} - x_3 \tag{20}
$$

$$
\gamma_{13} = f_{t,3} + x_2 \tag{21}
$$

となる．これらと式 (11)，(18) より

$$
\begin{aligned}
R_{t3} &= \int_A G\left\{(\gamma_{13} - x_2)x_2 - (\gamma_{12} + x_3)x_3\right\} \mathrm{d}A \\
&= \int_A G(\gamma_{13}x_2 - \gamma_{12}x_3) \, \mathrm{d}A - \int_A G\left\{(x_2)^2 + (x_3)^2\right\} \mathrm{d}A \\
&= T - K_t
\end{aligned} \tag{22}
$$

となる．したがって

$$
T = (K_t + R_{t3})\varphi' \tag{23}
$$

が成り立つ．以上から $K_{teq} := K_t + R_{t3}$ が St.Venant のねじり剛性に相当することがわかる．

b) 曲げねじり剛性

一般にそり 2 次モーメント I_ω は，そり関数を ω とすると

$$
I_\omega = \int_A \omega^2 \, \mathrm{d}A \tag{24}
$$

と定義され，均質断面の曲げねじり剛性は EI_ω である．一方，本論文におけるねじりによる軸方向変位場 f_t はそり関数と同等の意味を有し，式 (11) から R_{t1} は曲げねじり剛性と同等の物理的意味を持つことがわかる．そり関数は長さ 2 乗の次元を有することと，実際，f_t はそり変形を拘束せずに代表体積要素に単

位ねじり率を与えた場合の軸方向変位なので，f_t は長さ 2 乗の次元を有するとした．

c) 断面パラメタの従属性

代表体積要素に単位ねじり率を与えるとき $\varphi' = 1$, $g_t = 1$ であるから式 (4) より軸ひずみは

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f_t(x_2, x_3) = 0 \tag{25}$$

とゼロとなり，せん断ひずみは式 (20), (21) で与えられる．

このとき単位長さあたりに貯えられるひずみエネルギ密度は

$$\begin{aligned}
&\int_A \frac{1}{2}\left(\sigma_{11}\epsilon_{11} + \tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{13}\gamma_{13}\right) \mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{2}\int_A \left\{G(f_{t,2} - x_3)^2 + G(f_{t,3} + x_2)^2\right\} \mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{2}\int_A G\left\{(f_{t,2})^2 + (f_{t,3})^2\right\} \mathrm{d}A \\
&\qquad + \int_A G(f_{t,3}x_2 - f_{t,2}x_3)\mathrm{d}A + \frac{1}{2}\int_A G\left(x_2^2 + x_3^2\right) \mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{2} R_{t2} + R_{t3} + \frac{1}{2} K_t
\end{aligned} \tag{26}$$

となる．また，単位のねじり率 $\varphi' = 1$ に対応するねじりモーメントによる単位長さあたりの仕事は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}T\varphi' &= \frac{1}{2}\int_A \left(-x_3\tau_{12} + x_2\tau_{13}\right) \mathrm{d}A\ \varphi' \\
&= \frac{1}{2}\int_A \left\{-x_3 G(f_{t,2} - x_3) + x_2 G(f_{t,3} + x_2)\right\} \mathrm{d}A\ \varphi' \\
&= \frac{\varphi'}{2}\int_A G(f_{t,3}x_2 - f_{t,2}x_3)\mathrm{d}A + \frac{\varphi'}{2}\int_A G(x_2^2 + x_3^2)\mathrm{d}A \\
&= \frac{\varphi'}{2}\left(R_{t3}g_t + K_t\varphi'\right) \\
&= \frac{1}{2}R_{t3} + \frac{1}{2}K_t
\end{aligned} \tag{27}$$

となる．代表体積要素に単位ねじり率を与えたときのひずみエネルギとねじりモーメントによる仕事は等しいので，式 (26) と式 (27) の右辺を等値すると

$$R_{t2} = -R_{t3} \tag{28}$$

を得る．

以上から，本手法で導入した独立な断面パラメタは R_{t1}, R_{t2} の 2 つとなる．

3. 均質薄肉断面梁による検証

(1) 問題設定

ねじりによる断面変形が発生する典型的な均質薄肉断面として，**図-2** に示す H 形断面を対象に本提案理論の精度を検証する．H 形断面の寸法は高さ $h = 200$ mm，幅 $b = 200$ mm，フランジ厚 $t_f = 10$ mm，ウェブ厚 $t_w = 10$ mm とした．材料は等方弾性体とし，Young 率を $E = 200$ GPa，せん断弾性係数を $G = 100$ GPa とした．代表体積要素は 1 辺長さが 2.5 mm の立方体形状の連続体 1 次 6 面体アイソパラメトリック要素（以後ソリッド要素と呼ぶ）を用いて離散化した．

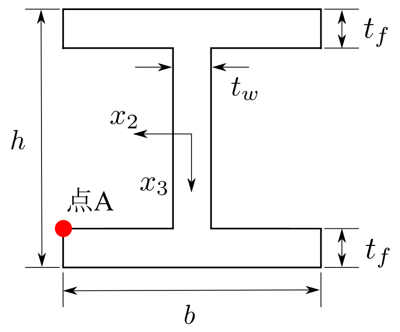


図-2 H 形断面

図-3 片持ち梁のねじり

図-3 に示す片持ち梁の境界値問題を考え，長さ $\ell = 1000$ mm，ねじり角 $\varphi = 1$ rad とした．ソリッド要素による数値解析結果を参照解とし，本提案理論の解，従来の薄肉曲げねじり理論（以後，曲げねじり理論と呼ぶ）と比較して本提案理論の精度と妥当性を検証する．なお，本提案理論の解析解は**付録 A** に示す．参照解の要素寸法は代表体積要素と同じ 1 辺 2.5 mm の立方体とし，総要素数は 371,200 要素である．固定端部は，端部断面上の全ての節点を完全拘束した．自由端部に与えるねじり角は u_1 を拘束せず，断面内全ての節点に断面のねじり角が 1 rad となるような x_2，x_3 方向の強制変位 $u_2 = -x_3\varphi$，$u_3 = x_2\varphi$ を与えた．参照解の変形図と軸方向変位分布を**図-4** に示す．本提案理論では，代表体積要素の数値解析から得られた f_t と境界値問題を解くことで得られた φ，g_t を変位場 (1)-(3) に代入することで各物質点の変位を求めることができる．変形図や応力分布は参照解と同様の要素分割で作成したモデルの各節点に本理論の解を与えることによって可視化した．

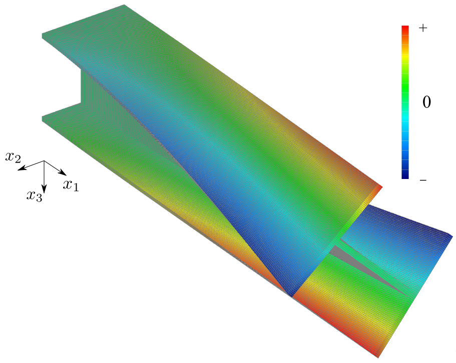


図-4　H 形断面の参照解の変形図と軸方向変位分布

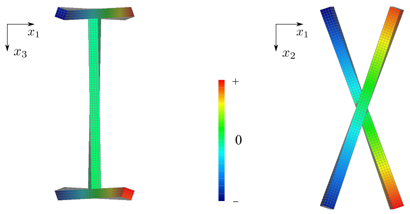


図-5　単位のねじり率を与えた H 形断面の代表体積要素の変形と軸方向変位分布

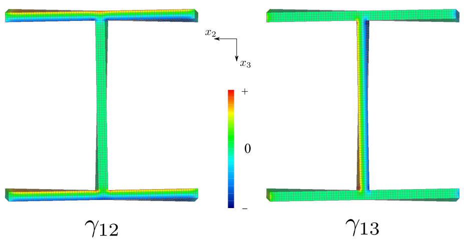


図-6　単位のねじり率を与えた H 形断面の代表体積要素の変形とせん断ひずみ分布

(2)　代表体積要素

代表体積要素に単位のねじり率を与えたときの変形を側面図と上面図に表したものを**図-5** に，断面図に表したものを**図-6** に示す．単位のねじり率を与えるための周期境界条件[15] は**付録 B** に示した．**図-5** の色は軸方向変位分布を示し，**図-6** の色はせん断ひずみ γ_{12}, γ_{13} を示す．**図-5** から，代表体積要素に周期境界条件を含むねじりによる相対変位を与えることで軸方向の変位（そり）が発生していることが確認できる．また**図-6** から，ウェブや上下フランジにおいてそれぞれ板厚中心線を挟んで逆向きのせん断応力分布となっており，St.Venant ねじりによるせん断応力が発生していることが確認できる．

代表体積要素の数値解析によって求めた式 (11) で表される断面パラメタと式 (23) で表される St.Venant ねじり剛性 K_{teq} の値を**表-1** に示す．表中の値は Young 率 E，せん断弾性係数 G と単位の長さ λ で無次元化した．薄肉開断面を構成する各板の幅を

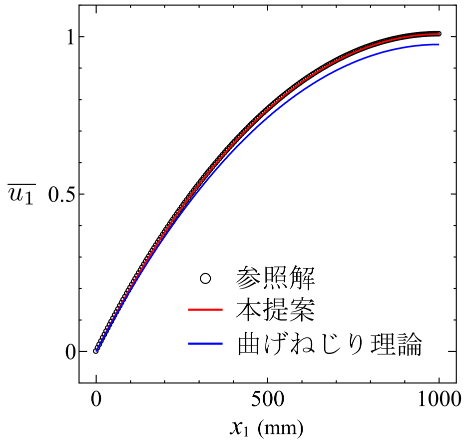


図-7　H 形断面 A 点の軸方向変位分布

b_i，板厚を t_i としたときの St.Venant ねじり定数

$$\sum_i \frac{b_i t_i^3}{3} \tag{29}$$

を λ で無次元化すると 1.933×10^5 となり，K_{teq} との相対差は 1.3%であった．**表-1** に示す断面パラメタの精度は代表体積要素の離散化の程度による断面変形の表現性能に依存するが，比較する参照解のための有限要素モデルと代表体積要素の要素分割を等しくすることで，以下の精度検証における要素分割の影響を極力排除するようにしている．

なお，境界値問題の梁の長さ ℓ を考慮すると，曲げねじりに関する細長比 κ は

$$\kappa = \ell \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} = 0.896 \tag{30}$$

である．本提案理論による細長比を

$$\mu := \sqrt{\frac{K_{\mathrm{t}} R_{\mathrm{t2}} - R_{\mathrm{t3}}^2}{K_{\mathrm{t}} R_{\mathrm{t1}}}} \tag{31}$$

で定義される μ を用いて $\mu\ell$ と定義すると 0.902 となった．両者の差は 0.6%程度である．細長比は小さいほど曲げねじりの影響が大きく，鋼道路橋設計便覧[25] によると，κ 値が 0.4 から 10 の場合は純ねじりと曲げねじりの両方を考慮する必要があるとしている．

(3)　変位の軸方向分布

図-2 に示す点 A（フランジ端点）における軸方向

表-1　H 形断面の無次元化断面パラメタ

$K_{\mathrm{t}}/G\lambda^4$	5.434×10^7
$R_{\mathrm{t1}}/E\lambda^6$	1.200×10^{11}
$R_{\mathrm{t2}}/G\lambda^4$	5.415×10^7
$K_{\mathrm{teq}}/G\lambda^4$	1.958×10^5

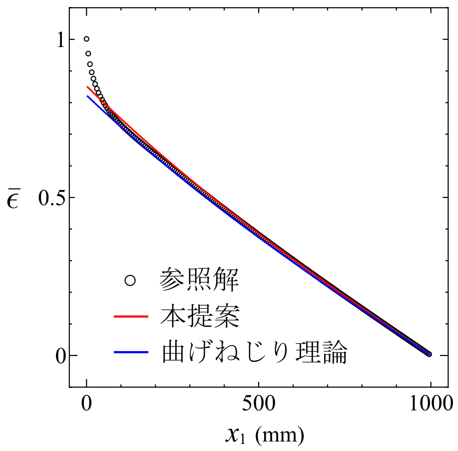


図-8　H 形断面軸ひずみ分布

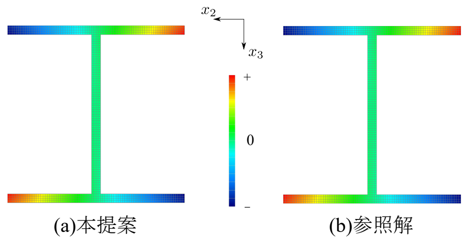


図-9　H 形断面軸ひずみ分布

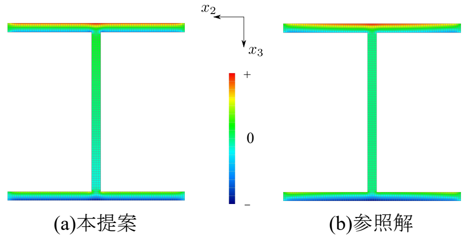


図-10　H 形断面せん断ひずみ分布 γ_{12}

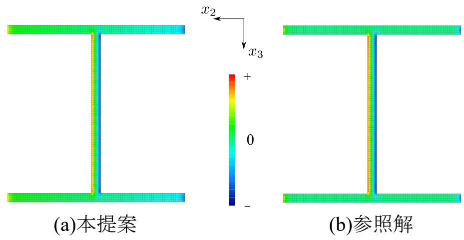


図-11　H 形断面せん断ひずみ分布 γ_{13}

変位の軸方向分布を**図-7** に示す．点 A は自由端断面において軸方向変位が最大となる点である．曲げねじり理論による変位は

$$u_1 = \frac{h}{2}\frac{b}{2}\varphi' \tag{32}$$

であり，b はフランジ幅，h は上下フランジ板厚中心間距離の 190 mm とした．図中の値は参照解による自由端の軸方向変位で無次元化している．本提案理論の軸方向変位分布は参照解の傾向を再現できていることが確認できる．

軸方向変位の相対差を**表-2** に示す．ここで相対差ノルムは，それぞれの理論の解析解 β_p と参照解 β_a との差の L^2 ノルムを参照解の L^2 ノルムで無次元化し

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_\mathrm{p} - \beta_\mathrm{a})^2 \,\mathrm{d}x_1}{\int_L (\beta_\mathrm{a})^2 \,\mathrm{d}x_1}} \tag{33}$$

と定義した．本提案理論の軸方向変位は最大値と相対差ノルムの両方で参照解と 0.8%程度の差で一致しており，曲げねじり理論よりも精度が向上しているといえる．

(4)　軸ひずみの軸方向分布

図-2 に示す点 A を含む要素の重心点 (x_2 = 98.75, x_3 = 91.25) における軸ひずみの軸方向分布を**図-8** に示す．点 A を含む要素は固定端断面において軸ひずみが最大となる要素である．曲げねじり理論によるひずみは式 (32) の x_1 に関する導関数とした．図中の値は参照解による固定端の軸ひずみで無次元化している．本提案理論，曲げねじり理論はともに軸ひずみ分布の全体的な傾向を表現できているが，固定端付近のひずみの増大は再現できていない．この原因は，本理論で仮定している変位場では表現できない変位・変形が固定端付近で生じていることにあると考えられる．軸ひずみの相対差ノルムは本提案理論で 3.36×10^{-2}，曲げねじり理論で 3.66×10^{-2} であった．

表-2　H 形断面の軸方向変位相対差

	本理論	曲げねじり理論
自由端	8.07×10^{-3}	-2.55×10^{-2}
相対差ノルム	8.36×10^{-3}	2.62×10^{-2}

(5)　断面内のひずみ分布

図-9，**図-10**，**図-11** に x_1 = 200 mm の断面における本理論と参照解の軸ひずみ，γ_{12}，γ_{13} 分布を示す．x_1 = 200 mm の位置は，そりが拘束される固定端付近でかつ，固定端の影響による局所的な変形が見られない位置として選択した．なお，x_1 の位置によってひずみ分布の大きな違いは本理論，参照解ともに見られなかった．また，本提案理論では，軸ひずみ分布は代表体積要素の軸方向変位分布と，せん断ひずみ分布は代表体積要素のそれと同じ分布となる．これらの図から，本提案理論による断面内のひずみ分布は参照解のひずみ分布の傾向を再現できていることがわかる．

図-12 に x_1 = 200 mm の断面における上フランジ

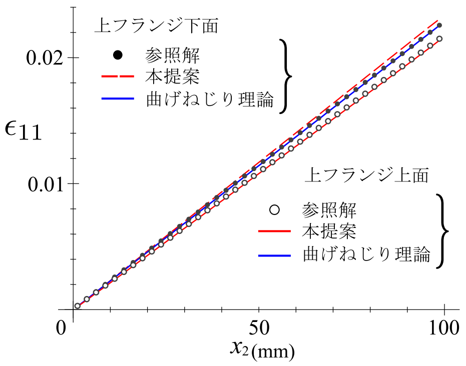


図-12　H 形断面の上フランジ軸ひずみ分布 ϵ_{11}

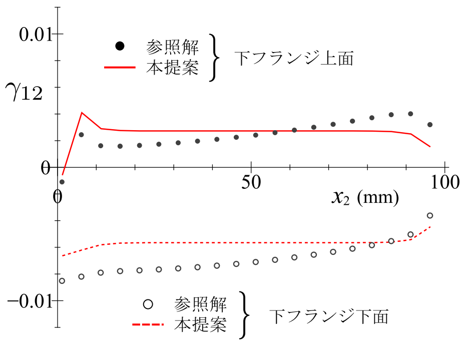


図-13　H 形断面上フランジせん断ひずみ分布 γ_{12}

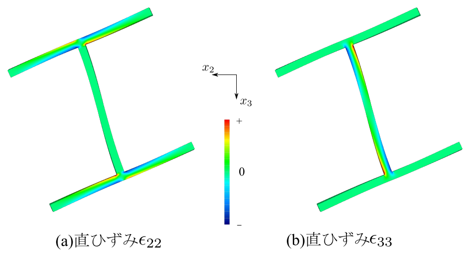


図-14　H 形断面参照解の変形と断面内直ひずみ分布

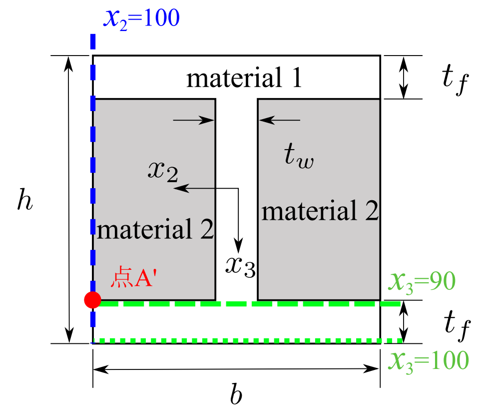


図-15　非均質断面

上面の要素と上フランジ下面の要素の軸ひずみ ϵ_{11} の x_2 方向分布を x_2 が正の範囲で示す．曲げねじりによりフランジが鉛直軸まわりの曲げを受けるため，梁の曲げひずみと同様にほぼ線形の分布となっている．上フランジ上面と下面の相対差ノルムはそれぞれ，0.5%，2.3%であった．図中の曲げねじり理論はフランジ板厚中心面での値である．

図-13 に x_1 = 200 mm の断面における下フランジ上面の要素と下フランジ下面の要素の面内せん断ひずみ γ_{12} の x_2 方向分布を示す．本提案理論はフランジ端点やウェブ付近でせん断ひずみが大きく変化する参照解の傾向を表現することができている．一方，フランジ端点からウェブ接合点にかけて本提案理論ではせん断ひずみは一定であるのに対し，参照解では下に凸の傾向が見られる．この分布は，フランジが x_3 軸周りの曲げせん断変形によって生じる分布である．本提案理論では一定のねじり率によるフランジの回転を変位場として取り入れているが，その 1 階微分であるフランジのせん断変形の変位場は導入していないため，上記のようなせん断ひずみ分布が表現できていないと考えられる．

図-14 に x_1 = 200 mm の断面における参照解の変形図と断面内直ひずみ分布を示す．上下フランジは x_1 軸周りの曲げ変形を呈し，S 字形に変形をしていることがわかる．加えて，それに伴う x_2 方向の直ひずみ ϵ_{22} が生じている．一方，ウェブも同様に曲げ変形し，曲げに伴う x_3 方向の直ひずみ ϵ_{33} が生じていることがわかる．つまり，参照解では梁軸周りの断面全体の剛体回転だけでなく，フランジ・ウェブそれぞれの梁軸周り曲げ変形が同時に起こっている．曲げねじり理論や本提案理論ではねじり角 φ に伴う面内変位は任意の点 (x_2, x_3) で $\varphi = -\frac{u_2}{x_3} = \frac{u_3}{x_2}$ と剛体変位を仮定している．そのため，図-14 からわかるようなフランジやウェブの曲げ変形は曲げねじり理論・本提案理論共に再現することができない．

4.　非均質断面断面梁による検証

(1)　問題設定

本提案理論の非均質断面梁のねじり問題に対する精度と妥当性を，鉄骨鉄筋コンクリート部材にみられるような図-15 に示す非均質断面の梁を対象として検証する．材料 1, 2 ともに等方弾性体とし，材料 1 の Young 率とせん断弾性係数を E_1 = 200 GPa, G_1 = 100 GPa，材料 2 の Young 率とせん断弾性係数を E_2 = 20 GPa，G_2 = 10 GPa とした．材料 1 は前章の H 形断面と同じ寸法である．

代表体積要素は 1 辺長さが 2.5 mm の立方体形状のソリッド要素を用いて離散化した．図-3 に示す片持ち梁の境界値問題を考え，長さ ℓ = 1000 mm，ねじり

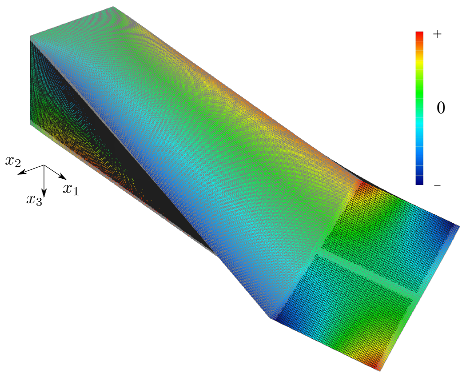


図-16　非均質断面の参照解の変形図と軸方向変位分布

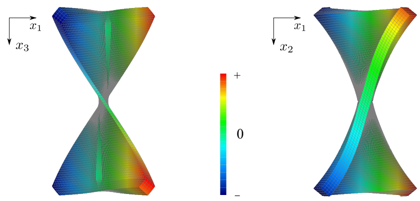


図-17　単位のねじり率を与えた非均質断面の代表体積要素の変形と軸方向変位分布（側面図と上面図）

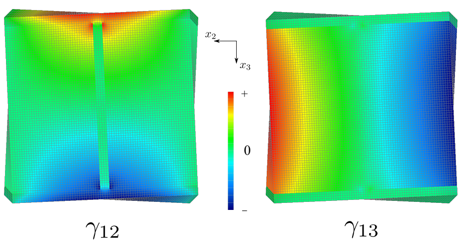


図-18　単位のねじり率を与えた非均質断面の代表体積要素の変形とせん断ひずみ分布（断面図）

角 $\varphi = 1$ rad とした．参照解のためのモデルの要素寸法は代表体積要素と同じ 1 辺 2.5 mm の立方体とし，総要素数は 2,560,000 要素である．固定端部は，端部上の全ての節点を完全拘束した．自由端部に与えるねじり角は u_1 を拘束せず，断面内全ての節点に断面のねじり角が 1 となるような x_2, x_3 方向の強制変位 $u_2 = -x_3\varphi$，$u_3 = x_2\varphi$ を与えた．参照解の変形図と軸方向変位分布を**図-16** に示す．

表-3　非均質断面の無次元化断面パラメタ

$K_t/G_1\lambda^4$	7.557×10^7
$R_{t1}/E_1\lambda^6$	3.980×10^{10}
$R_{t2}/G_1\lambda^4$	3.644×10^7
$K_{teq}/G_1\lambda^4$	3.913×10^7

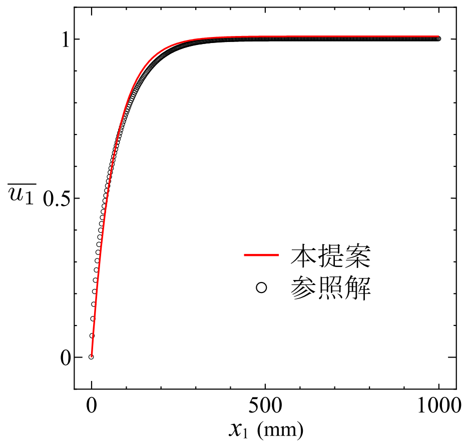


図-19　非均質断面軸方向変位分布

(2)　代表体積要素

H 形断面の例と同様に，**付録 B** に示した境界条件により代表体積要素に単位のねじり率を与えたときの変形と軸方向変位分布の側面図と上面図を**図-17** に，変形とせん断ひずみ分布の断面図を**図-18** に示す．代表体積要素に周期境界条件を含むねじりによる相対変位を与えることで軸方向の変位，すなわちそり変形が発生していることが確認できる．また，フランジのそり変形は H 形断面ではほぼ剛体回転だったが，非均質断面では S 字状の変形がみられる．代表体積要素の数値解析によって求めた式 (11) で定義される断面パラメタと式 (23) で表される St.Venant ねじり剛性 K_{teq} の値を**表-3** に示す．この断面に対する曲げねじりに関する細長比 κ を求めることはできないが，本理論における細長比 $\mu\ell$ は 15.4 であり，前章の H 形断面の 0.902 に比べて大きいため，曲げねじりの影響が H 形断面よりも小さくなることが予想できる．

(3)　変位の軸方向分布

図-15 に示す点 A′（フランジ端点）における軸方向変位の軸方向分布を**図-19** に示す．図中の値は参照解による固定端の軸方向変位で無次元化している．自由端での軸方向変位の相対差は 8.57×10^{-3}，軸方向変位の相対差ノルムは 1.76×10^{-2} であった．点 A′ の軸方向変位は固定端付近で急激に増加し，自由端部の最大変位に収束している．H 形断面の軸方向変位分布では，このような急激な軸方向変位の増加は見られない．H 形断面と断面特性を比較すると，細長比 $\mu\ell$ が H 形断面より大きいため St.Venant ねじりが優位となり，H 形断面のように緩やかに軸方向変位が増加せず，固定端付近ですぐに最大変位向に収束すると考えられる．

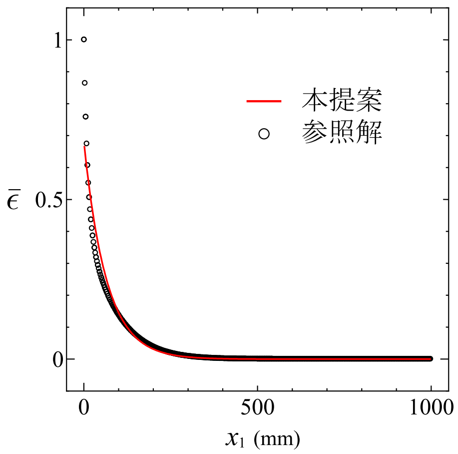
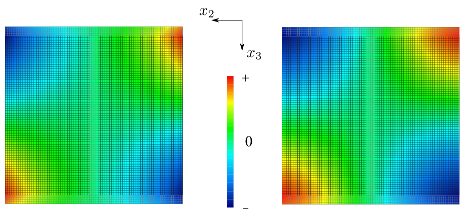


図-20　非均質断面軸ひずみ分布



(a)本提案　　(b)参照解

図-21　非均質断面軸ひずみ分布

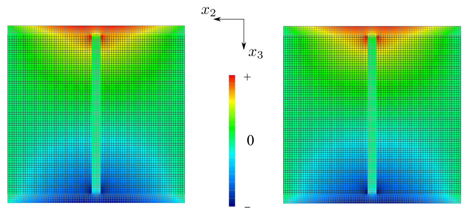
(4)　軸ひずみの軸方向分布

図-15 に示す点 A′ を含む要素重心 (x_2 = 98.75, x_3 = 91.25) における軸ひずみの軸方向分布を**図-20** に示す．点 A′ は固定端断面において参照解の軸ひずみが最大となる点である．図中の値は参照解による固定端の軸ひずみで無次元化している．本提案理論の軸ひずみ分布は固定端付近では参照解とやや差がみられるが，全体的傾向を表現できている．相対差ノルムは 14%となった．これは軸ひずみが x_1 = 300 mm より自由端側でほぼゼロとなるため，本提案理論と参照解の固定端付近での差が大きく影響している．

H 形断面と非均質断面の軸ひずみ分布を比較すると，非均質断面は H 形断面よりも急に減少していることがわかる．これは軸方向変位分布からも明らかであり，本計算例は同じ長さの H 形断面の梁に比べると曲げねじりの影響が小さいことが，細長比の大きさから説明可能である．

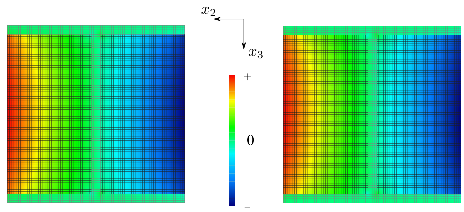
(5)　断面内のひずみ分布

x_1 = 200 mm の断面における軸ひずみ ϵ_{11} およびせん断ひずみ γ_{12}, γ_{13} の分布をそれぞれ**図-21, 22, 23** に示す．なお，x_1 の位置によってひずみ分布の大きな違いは本理論，参照解ともに見られなかった．軸ひずみ分布では，本理論は参照解に比べて断面の四隅に大きなひずみの領域が集中しているが，全体の傾向を捉えている．せん断ひずみ γ_{12} の大きな領域



(a)本提案　　(b)参照解

図-22　非均質断面せん断ひずみ分布 γ_{12}



(a)本提案　　(b)参照解

図-23　非均質断面せん断ひずみ分布 γ_{13}

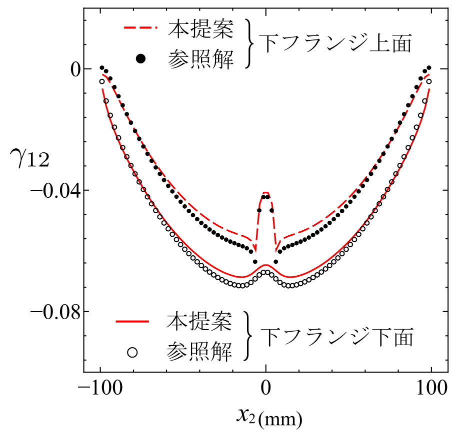


図-24　非均質断面の上フランジせん断ひずみ分布 γ_{12}

はフランジに集中し，せん断ひずみ γ_{13} の大きな領域は材料 2 の外側に集中しており，このようなせん断ひずみ分布を本提案理論は再現できている．

図-24 に x_1 = 200 mm の断面における下フランジ上面 (**図-15** に示す緑の破線) と下フランジ下面 (**図-15** に示す緑の点線) の要素のせん断ひずみ γ_{12} 分布を示す．本提案理論はこのせん断ひずみ分布において参照解の傾向を表現できている．相対差ノルムは，フランジ下面で 3.7%，フランジ上面で 5.6% 程度であった．

x_1 = 200 mm の断面における**図-15** に青の破線で示す位置の要素の軸ひずみ分布とせん断ひずみ γ_{13} 分布をそれぞれ**図-25** と**図-26** に示す．軸ひずみ分布，せん断ひずみ分布のどちらも材料 1 と材料 2 の境界で大きく変化しているが，本提案理論はそのような変化も表現できていることがわかる．相対差ノルムは，それぞれ 4.7%，3.2%となった．**図-25** から，本提案理論による軸ひずみは参照解よりも小さくなっ

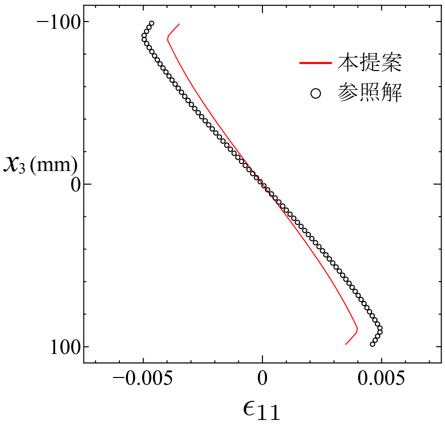


図-25　非均質断面の軸ひずみ分布 ϵ_{11}

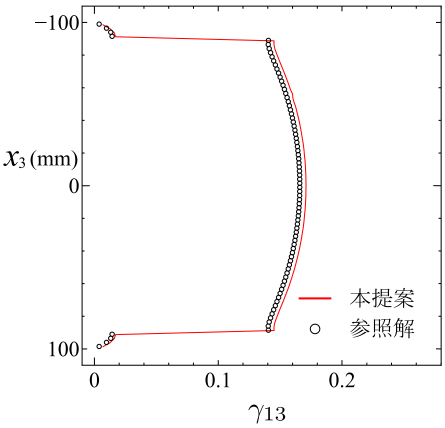


図-26　非均質断面のせん断ひずみ分布 γ_{13}

ているが，**図-20** に見られるように，軸方向座標 x_1 によって参照解との大小関係は異なっている．

5. おわりに

本論文では，複合断面を含む任意断面に適用可能なねじり理論を定式化した．そのために，代表体積要素に周期境界条件を含むねじり率一定の相対変位を与えることで得られるねじりに伴うそりの変位分布を導入した．そり変位は，代表体積要素の解析により得られるそり変位分布と，ねじり角とは独立な断面変形の大きさを表す自由度によって定義した．

本提案理論の妥当性を検証するために連続体ソリッド要素による解を参照解とした片持ち梁の境界値問題を考え，薄肉均質断面と非均質断面についてそれぞれ比較をを行った．これらの検証から得られた知見を以下にまとめる．

- 本提案理論では，断面特性を表す断面パラメタ $R_{ti}(i = 1, 2, 3)$ が必要となる．そのうち $R_{t2} = -R_{t3}$ という関係が成り立つことを証明した．これにより，必要な断面パラメタの数は 2 つとなる．
- 均質な H 形断面について本提案理論と薄肉曲げねじり理論の比較を行ったところ，軸方向変位および軸ひずみにおいて本提案理論は薄肉曲げねじり理論よりよい精度で参照解に一致した．
- 非均質断面について本提案理論と参照解の比較を行ったところ，軸方向変位および軸ひずみにおいて本提案理論は固定端の近傍を除いて参照解の傾向を表現できた．また，断面のせん断ひずみ分布においても参照解を 5%程度の精度で再現することができた．
- 非均質断面では H 形断面と比べて軸方向変位や軸ひずみの軸方向分布が固定端付近で急激に変化する傾向がみられ，その違いを断面パラメタで定義される細長比を用いて説明した．このため，薄肉断面と同様に細長比で曲げねじりの影響の度合いを評価できる．

謝辞：本研究の一部は JSPS 科研費 15K14017（代表：斉木　功），18K04318（代表：斉木　功）の助成を受けたものです．

付録 A　片持ち梁の解析解

図-3 に示す片持ち梁の自由端にねじり変位を与えた境界値問題の解析解を以下に示す．片持ち梁の固定端は完全に拘束されているので，$x_1 = 0$ において

$$\varphi(0) = 0 \tag{34}$$

$$g_t(0) = 0 \tag{35}$$

である．一方，自由端 $x = \ell$ ではねじり変位 φ_0 を与えるので

$$\varphi(\ell) = \varphi_0 \tag{36}$$

であり，また，そり変形を拘束しないので g_t と共役な一般化力 D_t は

$$D_t(\ell) = 0 \tag{37}$$

である．

支配方程式 (16) の両辺を微分すると

$$-R_{t1} g_t'' + R_{t2} g_t' + R_{t3} \varphi'' = 0 \tag{38}$$

を得る．式 (38) に支配方程式 (15) と式 (15) の 2 階微分を代入して整理すると

$$\varphi'''' - \frac{K_t R_{t2} - R_{t3}^2}{K_t R_{t1}} \varphi'' = 0 \tag{39}$$

となる．上式の一般解は，式 (31) で定義した μ を用いると

$$\varphi(x) = (a + bx) + c \sinh \mu x + d \cosh \mu x \tag{40}$$

と表せる．ここで，a, b, c, d は任意の定数である．

支配方程式 (15) にねじり角の一般解 (40) の 2 階微分を代入することによって，g_t に関する微分方程式

$$g_\mathrm{t}'(x) = -\frac{\mu^2 K_\mathrm{t}}{R_{\mathrm{t}3}} (c \sinh \mu x + d \cosh \mu x) \tag{41}$$

を得る．式 (41) を積分すると

$$g_\mathrm{t}(x) = -\frac{\mu K_\mathrm{t}}{R_{\mathrm{t}3}} (c \cosh \mu x + d \sinh \mu x + e) \tag{42}$$

となる．ここで，e は任意の定数である．

支配方程式 (16) にねじり角の 1 階微分と一般化変位 g_t とその 2 階微分 g_t'' を代入し整理すると

$$-\frac{\mu K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}}{R_{\mathrm{t}3}} e + R_{\mathrm{t}3} b = 0 \tag{43}$$

を得る．上式と境界条件 (34)-(37) より任意定数 a, b, c, d, e を

$$a = \frac{R_{\mathrm{t}3}^2 \tanh \mu\ell}{R_{\mathrm{t}3}^2 \tanh \mu\ell - \mu\ell K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}} \varphi_0 \tag{44}$$

$$b = -\frac{\mu K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}}{R_{\mathrm{t}3}^2 \tanh \mu\ell - \mu\ell K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}} \varphi_0 \tag{45}$$

$$c = \frac{R_{\mathrm{t}3}^2}{R_{\mathrm{t}3}^2 \tanh \mu\ell - \mu\ell K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}} \varphi_0 \tag{46}$$

$$d = -\frac{R_{\mathrm{t}3}^2 \tanh \mu\ell}{R_{\mathrm{t}3}^2 \tanh \mu\ell - \mu\ell K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}} \varphi_0 \tag{47}$$

$$e = -\frac{R_{\mathrm{t}3}^2}{R_{\mathrm{t}3}^2 \tanh \mu\ell - \mu\ell K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}} \varphi_0 \tag{48}$$

と求めることができる．

以上から，ねじり角と一般化変位は

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}_0 \left(\frac{\sinh \mu\ell + \sinh \mu(x-\ell)}{\cosh \mu\ell} - \frac{\mu x K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}}{R_{\mathrm{t}3}^2} \right) \tag{49}$$

$$g_\mathrm{t}(x) = \overline{\varphi}_0 \frac{\mu K_\mathrm{t}}{R_{\mathrm{t}3}} \left(1 - \frac{\cosh \mu(x-\ell)}{\cosh \mu\ell} \right) \tag{50}$$

となる．ここに

$$\overline{\varphi}_0 := \frac{R_{\mathrm{t}3}^2 \varphi_0}{R_{\mathrm{t}3}^2 \tanh \mu\ell - \mu\ell K_\mathrm{t} R_{\mathrm{t}2}} \tag{51}$$

とした．

付録 B　単位ねじり率に対する周期境界条件

代表体積要素の軸方向長さを r とし，図-1 の x_i と平行な座標 y_i を導入する．$y_1 = 0$ の断面を独立断面，$y_1 = r$ の断面を従属断面と呼ぶこととする．周期境界条件は，従属断面の変位が独立断面の変位と等しくなるということであるが，一様変形を表すためには両者の相対変位を与える必要がある．ねじりの問題に対しては，与えるねじり率を φ' とすると相対変位が

$$u_1(r, y_2, y_3) - u_1(0, y_2, y_3) = 0 \tag{52}$$

$$u_2(r, y_2, y_3) - u_2(0, y_2, y_3) = -y_3 r \varphi' \tag{53}$$

$$u_3(r, y_2, y_3) - u_3(0, y_2, y_3) = y_2 r \varphi' \tag{54}$$

となる．代表体積要素の有限要素解析においては，節点ごとに上式で表される関係を拘束条件式として，通常の剛性方程式と共に解くことで解が得られ，このときの u_1 が f_t となる．

REFERENCES

1) Benscoter, S. U.: A theory of torsion bending for multicell beams, *J. Applied Mechanics*, Vol.21, pp.25-34, 1954.
2) 佐伯昇：二次せん断変形を考慮した曲げねじり理論と数値計算, 土木学会論文報告集, No.209, pp.27-36, 1973. [Saeki, N.: Warping torsion theory in consideration of the deformation due to secondary shearing stress and its numerical examples, *Proc. of JSCE*, Vol.1973, No.209, pp.27-36, 1973.]
3) Shakouzadeh, H., Guo Y. Q. and Batoz, J.-L.: A torsion bending element for thin-walled beams with open and closed cross sections, *Computers & Structures*, Vol.55, No.6, pp.1045-1054, 1995.
4) Prokić, A.: Thin-walled beams with open and closed cross-sections, *Computers & Structures*, Vol.47, pp.1065-1070, 1993.
5) Schulz, M. and Filippou, F. C.: Generalized warping torsion formulation, *Engineering Mechanics*, Vol.124, pp.339-347, 1998.
6) Wackerfuß, J. and Gruttmann, F.: A nonlinear Hu − Washizu variational formulation and related finite-element implementation for spatial beams with arbitrary moderate thick cross-sections, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.200, pp.1671-1690, 2011.
7) Gruttmann, F., Sauer, R., Wagner, W.: Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.48, pp.1675-1702, 2000.
8) Wagner, W. and Gruttmann, F.: Finite element analysis of Saint-Venant torsion problem with exact integration of the elastic-plastic constitutive equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.190, pp.3831-3848, 2001.
9) Carrera, E., Pagani, A., Petrolo, M., Zappino, E.: Recent developments on refined theories for beams with applications *Mech. Eng. Rev.*, Vol.2, No.2, p.14-00298, 2015.
10) Gonçalves, R. Camotim, D., Basaglia, C., Martins, A. D., Peres, N.: Latest developments on the analysis of thin-walled structures using Generalised Beam Theory (GBT), *J. Construct. Steel Res.*, Vol.204, p.107858, 2023.

11) Kollár, L. P. and Pluzsik, A.: Analysis of thin-walled composite beams with arbitrary Layup, *J. Reinf. Plast. Compos.*, Vol.21, No.16 pp.1423-1466, 2002.
12) Kim, C. and White, S. R.: Thick-walled composite beam theory including 3-d elastic effects and torsional warping, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.34, pp.4237-4259, 1997.
13) El Fatmi, R. and Zenzri, H.: A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite beams, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.41, pp.2521-2537, 2004.
14) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説 II 鋼橋・鋼部材編，丸善，2017. [Japan road association: Specifications for highway bridges: part II steel bridges, Maruzen, 2017.]
15) 斉木功, 鑓一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫：非均質な Timoshenko 梁の平均物性評価，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.68, pp.I_161-I_169, 2012. [Saiki, I., Yari, K., Yamada, M., Setogawa, A., Iwakuma, T.: Evaluation of averaged mechanical property of timoshenko beams with microstructures, *Journal of JSCE Ser.A2*, Vol.15, No.2, pp.161-169, 2012.]
16) 斉木功，西井大樹，岩熊哲夫：任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法，土木学会論文集 A2，Vol.71, No.2, pp.I_11-I_18, 2015. [Saiki, I., Nishii, D., Iwakuma, T.: Semi-analytical method for shear lag analysis of beams with arbitrary cross section, *Journal of JSCE Ser.A2*, Vol.71, No.2, pp.I_11-I_18, 2015.]
17) 斉木功，西井大樹，岩熊哲夫：任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化，土木学会論文集 A2，Vol.72, No.2, pp.I_53-I_62, 2016. [Saiki, I., Nishii, D., Iwakuma, T.: Enhancement of accuracy of semi-analytical method for shear lag of beams with arbitrary cross section, *Journal of JSCE Ser.A2*, Vol.72, No.2, pp.I_53-I_62, 2016.]
18) 斉木功, 西井大樹, 山本剛大：任意断面のせん断遅れを考慮できる梁要素，日本計算工学会論文集，Vol.2018, p.20180013, 2018. [Saiki, I., Nishii, D., Yamamoto, T.: A beam element for shear lag analysis of beams with arbitrary cross section, *Transactions of JSCES*, Vol.2018, p.20180013, 2018.]
19) 青木洋樹，斉木功，大竹雄，三井涼平：せん断遅れによる付加的な応力評価のための機械学習による断面特性推定，土木学会論文集，Vol.75, No.15, p.22-15009, 2023. [Aoki, H., Saiki, I., Otake, Y., Mitsui, R.: Estimation of cross-sectional characteristics by machine learning for evaluation of additional stress due to shear lag, *Journal of JSCE*, Vol.75, No.15, p.22-15009, 2023.]
20) 斉木功，新井晃朋，山本剛大，岩熊哲夫：非均質断面梁のせん断剛性評価に関する一考察，土木学会論文集 A2，Vol.73, No.2, pp.I_23-I_31, 2017. [Saiki, I., Arai, T., Yamamoto, T., Iwakuma, T.: On the shear stiffness of beams with heterogeneous cross section, *Journal of JSCE Ser.A2*, Vol.73, No.2, pp.I_23-I_31, 2017.]
21) 斉木功, 藤本竜太, 山本剛大：非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察 土木学会論文集 A2，Vol.74, No.2, pp.I_3-I_11, 2018. [Saiki, I., Fujimoto, R., Yamamoto, T.: On the rotation of the cross section for the evaluation of the shear stiffness of beams with heterogeneous cross section, *Journal of JSCE Ser.A2*, Vol.74, No.2, pp.I_3-I_11, 2018.]
22) 斉木功，鄭勳，山本剛大：断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2，Vol.75, No.2, pp.I_3-I_12, 2019. [Saiki, I., Zheng, X., Yamamoto, T.: Shear deformable beam theory with warping independent of shear deformation, *Journal of JSCE Ser. A2*, Vol.75, No.2, pp.I_3-I_12, 2019.]
23) 斉木功, 田淵航：Poisson 効果による断面変形を考慮した梁理論，土木学会論文集 A2, Vol.77, No.2, pp.I_59-I_68, 2021. [Saiki, I. and Tabuchi, K.: A beam theory considering cross-sectional deformation due to the poisson effect, *Journal of JSCE Ser.A2*, Vol.77, No.2, pp.I_59-I_68, 2021.]
24) 斉木功, 鄭勳：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021. [Saiki, I. and Zheng, X.: A beam theory with cross-sectional deformation due to both shear lag and transverse shear, *Journal of JSCE Ser. A2*, Vol. 77, No. 1, pp. 1-11, 2021.]
25) 日本道路協会：鋼道路橋設計便覧，丸善，2020. [Japan road association: Steel road bridge design handbook, Maruzen, 2020.]

(Received June 23, 2023)
(Accepted November 30, 2023)

A BEAM THEORY CONSIDERING CROSS-SECTIONAL DEFORMATION DUE TO TORSION APPLICABLE TO ARBITRARY CROSS-SECTIONS

Yohei SUDA and Isao SAIKI

A beam theory with cross-sectional deformation due to torsion applicable to arbitrary cross-sections is proposed. In this theory, the magnitude of the warping, which is independent of the angle of twist, is introduced. The cross-sectional deformation mode is obtained numerically by a finite element analysis of the representative volume element with periodic boundary conditions. This homogenization process makes the present theory applicable to arbitrary cross-sections. The deformation mode is used to obtain the cross-sectional parameters appeared in the derived governing equations. The result of the proposed method for a beam with heterogeneous cross-section shows good agreement with the result of finite element analysis.