土木学会論文集, Vol. 79, No. 15, 22-15009, 2023.

# せん断遅れによる付加的な応力評価のための機械学習による断面特性推定

青木 洋樹[1]・斉木 功[2]・大竹 雄[3]・三井 涼平[4]

[1]学生会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻（〒980–8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: hiroki.aoki.s8@dc.tohoku.ac.jp
[2]正会員 東北大学大学院准教授 工学研究科土木工学専攻（〒980–8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: isao.saiki.a4@tohoku.ac.jp (Corresponding Author)
[3]正会員 東北大学大学院准教授 工学研究科土木工学専攻（〒980–8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: yu.otake.b6@tohoku.ac.jp
[4]学生会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻（〒980–8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: ryouhei.mitsui.q7@dc.tohoku.ac.jp

道路橋示方書では，せん断遅れによる付加的な応力を有効幅を用いて見かけ上の曲げ剛性を小さくすることで考慮している．しかしせん断遅れは曲げではなく，せん断変形に起因する断面変形によって生じることが分かっている．これまでにせん断による断面変形の自由度を持つ梁理論が提案され，この断面変形梁理論では 3 つの断面パラメタを導入することでせん断遅れによる断面変形，ひいてはせん断遅れによる付加的な応力を高精度に求めることができる．しかし，断面パラメタの決定には代表体積要素の有限要素解析を行う必要がある．本研究では せん断遅れによる付加的な応力を簡易的かつ高精度で算定するために，有限要素解析の代わりに機械学習を用いた断面パラメタの推定法を提案する．提案手法を用いた付加的なひずみの精度を複数の検証用データで評価し，相対差が平均値 0.02%，標準偏差 0.2% 程度であることを確認した．

***Key Words:*** *shear lag, machine learning, Gaussian process regression, cross-section deformation, homogenized beam theory*

## 1. はじめに

幅広フランジを持つ梁のフランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布は，せん断遅れのために一様ではなく，ウェブ上の曲げ応力は初等梁理論よりも大きくなる．鋼桁以外では，吊橋や斜張橋の鋼製主塔および鋼製橋脚などの薄肉箱形断面部材で構成されたラーメン構造において，梁部材と柱部材との剛結合部分でせん断遅れが顕著に現れる[1)]．橋梁の設計においては応力の照査が主となることから，鋼桁の最大応力の近似値を得るために，フランジ幅を実際より狭い有効幅に置き換えて，見掛け上の曲げ剛性を小さくすることでせん断遅れが考慮される[2)]．

有効幅はフランジ幅と支間長の関数として定められている．しかし，せん断遅れに影響を与えるのはフランジ幅と支間長だけではない[3)] と考えられ，せん断遅れを考慮して応力を求める手法が検討されている．近年では，3 次元有限要素解析によるパラメトリックスタディから有効幅を推定する試みも行われている[4)]．

一方，有効幅を用いずにせん断遅れの影響を直接評価する試みとして，奥村・石沢[5)] は，面内力を級数展開して解析的にせん断遅れによる応力を推定している．また，Reissner[6)] は梁理論を拡張し，せん断遅れ変形を直接取り入れたせん断遅れの解析手法を提案している．この手法では，箱断面梁の橋軸方向変位の橋軸直角方向分布を二次関数で仮定しており，薄いフランジを有する箱断面では良い精度で応力分布を評価できる．箱断面のように断面を限定すれば，上記のような解析的手法は有効であるが，任意形状の断面に対して適用することはできない．

断面の制約を受けずにせん断遅れの解析を行うために，せん断遅れ変位分布の過程を設けず梁の代表体積要素の一様せん断変形[7)] からせん断遅れ変形モードを梁理論に組み込む半解析的手法が提案されている[8)9)]．また，せん断遅れの自由度を付加した梁要素

の提案もなされている[10]．加えて，梁の横せん断変形をせん断遅れと同様に独立な自由度として加えた梁理論が提案され[11]，その後，せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論が提案された[12]（以後，断面変形梁理論と呼ぶ）．この手法では，代表体積要素に一様せん断変形を与えたときの軸方向変位をそのまま断面変形モード $f$ として用いている．この梁理論によりせん断変形に起因する断面変形を考慮することで断面内の応力分布をより正確に評価できることが示されている．

断面変形梁理論を設計に適用しようとすると，断面変形モード $f$ によって定義される断面パラメタを算定する必要がある．そのため，設計変更の度に代表体積要素の解析が必要となる．代表体積要素の解析にはモデル作成の手間がかかるため，この工程をできる限り簡便化したいと考えた．そこで本論文では，代表体積要素の解析を行い断面変形モード $f$ を求める代わりに，機械学習を用いて断面パラメタを直接的に推定する手法を提案し，せん断遅れによる付加的な応力の簡便かつ高精度な評価手法を提案する．

## 2. 断面変形を考慮した梁理論

この章では，梁のせん断遅れ変形と横せん断変形による断面変形を統一的に考慮可能な梁理論[12]の概要を示す．まず，支配方程式および境界値問題の解析解の一例を示し，次に3つの断面パラメタのうち独立なパラメタが2つであることを示す．

### (1) 支配方程式

**図-1** に示すような長さ $\ell$ の長さ方向に一様な任意形状断面の梁を解析対象とし，梁軸方向を $x_1$，梁軸直角水平方向を $x_2$，鉛直方向を $x_3$ とする正規直交座標系を設定する．解析対象の梁軸方向領域を $L = \{x_1 \mid 0 \leq x_1 \leq \ell\}$，断面の領域を $A$ とする．また，断面に $x_2$ 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸と，$x_3$ 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸の交点を $x_2$，$x_3$ の原点とする．

任意形状断面の全断面領域において，せん断遅れに起因する軸方向変位と横せん断に起因する軸方向変位の両者を統合した断面変形の変位場を $f(x_2, x_3)$ とする．断面の回転を $\theta(x_1)$，断面変形の大きさを $g(x_1)$ とすると，梁の軸 $(x_1)$ 方向変位場は

$$u_1 = x_3\theta(x_1) + f(x_2, x_3)\, g(x_1) \tag{1}$$

と表すことができる．断面の平均的な横せん断変形

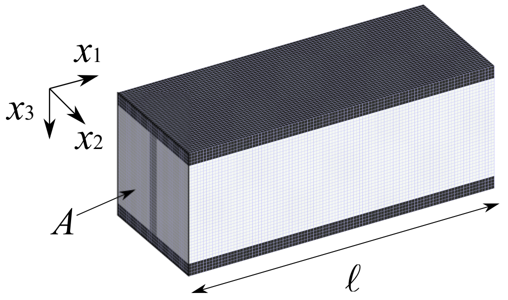


**図-1** 解析対象と座標・領域の設定

$\tilde{\gamma}$ を断面の回転とたわみ角の差として

$$\tilde{\gamma}(x_1) := \theta(x_1) - (-u_3') \tag{2}$$

と定義する．ここに := は定義，$(\cdot)'$ は $x_1$ に関する導関数を表す．また，軸方向と直交する2方向の変位場 $u_2$，$u_3$ は通常の梁理論と同様に断面内で一定とすると，変位場から導かれるひずみは

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3\theta' + f\,g' \tag{3}$$

$$\gamma_{12} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = f_{,2}\, g \tag{4}$$

$$\gamma_{13} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = \tilde{\gamma} + f_{,3}\, g \tag{5}$$

となる．$(\cdot)_{,i}$ は $x_i$ に関する偏導関数を表す．以上を考慮すると仮想仕事の原理から支配方程式

$$K_{\mathrm{b}}\theta''' + q = 0 \tag{6}$$

$$-K_{\mathrm{b}}\theta'' + K_{\mathrm{s}}\tilde{\gamma} + R_4 g = 0 \tag{7}$$

$$-R_2 g'' + R_4\tilde{\gamma} + R_3 g = 0 \tag{8}$$

を得る．ここに $q$ は $x_3$ 方向の分布荷重である．また $K_{\mathrm{b}}$，$K_{\mathrm{s}}$ はそれぞれ合成断面の曲げ剛性およびせん断剛性，$R_i$ は断面変形に関するパラメタであり，

$$\begin{aligned}
&K_{\mathrm{b}} := \int_A E(x_3)^2\,\mathrm{d}A, \quad K_{\mathrm{s}} := \int_A G\,\mathrm{d}A, \\
&R_2 := \int_A E f^2\,\mathrm{d}A, \\
&R_3 := \int_A G\left\{(f_{,2})^2 + (f_{,3})^2\right\}\mathrm{d}A, \quad R_4 := \int_A G f_{,3}\,\mathrm{d}A
\end{aligned} \tag{9}$$

と定義した．$E$，$G$ はそれぞれYoung率，せん断弾性係数である．以後 $R_i$ を断面パラメタと呼ぶ．

### (2) 等分布荷重を受ける単純梁の解析解

例として，**図-2** に示す単純支持の梁に等分布荷重を与えた境界値問題の解析解[12]を示す．

$M(x_1)$ を曲げモーメント，$D(x_1)$ を

$$
\begin{aligned}
D &:= \int_A f\sigma_{11}\,\mathrm{d}A = \int_A E\epsilon_{11} f\,\mathrm{d}A \\
&= \int_A E\left\{f x_3\theta + f^2 g'\right\}\mathrm{d}A = R_2 g'
\end{aligned} \tag{10}
$$

と表される断面変形に関する一般化力と定義する．単純支持の境界条件はこれらを用いて

$$
\begin{aligned}
&M(0)=0, \quad M(\ell)=0,\\
&u_3(0)=0, \quad u_3(\ell)=0,\\
&D(0)=0, \quad D(\ell)=0
\end{aligned} \tag{11}
$$

と表される．最後の 2 式は支点で断面変形の拘束がないことを意味する．実際の箱桁では支点等に設置されるダイアフラムによって断面変形が弾性的に拘束されるが，精度検証のため，本手法・参照解とも同条件で断面変形の拘束はないものとして解析を行った．

境界条件のもとでの支配方程式の解は

$$
g = c_1 e^{kx_1} + c_2 e^{-kx_1} + \frac{qR_4}{k^2 K_\mathrm{s} R_2}\left(x_1 - \frac{\ell}{2}\right) \tag{12}
$$

$$
\theta = \frac{q}{K_\mathrm{b}}\left(\frac{\ell x_1^2}{4} - \frac{x_1^3}{6} + c_3\right) \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
u_3 = {}& \frac{q}{K_\mathrm{b}}\left(\frac{x_1^4}{24} - \frac{\ell x_1^3}{12} - c_3 x_1\right) + \frac{q}{K_\mathrm{seq}}\left(\frac{\ell x_1}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right)\\
&- \frac{R_4}{kK_\mathrm{s}}\left(c_1 e^{kx_1} - c_2 e^{-kx_1}\right) + c_4
\end{aligned} \tag{14}
$$

である．$c_i$ は積分定数であり

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{qR_4}{K_\mathrm{s} R_2 k^3\left(e^{k\ell}+1\right)}, \quad c_2 = \frac{qR_4 e^{k\ell}}{K_\mathrm{s} R_2 k^3\left(e^{k\ell}+1\right)}\\
c_3 &= -\frac{\ell^3}{24}, \qquad\qquad c_4 = -\frac{q(R_4)^2}{k^4 (K_\mathrm{s})^2 R_2}
\end{aligned} \tag{15}
$$

である．また

$$
k^2 := \frac{R_3}{R_2} - \frac{(R_4)^2}{K_\mathrm{s} R_2} \tag{16}
$$

$$
K_\mathrm{seq} := K_\mathrm{s} - \frac{(R_4)^2}{R_3} \tag{17}
$$

と定義した．式 (12) と式 (13) を式 (1) に代入すると

$$
\begin{aligned}
u_1 = {}& \frac{qx_3}{K_\mathrm{b}}\left(\frac{\ell x_1^2}{4} - \frac{x_1^3}{6} + c_3\right)\\
&+ f\left\{c_1 e^{kx_1} + c_2 e^{-kx_1} + \frac{qR_4}{k^2 K_\mathrm{s} R_2}\left(x_1 - \frac{\ell}{2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{18}
$$

となる．上式を式 (3) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{11} = {}& \frac{qx_3}{K_\mathrm{b}}\left(\frac{\ell x_1}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right)\\
&+ f\left(kc_1 e^{kx_1} - kc_2 e^{-kx_1} + \frac{qR_4}{k^2 K_\mathrm{s} R_2}\right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

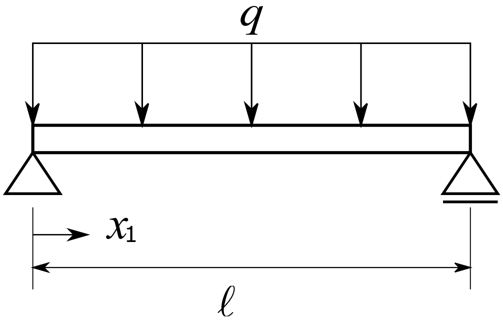


**図-2**　等分布荷重を受ける単純梁

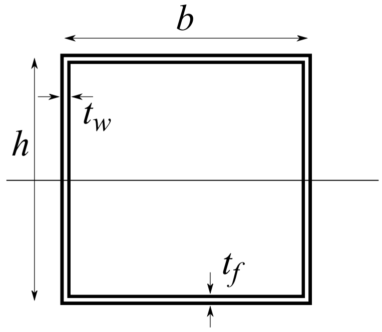


**図-3**　箱断面

となる．積分定数を式 (19) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{11} = {}& \frac{qx_3}{K_\mathrm{b}}\left(\frac{\ell x_1}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right)\\
&+ \frac{qf}{K_\mathrm{seq}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{k\ell}{2}}\mathrm{e}^{kx_1} + \mathrm{e}^{\frac{k\ell}{2}}\mathrm{e}^{-kx_1}}{\mathrm{e}^{\frac{k\ell}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{k\ell}{2}}} - \frac{qf}{K_\mathrm{seq}}
\end{aligned} \tag{20}
$$

と表せる．右辺の第 1 項は Euler-Bernoulli 梁の曲げによるひずみ，第 2 項以降が断面変形に起因する付加的なひずみである．式 (20) に示すように，付加的な軸ひずみは $f/K_\mathrm{seq}$ と $k$ によって決定される．

例として，**図-3** に示す均質箱断面について軸方向ひずみを計算する．$b$ は断面の幅，$h$ は断面の高さ，$t_f$ はフランジ厚，$t_w$ はウェブ厚を表す．ここでは $b = 3.87\,\mathrm{m}$，$h = 3.60\,\mathrm{m}$，$t_f = 0.07\,\mathrm{m}$，$t_w = 0.03\,\mathrm{m}$ とする． 文献[13] に基づき代表体積要素に単位の横せん断変形を与えた．代表体積要素は 1 次 6 面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した．軸方向

**表-1**　断面パラメタ

| | |
|---|---|
| $K_\mathrm{b}/E$ $(\mathrm{m}^4)$ | 1.90 |
| $K_\mathrm{s}/G$ $(\mathrm{m}^2)$ | $7.49\times10^{-1}$ |
| $R_2/E$ $(\mathrm{m}^4)$ | $7.05\times10^{-3}$ |
| $R_3/G$ $(\mathrm{m}^2)$ | $5.59\times10^{-1}$ |
| $K_\mathrm{seq}/G$ $(\mathrm{m}^2)$ | $1.90\times10^{-1}$ |
| $k$ $(\mathrm{m}^{-1})$ | 2.78 |
| $f_\mathrm{max}/(K_\mathrm{seq}/G)$ $(\mathrm{m}^{-1})$ | 1.19 |

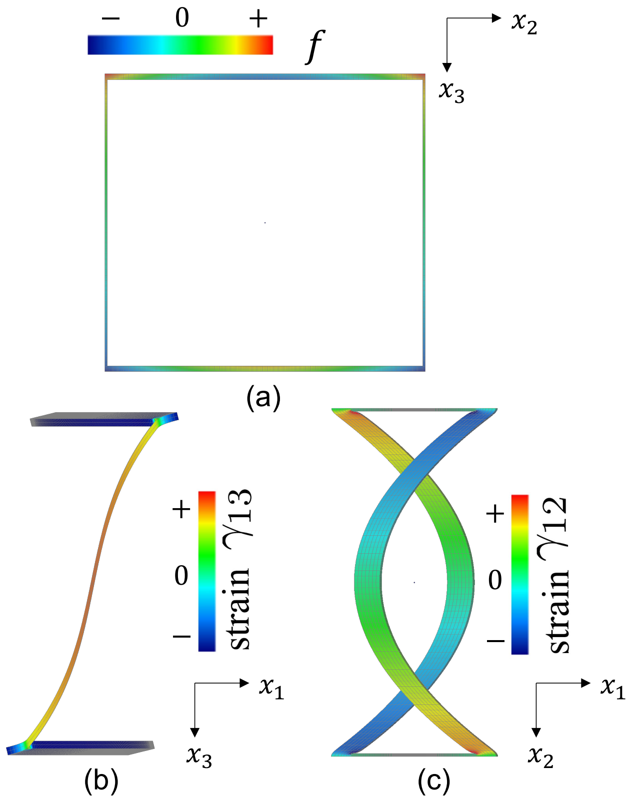


**図-4** 箱断面梁の代表体積要素のせん断変形

の周期長を 0.02m として，節点数は 26,904，要素数は 14,988 であった．得られた断面変形モード $f$ の分布を**図-4** に示す．断面変形モード $f$ から求めた断面パラメタを**表-1** に示す．この結果を式 (20) に代入して求めた軸方向ひずみを**図-5** に示す．支間長は 15m とした．ひずみは上フランジの橋軸直角方向端部（ウェブ外側）の着目点の最外縁である．ひずみの値は支間中央における参照解との比で表している．また，Euler の梁理論との差，すなわちせん断遅れによる付加的なひずみを**図-6** に示す．参照解は文献[12] と同様に連続体ソリッド要素の有限要素解析結果としている．参照解の解析モデルを**図-7** に示す．支間中央および断面中央における対称性を利用し 1/4 モデルとした．総要素数は 420,750 要素である．分布荷重はウェブに相当する要素に物体力として載荷し，全ての節点を $x_2$ 方向に拘束し，ヒンジ支点は支点上のすべての節点を $x_3$ 方向に拘束した．文献[12] と同様に，**図-5**，**図-6** から断面変形梁理論はせん断遅れを高精度に評価できることがわかる．また図中の示方書は道路橋示方書[2] の有効幅を用いて，Euler 梁として計算したものである．片側有効幅は $\lambda = 1.74$ m であった．示方書は支間中央でせん断遅れを過大評価していることが確認できる．なお，道路橋示方書の有効幅の規定は付録 A に示した．

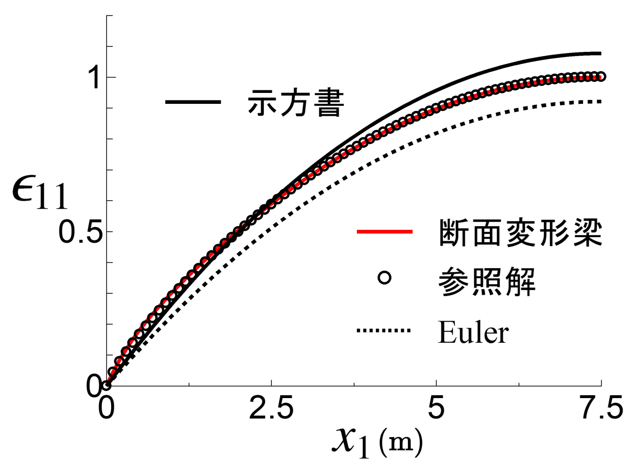


**図-5** 軸方向ひずみの橋軸方向分布

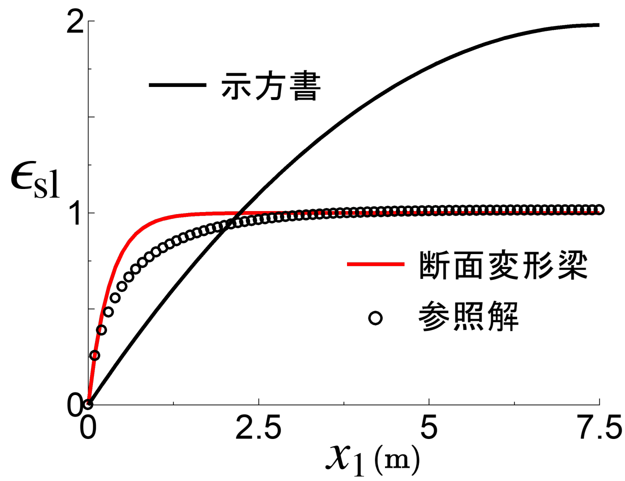


**図-6** せん断遅れによる付加的なひずみ

### (3) 断面パラメタ同士の関係

本節では，支配方程式 (6)，(7)，(8) に含まれる 3 つの断面パラメタのうち，独立なパラメタが 2 つであることを示す．

式 (4)，(5) より，せん断ひずみによる単位軸方向長さ当たりの弾性エネルギ密度は

$$\Pi_{\mathrm{int}} := \int_A G\left\{(f_{,2}\,g)^2 + (\tilde{\gamma} + f_{,3}\,g)^2\right\} \mathrm{d}A \qquad (21)$$

となり，式 (9) より

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{int}} &:= \int_A G\left\{(f_{,2})^2 g^2 + (f_{,3})^2 g^2 + 2\tilde{\gamma} g f_{,3} + \tilde{\gamma}^2\right\} \mathrm{d}A \\ &= R_3 g^2 + 2\tilde{\gamma} g R_4 + K_s \tilde{\gamma}^2\end{aligned} \qquad (22)$$

となる．

一方せん断力 $Q$ は，横せん断応力 $\sigma_{13} = G\gamma_{13}$ による合応力として

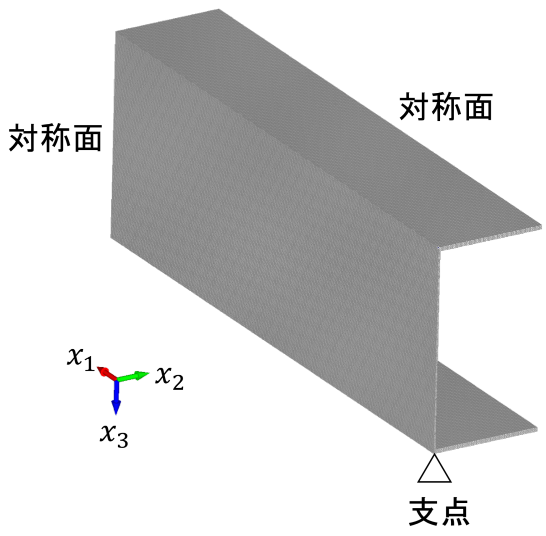


図-7　参照解のモデル

$$Q := \int_A \sigma_{13}\,\mathrm{d}A = \int_A G\gamma_{13}\,\mathrm{d}A = \int_A G\left\{\tilde{\gamma} + f_{,3}g\right\}\mathrm{d}A = K_\mathrm{s}\tilde{\gamma} + R_4 g \tag{23}$$

と表すことができる．したがって，せん断力 $Q$ と断面の平均的なせん断変形 $\tilde{\gamma}$ による単位長さあたりの仕事 $W_\mathrm{s}$ は

$$W_\mathrm{s} = (K_\mathrm{s}\tilde{\gamma} + R_4 g)\,\tilde{\gamma} \tag{24}$$

である．

いま，代表体積要素の単位横せん断変形 $\tilde{\gamma} = 1$ の計算において，一般化変位も単位，すなわち $g = 1$ である．これを考慮すると，単位長さあたりの弾性エネルギ密度 $\Pi_\mathrm{int}$ とせん断力による仕事 $W_\mathrm{s}$ が等しいことから

$$(K_\mathrm{s}\tilde{\gamma} + R_4 g)\,\tilde{\gamma} = R_3 g^2 + 2\tilde{\gamma} g R_4 + K_\mathrm{s}\tilde{\gamma}^2 \tag{25}$$

$$R_4 = R_3 + 2R_4 \quad \Rightarrow \quad R_4 = -R_3 \tag{26}$$

を得る．これを考慮すると，支配方程式 (6), (7), (8) は,

$$K_\mathrm{b}\theta''' + q = 0 \tag{27}$$

$$-K_\mathrm{b}\theta'' + K_\mathrm{s}\tilde{\gamma} - R_3 g = 0 \tag{28}$$

$$-R_2 g'' - R_3\tilde{\gamma} + R_3 g = 0 \tag{29}$$

と表される．

## 3. 断面パラメタの推定

### (1) 解析対象

せん断遅れと横せん断による断面変形が曲げに対して無視できない影響をおよぼす典型的な部材として，**図-3** に示す単一材料の箱断面を選択する．$b$ は断面の幅，$h$ は断面の高さ，$t_f$ はフランジ厚，$t_w$ はウェブ厚を表す．推定対象の範囲は，それぞれ $1\,\mathrm{m} \le b \le 4\,\mathrm{m}$，$1\,\mathrm{m} \le h \le 4\,\mathrm{m}$，$10\,\mathrm{mm} \le t_f \le 80\,\mathrm{mm}$，$10\,\mathrm{mm} \le t_w \le 80\,\mathrm{mm}$ とした．また，断面形状に関する無次元パラメタである幅高さ比 $b/h$ は $1 \le b/h \le 4$ とし，幅厚比 $b/t_f$，$h/t_w$ は $50 \le b/t_f \le 200$，$100 \le h/t_w \le 200$ とした．

### (2) 入力と出力

式 (20) で示したように，解析解が得られている場合は，$f/K_\mathrm{seq}$ と $k$ を推定することができれば，付加的な橋軸方向ひずみを解析的に求めることができる．解析解が利用できない場合は，断面変形を組み込んだ有限要素[10] を用いて，$\theta$，$g$ を求めれば式 (3) から付加的なひずみを求めることができる．ここで，式 (26)，式 (16)，式 (17) より

$$K_\mathrm{seq} = K_\mathrm{s} - R_3 \tag{30}$$

$$k^2 = \frac{R_3 K_\mathrm{seq}}{K_\mathrm{s} R_2} \tag{31}$$

であるため，$R_2$，$R_3$ が必要な断面パラメタとなる．設計において問題となる最大ひずみに着目した時，Euler-Bernoulli 梁の曲げによるひずみは，断面の中立面から最も離れた位置で最大になり，橋軸直角水平方向に一様である．一方，断面変形梁理論[12] では軸ひずみが断面変形モード $f$ に依存する．式 (20) より，上下対称の箱断面を仮定したとき，上下フランジにおいて $f/K_\mathrm{seq}$ が最大の点で軸ひずみが最大となる．そこで，フランジ上面の断面変形モード $f$ の最大値を $f_\mathrm{max}$ として，断面形状を入力，断面パラメタ $f_\mathrm{max}/K_\mathrm{seq}$，$R_2$，$R_3$ を出力とした推定モデルを構築した．出力に $f_\mathrm{max}/K_\mathrm{seq}$ を選択したが，これは $f_\mathrm{max}/K_\mathrm{seq}$ は幅高さ比 $b/h$ と強い相関があり，$f_\mathrm{max}$ で推定するよりも高精度になることが理由である．学習に使用した入力は断面形状を $b$，$h$ は 1m ごとに，$t_f$，$t_w$ は 10mm ごとに変化させた．学習データの入力とそれに対する出力は 99 個であった．

### (3) 推定手法

断面形状から断面パラメタを推定する手法として，Gauss 過程回帰[14] と LASSO 回帰[15] の 2 つを使用した．Gauss 過程回帰は基底関数の設定の必要がなく

汎用性が高いという理由から，LASSO 回帰は入力の陽な式で表すことができるという理由から採用した．

a) Gauss 過程回帰

断面形状を入力，それらに対する断面パラメタを出力として学習に使用する，教師あり学習の回帰モデルを構築した．まず，$D$ 個の基底関数からなる一般的な線形モデルは

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \tag{32}$$

と表される．$\boldsymbol{x}$ は入力ベクトル，$\boldsymbol{w}$ は $D$ 次元の重みベクトル，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ は基底関数のベクトルであり

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = (\phi_1(\boldsymbol{x}), \phi_2(\boldsymbol{x}), \cdots, \phi_D(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

である．ここに $\phi_d$ $(d = 1, 2, \cdots, D)$ は $D$ 個の基底関数である．$n$ 番目の入力 $x_n$ に対する出力 $y_n$

$$y_n = y(\boldsymbol{x}_n) \quad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{34}$$

の集合を要素にもつベクトルを $\boldsymbol{y}$ とすると，

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w} \tag{35}$$

と表せる．$\boldsymbol{\Phi}$ は $\Phi_{nd} = \phi_d(\boldsymbol{x}_n)$ を成分に持つ計画行列である．この時 $\boldsymbol{I}$ を単位行列として，重み $\boldsymbol{w}$ が平均 $\boldsymbol{0}$，共分散行列 $s^2\boldsymbol{I}$ の Gauss 分布 $\mathcal{N}$ に従う

$$\boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{0}, s^2\boldsymbol{I}\right) \tag{36}$$

とすると，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{w}$ の線形結合であるので，$\boldsymbol{y}$ も Gauss 分布に従う．式 (35)，(36) より $\boldsymbol{y}$ の期待値 $\mathbb{E}[\boldsymbol{y}]$ は

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{y}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w}] = \boldsymbol{\Phi}\mathbb{E}[\boldsymbol{w}] = \boldsymbol{0} \tag{37}$$

であり，$\boldsymbol{y}$ の共分散行列 $\boldsymbol{K}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= \mathbb{E}[\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}] - \mathbb{E}[\boldsymbol{y}]\mathbb{E}[\boldsymbol{y}]^{\mathrm{T}} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w})(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{w})^{\mathrm{T}}] \\ &= \boldsymbol{\Phi}\mathbb{E}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathbf{T}}]\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} = s^2\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{38}$$

である．$\boldsymbol{K}$ の成分 $K_{nn'}$ は

$$K_{nn'} = s^2\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_{n'}) \quad (n, n' = 1, 2, \cdots, N) \tag{39}$$

と表される．$\boldsymbol{K}$ の成分は内積で表されており，$\boldsymbol{x}_n$ と $\boldsymbol{x}_{n'}$ が似ていれば，対応する $\boldsymbol{y}_n$ と $\boldsymbol{y}_{n'}$ も似ていることを表現している．$K_{nn'}$ は $\boldsymbol{x}_n$，$\boldsymbol{x}_{n'}$ の関数であり，$K_{nn'}$ の値が得られれば基底関数 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ そのものを求める必要はない．そこで $K_{nn'}$ を与える関数を $\boldsymbol{x}_n$ と $\boldsymbol{x}_{n'}$ のカーネル関数と呼び，

$$K_{nn'} = k(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n'}) \tag{40}$$

と表す．本研究では Gauss カーネル

$$k(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n'}) = \theta_1 \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n'})^2}{\theta_2}\right) + \theta_3\delta(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n'}) \tag{41}$$

を用いた．第一項は Gauss 分布を表し，第二項は誤差項である．$\theta_i (i = 1, 2, 3)$ はハイパーパラメタであり，最尤推定を行うことで決定した．最尤推定の方法は付録 B に示した．このようなカーネル関数を用いることで，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ を求めずに共分散行列 $\boldsymbol{K}$ が求まる．カーネル関数から求まる共分散行列はカーネル行列と呼ばる．

Gauss 過程を用いて回帰問題を解くとき，$N$ 個の学習データ

$$\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2), \cdots, (\boldsymbol{x}_N, y_N)\} \tag{42}$$

が与えられており．$y$ は平均 0 に正規化されているとする．この時，$\boldsymbol{x}$ と $y$ の間に

$$y = f(\boldsymbol{x}) \tag{43}$$

の関係があり，関数 $f$ が平均 0 の Gauss 過程から生成されているとすると，$N$ 個の $y$ の集合 $\boldsymbol{y}$ は，カーネル行列 $\boldsymbol{K}$ を用いて

$$\boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{K}) \tag{44}$$

と表される．また，学習データに含まれない $M$ 個の入力を $\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_M^*)$，出力を $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, \cdots, y_M^*)$ とすると，学習データの出力 $\boldsymbol{y}$ に $\boldsymbol{y}^*$ を含めた出力ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}^* \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{k}_* \\ \boldsymbol{k}_*^{\mathrm{T}} & k_{**} \end{pmatrix}\right) \tag{45}$$

という Gauss 分布に従う．ここに，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{k}_*$，$\boldsymbol{k}_{**}$ の成分は

$$\boldsymbol{K}_{nn'} = k(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n'}) \quad (n, n' = 1, \cdots, N) \tag{46}$$

$$\boldsymbol{k}_{*nm} = k(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_m) \quad (n = 1, \cdots, N,\ m = 1, \cdots, M) \tag{47}$$

$$\boldsymbol{k}_{**mm'} = k(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{m'}) \quad (m, m' = 1, \cdots, M) \tag{48}$$

と表される．式 (45) は $\boldsymbol{y}^*$ と $\boldsymbol{y}$ の同時分布であり，Gauss 分布の要素間の条件付確率から, $\boldsymbol{y}$ が与えられた時の $\boldsymbol{y}^*$ の条件付確率は,

$$p(\boldsymbol{y}^* | \boldsymbol{x}^*, \mathcal{D}) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{k}_*^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{y}, k_{**} - \boldsymbol{k}_*^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{k}_*\right) \tag{49}$$

と求められ，上記の期待値 $\boldsymbol{k}_*^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y}^*$ の推定値とする．

$f_{\max}/K_{\mathrm{seq}}$，$R_2$，$R_3$ の推定におけるカーネル関数のハイパーパラメタを最尤推定した結果を表-2 に示す．

b) LASSO 回帰

LASSO(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) 回帰は線形回帰の一手法である．線形回帰は式 (32) のように出力 $\boldsymbol{y}$ を基底関数 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ とその重み $\boldsymbol{w}$

で表現する方法であり，損失関数が最小になる重み $\boldsymbol{w}$ を求めることで回帰式を構築する．線形回帰の精度は基底関数に依存するが，基底関数を客観的に選択することはできない．基底関数の数を増やすと精度が向上するが，過度に多くすると過学習が起こりやすくなる．また．設計式で用いることを考えると，基底関数は少ないほうが使いやすい．そこで基底関数を減らすスパース正則化が有用であると考えた．式 (32) のような線形モデルにおいて，$d$ 番目の重み係数 $w_d$ が 0 になれば $d$ 番目の基底関数 $\phi_d(\boldsymbol{x})$ を消去することができる．出力に対して関連度の低い基底関数を排除し，必要な基底関数のみを残す手続きを特徴選択と呼ぶ．特徴選択をした時のモデルの次元は $\boldsymbol{w}$ の非ゼロ要素の個数となる．モデルの次元を正則化項として用いる方法は L0 正則化と呼ばれる．L0 正則化は組み合わせ最適化問題になり，計算が困難である．そこで L0 正則化を凸関数で近似した L1 正則化と呼ばれる方法が有用であるとされている[15]．損失関数が二乗損失の場合，L1 正則化を用いた方法は LASSO 回帰と呼ばれる．LASSO 回帰ではデータ数 $N$，基底関数の数を $D$ とした時，損失関数 $E(\boldsymbol{w})$ を

$$E(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \sum_{j=1}^{D} w_j \phi_j(x_i)\right)^2 + \alpha \sum_{j=1}^{D} \left|w_j\right| \tag{50}$$

と設定し，これを最小化する $\boldsymbol{w}$ を求める．第一項が二乗損失の項であり，第二項が重み係数に関する正則化項である．$\alpha$ は正則化パラメタで，正則化の度合いを調整するパラメタである．LASSO 回帰による回帰式は多くの重み係数が 0 となり，スパースになりやすい．L1 正則化は重み係数の推定と特徴選択を同時に行うことができる方法であり，L0 正則化が実現される．本研究では，断面形状と断面パラメタの関係性が複雑であり，精度を維持しつつ，設計式として用いやすいよう，多くの基底関数の候補からできるだけ少ない基底関数で回帰するには，LASSO 回帰が最適であると考えてこの手法を採用した．

基底関数の候補は $b$，$h$，$t_f$，$t_w$ の $n$ 乗同士を掛け合わせた組み合わせとし，整数で $-2 \le n \le 2$ の範囲とした．またそれ以外にも，断面パラメタと相関が強いと判明した基底関数も候補に入れた．その中から関連度の高いものを選び，基底関数の候補は 3 つの断面パラメタの推定においてそれぞれ 100 個以内とした．式 (50) における正則化パラメタ $\alpha$ を大きくするほど 0 になる重み係数が多くなり，基底関数が減る．LASSO 回帰により基底関数を減らすことで性能低下が起きることを防ぐために，回帰式の決定係数が 0.995 を下回らない範囲で $\alpha$ を最大化した．ここで決定係数は，代表体積要素の有限要素解析から求めた断面パラメタを $y_i$，$y_i$ の平均を $\bar{y}_i$，LASSO 回帰により得た断面パラメタを $\hat{y}_i$，としたとき

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2} \tag{51}$$

と表される．決定係数は 1 に近いほど推定精度が良い．LASSO 回帰により $f_{\max}/K_{\mathrm{seq}}$，$R_2$，$R_3$ の回帰式は

$$\frac{f_{\max}}{K_{\mathrm{seq}}/G} = 0.0358\phi_1 + 0.0153\phi_2 - 0.934\phi_3 + 1.01 \quad (\mathrm{m}^{-1}) \tag{52}$$
$$(\phi_1 = (b/h)^{1.5} 1/t_f,\ \phi_2 = 1/t_w,\ \phi_3 = h/b)$$

$$R_2/E = 8.31\times10^{-3}\phi_1 + 3.31\times10^{-5}\phi_2 - 5.10\times10^{-5}\phi_3 + 6.35\times10^{-5} \quad (\mathrm{m}^4)$$
$$(\phi_1 = (b^{2.2}h^{0.1}t_f^{-0.5}t_w^{1.3})^{1.3},\ \phi_2 = b,\ \phi_3 = b/h) \tag{53}$$

$$R_3/G = 1.75\phi_1 + 1.17\times10^{-3}\phi_2 + 0.362\phi_3 + 1.85\phi_4 + 2.66\times10^{-2}\phi_5 + 2.52\times10^{-3} \quad (\mathrm{m}^2)$$
$$(\phi_1 = bt_f,\ \phi_2 = b,\ \phi_3 = bt_w,\ \phi_4 = t_f^2,\ \phi_5 = b^2 t_f) \tag{54}$$

と求まった．$b$，$h$，$t_f$，$t_w$ の単位はすべて m である．

3 つの断面パラメタに対する式 (52)〜(54) の回帰式を決定する際に用いた $\alpha$ を表-3 に示す．$\alpha$ が結果に及ぼす影響を示すために，$f_{\max}/(K_{\mathrm{seq}}/G)$ の回帰において用いた $\alpha = 8.4\times10^{-3}$ と，$\alpha$ を増減させたときの学習データに対する決定係数と基底関数の個数を表-4 に示す．表-4 から $\alpha$ を小さくすると正則化項の影響が小さくなり基底関数は 3 個から 7 個に増えるが，決定係数は向上していないことがわかる．逆に $\alpha$ を大きくすると正則化項の影響が大きくなり基底関数の数は 3 個から 2 個に減らせるが，決定係数が小さくなり精度が低下している．LASSO 回帰は正則化パラメタ $\alpha$ を小さくして基底関数を増やすと精度は向上するが，基底関数を一定以上増やすと精度の向上は頭打ちになる．そのため必要な精度を満たす範囲でなるべく大きな $\alpha$ を選択することで，スパースかつ高精度の回帰式が構築できる．

表-2　最尤推定により決定したハイパーパラメタ

| | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ |
|---|---|---|---|
| $f_{\max}/(K_{\mathrm{seq}}/G)$ | 36 | 0.80 | $1.8\times10^{-3}$ |
| $R_2/E$ | 16 | 1.1 | $3.2\times10^{-6}$ |
| $R_3/G$ | 70 | 23 | $3.3\times10^{-4}$ |

## 4. 推定精度の検証

### (1) 推定精度の確認方法

学習データとして 99 種類の断面形状とそれに対する断面パラメタを用意した．また学習データとは別に 20 種類の検証用データを用意した．検証用データはランダムに生成した断面形状とそれに対する断面パラメタである．推定能力の確認に検証用データを使用するのは過学習が起きていないことを確認するためである．検証用データにおける断面形状を入力して断面パラメタを推定し，代表体積要素の有限要素解析結果によるものと比較することで推定精度を確認する．

### (2) 断面パラメタの推定精度

検証用データ 20 個について断面パラメタを推定し，代表体積要素の有限要素解析と比較した時の，決定係数 $R^2$ を**表-5** に示す．Gauss 過程回帰も LASSO 回帰も 3 つのパラメタの決定係数はいずれも 0.997 より大きい．

### (3) 軸方向ひずみの評価

20 個の検証用データについて，推定した断面パラメタを用いて軸方向ひずみを評価する．道路橋示方書[2) ] と比較するために付録 A の方法で有効幅を決定し，Euler 梁と同様に軸ひずみを計算した．軸方向ひずみは単純梁に等分布荷重を載荷したときに最大となる，支間中央における上フランジ上面の値である．対象は**図-2** に示す単純梁とし，支間長 $\ell$ は 15m，等分布荷重 $q$ は 1kN/m とした．代表体積要素の有限要素解析で求めた断面パラメタによる軸ひずみと比較した時の相対差の分布を**図-8** に示し，その平均と標準偏差を**表-6** に示す．なお相対差 $\varepsilon_{\mathrm{R}}$ は推定した断面パラメタから求めた軸ひずみを $\epsilon_{\mathrm{est}}$，代表体積要素の有限要素解析で求めた断面パラメタによる軸ひずみを $\epsilon_{\mathrm{FEM}}$ とすると

$$\varepsilon_{\mathrm{R}} = \frac{(\epsilon_{\mathrm{est}} - \epsilon_{\mathrm{FEM}})}{\epsilon_{\mathrm{FEM}}} \tag{55}$$

と表される．**図-8** と**表-6** より，Gauss 過程回帰，LASSO 回帰はともに，示方書による方法よりも高精度に軸ひずみを求めることができ，ばらつきも小さいことが確認できる．また，示方書は軸ひずみを平均で 5% 程度過大評価していることがわかる．

**表-3** LASSO 回帰に用いた正則化パラメタ $\alpha$

| $f_{\max}/(K_{\mathrm{seq}}/G)$ | $R_2/E$ | $R_3/G$ |
|---|---|---|
| $8.4\times10^{-3}$ | $1.1\times10^{-5}$ | $6.4\times10^{-5}$ |

**表-4** 正則化パラメタ $\alpha$ と決定係数 $R^2$ の関係

| $\alpha$ | $R^2$ | 基底関数の個数 |
|---|---|---|
| $1.0\times10^{-1}$ | 0.8591 | 2 |
| $8.4\times10^{-3}$ | 0.9996 | 3 |
| $1.0\times10^{-3}$ | 0.9996 | 7 |

**表-5** 断面パラメタの回帰における決定係数 $R^2$

| | Gauss 過程 | LASSO 回帰 |
|---|---|---|
| $f_{\max}/(K_{\mathrm{seq}}/G)$ | 0.9991 | 0.9996 |
| $R_2/E$ | 0.9996 | 0.9970 |
| $R_3/G$ | 0.9999 | 0.9999 |

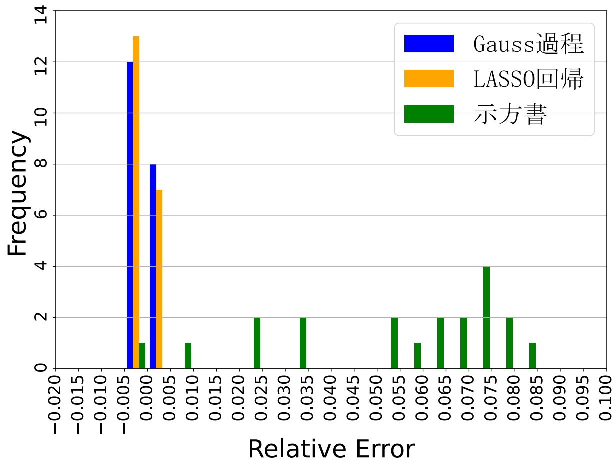


**図-8** ウェブ上軸ひずみの相対差の分布

## 5. おわりに

本研究では，せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮できる梁理論[12)] で用いる断面パラメタを，断面形状を表すパラメタを入力として Gauss 過程回帰と LASSO 回帰により推定する方法を提案した．この方法を，薄肉箱断面に対して適用したところ，いずれの手法においても決定係数は 0.997 以上となり，代表体積要素の有限要素解析をせずに実用上十分な精度で断面パラメタを得ることができた．推定したパラメタを用いて軸方向ひずみを算出した結果，代表体積要素の有限要素解析結果に対する相対差が平均値 0.02%，標準偏差 0.2% 程度となった．

**表-6** ウェブ上軸ひずみの相対差の平均値と標準偏差

| | Gauss 過程 | LASSO 回帰 | 示方書 |
|---|---|---|---|
| 平均値 | $5.26\times10^{-5}$ | $2.07\times10^{-4}$ | $5.32\times10^{-2}$ |
| 標準偏差 | $1.73\times10^{-3}$ | $1.42\times10^{-3}$ | $2.45\times10^{-2}$ |

2 種類の方法のうち，Gauss 過程回帰による方法は基底関数を選択する必要がないため，汎用性が高いというメリットがある．しかし，断面パラメタを求めるために学習データの数と同サイズの行列計算が必要になる．それに対して LASSO 回帰による方法は回帰式を明示できるので設計に適用しやすく，簡便さにおいて Gauss 過程より優れていると考えられる．本論文では均質な箱断面のみを扱ったが，提案手法は学習データを作り直せば任意の断面に対して適用可能なので，今後は T 形断面や合成断面に対する有効性を検討する予定である．

**謝辞：**本研究の一部は JSPS 科研費 15K14017（代表：斉木　功），18K04318（代表：斉木　功）の助成および日本鉄鋼連盟鋼構造研究支援助成を受けたものです．

## 付録 A　道路橋示方書の有効幅

道路橋示方書[2) では，せん断遅れの影響を考慮するために有効幅の概念が用いられている．腹板間隔の 1/2 又は片持部のフランジの突出幅を $b$(mm)，等価支間長を $l$(mm) とした時，単純梁のフランジ片側有効幅 $\lambda$(mm) は

$$
\begin{aligned}
\lambda &= b && \left(\frac{b}{l} \leqq 0.05\right)\\
&= \left\{1.1 - 2\left(\frac{b}{\ell}\right)\right\} b && \left(0.05 < \frac{b}{l} < 0.30\right)\\
&= 0.15l && \left(0.30 \leqq \frac{b}{l}\right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

と規定されている．

## 付録 B　ハイパーパラメタの最尤推定

Gauss 過程回帰において，式 (41) のカーネル関数のハイパーパラメタ $\theta_i$ を最適化する方法を示す．

まずハイパーパラメタ $\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$ をまとめて $\boldsymbol{\theta}$ とおく．カーネル関数は $\boldsymbol{\theta}$ に依存するため，それを明示すると

$$
k\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' | \boldsymbol{\theta}\right) = \theta_1 \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}{\theta_2}\right) + \theta_3 \delta\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\right) \tag{57}
$$

と表される．よって $k$ を成分とするカーネル行列も $\boldsymbol{\theta}$ に依存するので $\boldsymbol{K_\theta}$ と表す．この時，学習データの入力 $\boldsymbol{X}$ から学習データの出力 $\boldsymbol{y}$ を得る確率は

$$
p\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\theta}\right) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{0}, \boldsymbol{K_\theta}\right) \tag{58}
$$

$$
= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{|K_\theta|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{K_\theta}^{-1} \boldsymbol{y}\right) \tag{59}
$$

となる．$\mathcal{N}\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{0}, \boldsymbol{K_\theta}\right)$ は平均 $\boldsymbol{0}$，共分散行列 $\boldsymbol{K_\theta}$ の確率密度関数における $\boldsymbol{y}$ の確率である．式 (59) の対数を取ると

$$
\begin{aligned}
\log p\left(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\theta}\right) &= -\frac{N}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\boldsymbol{K_\theta}|\\
&\quad -\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{K_\theta}^{-1} \boldsymbol{y}\\
&\propto -\log|\boldsymbol{K_\theta}| - \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{K_\theta}^{-1} \boldsymbol{y}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

となり，式 (60) の尤度関数を最大化する $\boldsymbol{\theta}$ を求めればよい．本研究ではマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法の一手法であるメトロポリス法[16) を用いて $\boldsymbol{\theta}$ を決定した．

## REFERENCES


1) 街道 浩：面内面外荷重を受ける鋼製ラーメン隅角部の応力計算について，川田技報，Vol. 9, pp. 140-149, 1990. [Kaido, H.: Design of steel rigid frame structures subjected to in-plane and out-plane loads, *technical journal of Kawada*, Vol. 9, pp. 140-149, 1990.]

2) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅱ 鋼橋・鋼部材編，2017. [Japan Road Association: Road Bridge Specification,/Explanation, Ⅱ Steel bridge / steel material edition, 2017. ]

3) Kuzmanovic, B. O. and Graham, H. J.: Shear lag in box girders, *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 107, No. 9, pp. 1701-1712, 1981.

4) 奥井義昭，本田卓士，KHAN, Q.-Z., 長井正嗣：連続合成桁のひび割れ幅算定のための床版有効幅推定式の提案，土木学会論文集，No. 780/I-70, pp. 155-163, 2005. [Okui, Y., Honda, T., Khan, Q.-Z. and Nagai, M.: Effective width formula of concrete slabs for crack width evaluation in continuous composite bridges, *Journal of JSCE*, No. 780/I-70, pp. 155-163, 2005.]

5) 奥村敏恵，石沢成夫：薄板構造ラーメン隅角部の応力計算について，土木学会論文集，No. 153，pp. 1-18，1967．[Okumura, T. and Ishizawa, N.: The design of knee joints for rigid steel frames with thin walled section, *Journal of JSCE*, No. 153, pp. 1-18, 1967.]

6) Reissner, E.：Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, Vol. 4, No. 3, pp. 268-278, 1946.

7) 斉木 功，鑓 一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫：非均質な Timoshenko 梁の平均物性評価，土木学会論文集 A2, Vol. 68, No. 2, pp. I_161-I_169, 2012. [Saiki, I., Yari, K., Yamada, M., Setogawa, A. and Iwakuma, T.: Evaluation of averaged mechanical property of timoshenko beams with microstructures, *Journal of JSCE Ser. A2*, Vol. 15, No. 2, pp. 161-169, 2012.]

8) 斉木 功，西井大樹，岩熊哲夫：任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法，土木学会論文集 A2, Vol. 71, No. 2, pp. I_11-I_18, 2015. [Saiki, I., Nishii, D. and Iwakuma, T.: Semi-analytical method for shear lag analysis of beams with arbitrary cross section, *Journal of JSCE Ser.*

*A2*, Vol. 71, No. 2, pp. I_11-I_18, 2015.]
9) 斉木 功，西井大樹，岩熊哲夫：任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化，土木学会論文集 A2, Vol. 72, No. 2, pp. I_53-I_62, 2016. [Saiki, I., Nishii, D. and Iwakuma, T.: Enhancement of accuracy of semi-analytical method for shear lag of beams with arbitrary cross section, *Journal of JSCE Ser. A2*, Vol. 72, No. 2, pp. I_53-I_62, 2016.]
10) 斉木 功, 西井大樹, 山本剛大：任意断面梁のせん断遅れを考慮できる梁要素, 日本計算工学会論文集, Vol. 2018, p. 20180013, 2018. [Saiki, I., Nishii, D. and Yamamoto, T.: A beam element for shear lag analysis of beams with arbitrary cross section, *Transactions of JSCES*, Vol. 2018, p. 20180013, 2018.]
11) 斉木 功，鄭 勲，山本剛大：断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2, Vol. 75, No. 2, pp. I_3-I_12, 2019. [Saiki, I., Zheng, X. and Yamamoto, T.: Shear deformable beam theory with warping independent of shear deformation, *Journal of JSCE Ser. A2*, Vol. 75, No. 2, pp. I_3-I_12, 2019.]
12) 斉木 功, 鄭 勲：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2, Vol. 77, No. 1, pp. 1-11, 2021. [Saiki, I. and Zheng, X.: A beam theory with cross-sectional deformation due to both shear lag and transverse shear, *Journal of JSCE Ser. A2*, Vol. 77, No. 1, pp. 1-11, 2021.]
13) 斉木 功，藤本竜太，山本剛大：非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察，土木学会論文集 A2, Vol. 74, No. 2, pp. I_3-I_11, 2018. [Saiki, I., Fujimoto, R. and Yamamoto, T: On the rotation of the cross section for the evaluation of the shear stiffness of beams with heterogeneous cross section, *Journal of JSCE Ser. A2*, Vol. 74, No. 2, pp. I_3-I_11, 2018.]
14) 持橋大地，大羽成征：ガウス過程と機械学習，講談社，2019．[Motihashi, D. and Ooba, S.: *Gaussian Process and Machine Learning*, Kodansha, 2019.]
15) 鈴木大慈：過学習と正則化, 応用数理, 28 巻 2 号, 2018．[Suzuki, D.: Overlearning and regularisation, *Applied mathematics*, Vol. 28, No. 2, 2018.]
16) 花田政範，松浦壮：ゼロからできる MCMC，マルコフ連鎖モンテカルロ法の実践的入門，講談社，2020．[Hanada, M. and Matsuura,S.: *MCMC from scratch, A Practical Introduction to Markov Chain Monte Carlo Methods*, Kodansha, 2020.]

**(Received June 24, 2022)**
**(Accepted November 30, 2022)**

# ESTIMATION OF CROSS-SECTIONAL CHARACTERISTICS BY MACHINE LEARNING FOR EVALUATION OF ADDITIONAL STRESS DUE TO SHEAR LAG

Hiroki AOKI, Isao SAIKI, Yu OTAKE and Ryohei MITSUI

The distribution of bending stress along the direction perpendicular to the bridge axis on the flange of beams with a wide flange is not uniform due to shear lag. In the design of beams, the additional stress due to the shear lag is considered by reducing the bending rigidity by the effective width. However, it has been known that the shear lag is not caused by bending but by cross-sectional deformation associated with shear deformation. In this context, a beam theory with a degree of freedom of cross-sectional deformation due to shear is proposed to evaluate shear lag effect. While the beam theory considering cross-sectional deformation has been known to estimate shear lag effect accurately, a finite element analysis of representative volume of cross-section is required to obtain a couple of additional cross-sectional parameters. In this study, we propose a method to estimate the additional parameters using LASSO regression and Gaussian process regression. The accuracy of the proposed method is confirmed by a set of test data.