

# 相反定理に基づく 有限要素モデルの修正が不要な影響線の解析

斉木 功<sup>1</sup>・三井 涼平<sup>2</sup>・横山 薫<sup>3</sup>・鈴木 俊光<sup>4</sup>・橋本 幹司<sup>5</sup>

<sup>1</sup>正会員 東北大学大学院准教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail: isao.saiki.a4@tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

<sup>2</sup>学生会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail: ryouhei.mitsui.q7@dc.tohoku.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 エム・エムブリッジ株式会社 プロジェクト室 (〒103-0006 東京都中央区日本橋富沢町 9-19)

E-mail: yokoyama.kaoru@mm-bridge.co.jp

<sup>4</sup>正会員 エム・エムブリッジ株式会社 プロジェクト室 (〒103-0006 東京都中央区日本橋富沢町 9-19)

E-mail: suzuki.toshimitsu@mm-bridge.co.jp

<sup>5</sup>非会員 エム・エムブリッジ株式会社 技術部 (〒733-0036 広島県広島市西区観音新町 1-20-24)

E-mail: hashimoto.tsuyoshi@mm-bridge.co.jp

橋梁のように移動荷重を受ける構造物の設計において、着目点の応力等を荷重載荷位置で表した影響線は必要不可欠な概念である。影響線を有限要素モデルで求めようとする、荷重作用範囲の節点数と同じ数の解析が必要となる。一方、Müller-Breslauの原理を有限要素解析に適用する方法も提案されているが、着目点に不連続変位を与えるため、手間のかかるモデルの修正が必要となる。そこで本論文では、モデルの修正が不要で汎用有限要素解析コードへの実装が容易な影響線の解析手法を提案する。提案手法は有限要素離散化した問題へ直接適用した相反定理に基づいている。平面応力問題および3次元問題の具体例に対して、提案手法により求められた影響線を通常の単位荷重による有限要素解析結果と比較することで提案手法の妥当性を確認した。

**Key Words:** reciprocal theory, Müller-Breslau, finite element model, influence line

## 1. はじめに

橋梁のように不確定な移動荷重を受ける構造物の設計において、着目点の応力等の応答を荷重載荷位置で表した関数、すなわち影響線は必要不可欠な概念である。影響線は微分方程式のGreen関数であり、構造解析においては載荷位置が1次元であるために影響線と呼ばれているが、3次元有限要素モデルでは載荷位置は2次元の床版面であるために影響面と呼ばれることもある。本論文においては、解析の次元に関わらず統一して影響線と呼ぶこととする。

設計においては、構造解析における断面力の影響線が一般的によく用いられる。一方で、3次元有限要素モデルに対しては、構造解析のレベルほど影響線は用いられていないようであるが、例えば、森ら<sup>1)</sup>は走行車両位置による鋼床版デッキ進展き裂起点の応力の低減可能性を検討するために、3次元有限要素モデルによるき裂起点の応力影響面の利用が効率的

であると述べており、1000点を超える載荷位置に対する有限要素解析を行っている。また、有限要素モデルによる鋼床版の疲労耐久性評価が横関ら<sup>2)</sup>や横山ら<sup>3)</sup>によって行われているが、ダブルタイヤを模した接地面への等分布荷重を橋軸直角方向に160mm間隔で10ケース、橋軸方向に100mmないし200mm間隔で16ケース程度と限定したケース数を用いている。このように、3次元有限要素モデルにおいて影響線を求めるためには、単位荷重の載荷位置を変化させた多数の解析ケースを実行しなくてはならない。そのため、単位載荷位置を床版上面で変化させる、いわゆるプリプロセスを自動化したとしても、床版上面に含まれる節点と同数の解析実行には多くの時間を要する。さらに、解析結果から、着目点の応答を床版面に関連付けて影響線の可視化を行うポストプロセスも必要となる。

一方、構造解析における影響線の解析手法として知られるMüller-Breslauの原理は、有限要素モデルに

も適用可能である。この方法では荷重位置を変更する必要がなく、一つの着目点に対して一度の解析を実行するだけでよく、着目点の応答を床版面に関連付けるポストプロセスも不要であり、着目点の数が床版面の節点数に比べて少ない場合は計算量を大幅に低減することが可能である。これに関しては、石川ら<sup>4)</sup>、佐光ら<sup>5)</sup>の口頭発表の報告がなされている。Cifuentes and Paz<sup>6)</sup>、Orakdöğen and Girgin<sup>7)</sup>は骨組要素と平板要素に Müller-Breslau の原理を直接適用する方法とその数値例を報告している。古市ら<sup>8)</sup>は平面シェル要素を用いた鋼橋の3次元有限要素モデルによる疲労検討に Müller-Breslau の原理を適用している。しかし、着目点に節点を追加し要素コネクティビティを修正(以後、2重節点化と呼ぶ)する必要がある。この操作は、影響線を求めたい着目点ごとに行う必要があり、プリプロセスの手間が増えることになるため、改善の余地があると考え。2重節点化のモデル修正を行わずに影響線を求める方法として、Shen<sup>9)</sup>は一般化 Müller-Breslau 原理を提案している。この原理は、要素に単位ひずみを生じさせる標準変位 (standard displacement) モードを用いるため、要素の平均応力の影響線を求めることができるが、着目点の応力の影響線を求めることはできない。また、Jaspen and Damkilde<sup>10)</sup>は Müller-Breslau の方法における不連続変位と整合した荷重 (consistent nodal force) を載荷する方法を提案している。しかし、この方法では不連続変位の影響を陽に考慮していないため、最終的には不連続変位の影響を重ね合わせる必要があると述べている。

Müller-Breslau の原理とは別なアプローチとして、adjoint 法に基づく影響線の解法も提案されている<sup>11), 12)</sup>。この方法は、最適化問題における感度解析に用いられる方法を応用したもので、影響線と等価となる随伴 (adjoint) 変数が解となる随伴方程式を定式化する方法である。この方法では、通常の有限要素解析の外力項に相当する右辺定数項を計算するために、着目点応力の変位ベクトルに関する勾配を求める必要があるため、汎用有限要素解析コードへの直接的な実装には適していない<sup>10)</sup>。

以上のことを鑑み、本論文では、Müller-Breslau の原理に基づく影響線の解析が有する、一つの着目点に対して一度の解析を実行するだけでよく、着目点の応答を床版面に関連付けるポストプロセスも不要であるという利点をそのままに、有限要素モデルの修正が不要で汎用有限要素解析コードへの実装が容易な影響線の解析手法を提案することを目的とする。そのために、相反定理を有限要素離散化した構造解析の問題に直接適用するための定式化を行う。なお、

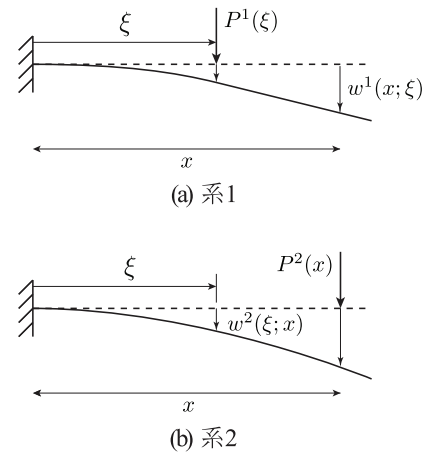


図-1 Müller-Breslau の原理によるたわみの影響線の解析

提案手法は構造要素・ソリッド要素のどちらにも適用可能であるが、本論文では連続体ソリッド要素を対象とする。提案手法の妥当性は、通常の単位荷重を載荷した有限要素解と比較することで確認する。

## 2. Müller-Breslau の原理に基づく影響線の解析

影響線の解析手法として知られる Müller-Breslau の原理は、相反定理にその基礎を置いている。相反定理は、2つの系を考え、それぞれの系において、異なる系の外力・内力をつり合い系として補仮想仕事を考え、線形弾性体であれば2つの系の内力補仮想仕事が等しいことから、2つの系の外力補仮想仕事が等しくなるという定理である。系  $i$  での変位と外力をそれぞれ  $u^i, q^i$  とすると、相反定理は

$$\int_V u^1 q^2 dV = \int_V u^2 q^1 dV \quad (1)$$

と表される。ここに、上付きの数字はその物理量が定義される系の番号を意味する。

本章では、次章に示す提案手法と既存手法との違いを明確にするために、既存手法である構造解析における Müller-Breslau の原理に基づく影響線の解析および有限要素モデルにおける Müller-Breslau の原理に基づく影響線の解析の定式化を示す。

### (1) 構造解析における Müller-Breslau の原理に基づく影響線の解析

例えば、梁構造におけるたわみの影響線は以下のようにして求めることができる。いま、図-1に示すように、系1の外力を任意点  $\xi$  の集中荷重  $P^1(\xi)$  とし、系2の外力をたわみの着目点  $x$  の集中荷重  $P^2(x)$

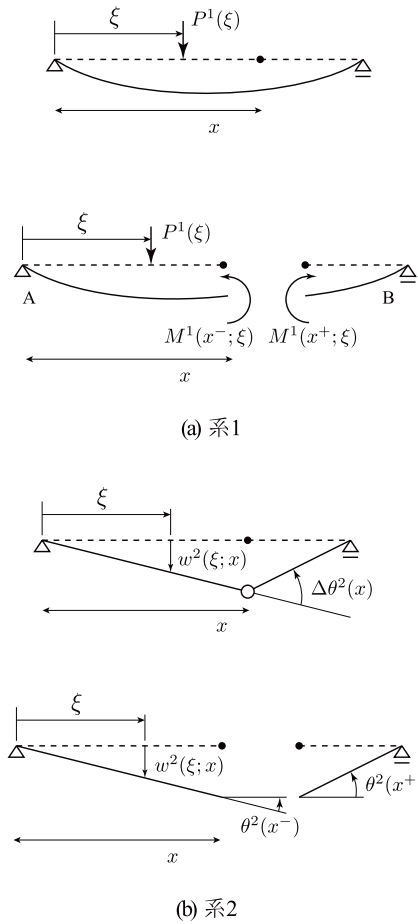


図2 Müller-Breslau の原理による曲げモーメントの影響線の解析

とし、系1の  $x$  におけるたわみと系2の  $\xi$  におけるたわみをそれぞれ  $w^1(x; \xi), w^2(\xi; x)$  と定義する。ここに  $\xi$  の後ろの変数は荷重作用点を意味する。以上から、相反定理より

$$w^1(x; \xi)P^1(\xi) = w^2(\xi; x)P^1(\xi) \quad (2)$$

を得る。集中荷重の大きさを単位とすれば

$$w^1(x; \xi) = w^2(\xi; x) \quad (3)$$

となり、任意点  $\xi$  に単位荷重が作用するときのたわみ  $w^1(x; \xi)$ 、すなわち位置  $x$  におけるたわみの影響線は  $x$  に単位荷重が作用するときの  $\xi$  におけるたわみであることが確認できる。これは Müller-Breslau の原理として知られている。

Müller-Breslau の原理により、例えば梁構造における曲げモーメントのような内力の影響線を求めることもできる。このとき、内力の補仮想仕事を取り出すためには不連続な変形を考える必要がある。そこで、図2に示すように、系2の曲げモーメント着目点  $x$  に不連続な相対回転  $\Delta\theta^2(x)$  を考える。  $x$  において不連続な変形を考えているので、  $\theta^2$  に以下のよう

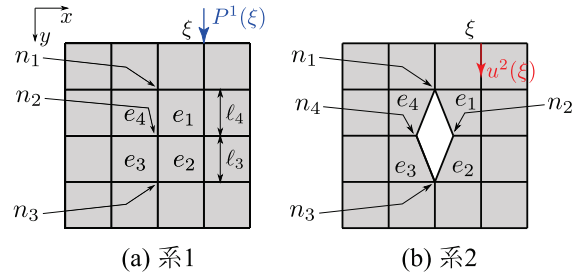


図3 有限要素モデルへの Müller-Breslau の原理の適用

な左側極限・右側極限

$$\theta^2(x^-) = \lim_{x \rightarrow x-0} \theta^2(x), \quad \theta^2(x^+) = \lim_{x \rightarrow x+0} \theta^2(x) \quad (4)$$

を定義すれば  $\Delta\theta^2(x) = \theta^2(x^+) - \theta^2(x^-)$  である。  $M^1$  にも同様に左側極限・右側極限を定義すれば、両系に対する相反定理が

$$0 = w^2(\xi; x)P^1(\xi) + \theta^2(x^-)M^1(x^-; \xi) + \theta^2(x^+)M^1(x^+; \xi) \quad (5)$$

と表せる。ここで、作用反作用の法則より  $M^1(x^-; \xi) = M^1(x; \xi) = -M^1(x^+; \xi)$  となることを考慮すると、上式は

$$0 = w^2(\xi; x)P^1(\xi) - (\theta^2(x^+) - \theta^2(x^-))M^1(x; \xi) \quad (6)$$

と表せ、系1の荷重が単位で、系2の  $x$  における不連続相対回転  $\Delta\theta^2(x)$  が単位、すなわち  $\theta^2(x^+) - \theta^2(x^-) = 1$  であれば

$$M^1(x; \xi) = w^2(\xi; x) \quad (7)$$

となり、系2のたわみが  $x$  における曲げモーメントの影響線となることが示される。

## (2) 有限要素解析における Müller-Breslau の原理に基づく影響線の解析

不連続変位を与えたときの相反定理を表す式(5)もしくは式(6)は、不連続変位を与えた系の変位が、不連続変位と仕事共役な内力の影響線となることを意味している。古市ら<sup>8)</sup>は有限要素モデルに仮想スリットを設け、内力の影響線を求める方法を報告しているが、根拠となる定式化は示されていない。以下ではその定式化について述べる。

簡単のため、平面問題を四辺形双一次要素で規則的な長方形形状に離散化した場合を考える。ここで、図3(a)に示すように直交座標系  $x, y$  を設定し、有限要素モデルの要素  $e_1, e_2$  と  $e_3, e_4$  の境界上の節点  $n_2$  に作用する  $x$  方向の力に着目する。同図(b)のように、(a)の節点  $n_2$  を2重節点化し、  $n_2$  と同じ位置に節点  $n_4$  を新たに設け、要素  $e_3, e_4$  の節点  $n_2$  を節点  $n_4$  に変更したモデルに修正し、節点  $n_4$  と  $n_2$  に  $x$  方向

の相対変位を与え,  $n_4$  と  $n_2$  の  $y$  方向変位は等しいとした状況を系 2 とする. 系 1 としては, 元の有限要素モデルの任意点  $\xi$  に荷重  $P^1(\xi)$  が作用している状況とする. 系 1 と 2 において相反定理を適用すると

$$0 = \mathbf{u}^2(\xi) \mathbf{P}^1(\xi) + \int_{p_1} \mathbf{u}^2(p_1) \boldsymbol{\sigma}^1(p_1; \xi) \mathbf{n}_1 dp_1 + \int_{p_2} \mathbf{u}^2(p_2) \boldsymbol{\sigma}^1(p_2; \xi) \mathbf{n}_2 dp_2 \quad (8)$$

と表せる. ここに,  $p_1$  は節点  $n_1, n_4, n_3$  に沿う要素  $e_4, e_3$  境界上の経路,  $p_2$  も同様に節点  $n_1, n_2, n_3$  に沿う要素  $e_1, e_2$  境界上の経路を意味し,  $\boldsymbol{\sigma}(p_i)$  は経路  $p_i$  上における応力テンソル,  $\mathbf{n}_i$  は  $p_i$  の外向き法線ベクトルである. ここで,  $p_1$  上の変位が

$$\mathbf{u}^2(p_1) = \mathbf{u}^2(n_1) N_{n_1}(p_1) + \mathbf{u}^2(n_4) N_{n_4}(p_1) + \mathbf{u}^2(n_3) N_{n_3}(p_1) \quad (9)$$

のように有限要素離散化されているとする. ここに,  $\mathbf{u}(n_i)$  は節点  $i$  の変位,  $N_{n_i}(p_1)$  は節点  $i$  の  $p_1$  上の変位関数を表す. この有限要素離散化により, 式 (8) の右辺第 2 項は

$$\int_{p_1} \mathbf{u}^2(p_1) \boldsymbol{\sigma}^1(p_1; \xi) \mathbf{n}_1 dp_1 = \mathbf{u}^2(n_1) \mathbf{t}_1^1 + \mathbf{u}^2(n_4) \mathbf{t}_4^1 + \mathbf{u}^2(n_3) \mathbf{t}_3^1 \quad (10)$$

のように離散化される. ここに,  $\mathbf{t}_i^j$  は  $p_j$  上の節点  $i$  の節点力であり

$$\mathbf{t}_i^j = \int_{p_j} N_{n_i}(p_j) \boldsymbol{\sigma}^1(p_j; \xi) \mathbf{n}_j dp_j \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

と定義される. 同様に式 (8) の右辺第 3 項は

$$\int_{p_2} \mathbf{u}^2(p_2) \boldsymbol{\sigma}^1(p_2; \xi) \mathbf{n}_2 dp_2 = \mathbf{u}^2(n_1) \mathbf{t}_1^2 + \mathbf{u}^2(n_2) \mathbf{t}_2^2 + \mathbf{u}^2(n_3) \mathbf{t}_3^2 \quad (12)$$

と表せる. いま, 作用反作用の法則より,  $p_1$  上の応力の表面力ベクトルと  $p_2$  上の応力の表面力ベクトルがつり合っている. よって  $\boldsymbol{\sigma}^1(p_1; \xi) \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\sigma}^1(p_2; \xi) \mathbf{n}_2 = 0$  であり,  $\mathbf{t}_2^1 + \mathbf{t}_4^1 = 0$  である. さらに,  $p_1$  と  $p_2$  で節点  $n_1, n_3$  が共通であることを考慮すると, 式 (8) は

$$\mathbf{t}_4^1 \Delta \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^2(\xi) \mathbf{P}^1(\xi) \quad (13)$$

と表すことができる. ここで,  $\Delta \mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}^2(n_2) - \mathbf{u}^2(n_4)$  は節点  $n_2$  と  $n_4$  の相対変位であり,  $\Delta \mathbf{u}^2$  を  $x$  方向に単位とし,  $\mathbf{P}^1(\xi)$  が  $y$  方向に単位とすると,  $\mathbf{t}_4^1$  の  $x$  方向成分が  $\mathbf{u}^2(\xi)$  の  $y$  方向成分として得られることが確認できる.  $\mathbf{u}^2(\xi)$  の  $y$  方向成分を  $\xi$  の関数と考えれば, これが  $\mathbf{t}_4^1$  の  $x$  方向成分の影響線となる.

また節点力  $\mathbf{t}_4^1$  は, 式 (11) に示すその定義と, 双一次要素の辺上の内挿関数  $N$  が線形であることから, 要素  $e_4, e_3$  の平均応力をそれぞれ  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_4^1, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_3^1$  とし, 節点

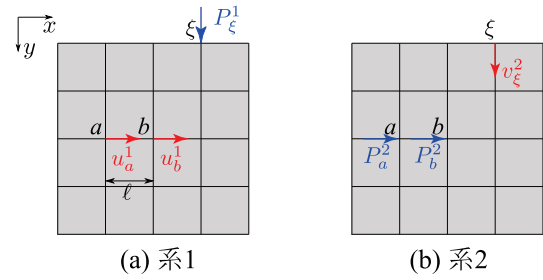


図-4 要素辺のひずみの影響線の解析

$n_1, n_4$  の距離を  $\ell_4$ , 節点  $n_4, n_3$  の距離を  $\ell_3$  とすると,

$$\mathbf{t}_4^1 = \frac{1}{2} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_4^1 \mathbf{n}_2 \ell_4 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_3^1 \mathbf{n}_2 \ell_3) \quad (14)$$

と表すこともできる. したがって,  $p_1$  に沿う領域の平均応力を

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 \equiv \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_4^1 \ell_4 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_3^1 \ell_3}{\ell_4 + \ell_3} \quad (15)$$

とすると

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 \mathbf{n}_2 = \frac{2 \mathbf{t}_4^1}{\ell_4 + \ell_3} \quad (16)$$

となることから, 相対変位  $\Delta \mathbf{u}^2$  を  $x$  方向に  $\frac{2}{\ell_4 + \ell_3}$ , 法線  $\mathbf{n}_2$  を  $x$  方向,  $\mathbf{P}^1(\xi)$  を  $y$  方向に単位とすると, 経路  $p_1$  上の  $x$  方向垂直応力の平均値の影響線が  $\mathbf{u}^2(\xi)$  の  $y$  方向成分として得られることが確認できる.

### 3. 有限要素モデルの修正を必要としない影響線の解析

前章で述べたように, 有限要素モデルの着目点を 2 重節点化し, 相対変位を与えることで内力の影響線の解析を行う Müller-Breslau の原理が提案されている. 本章では, より効率的な影響線の解析の実現のために, 有限要素モデルの修正が不要な影響線の解析方法を提案する.

#### (1) ひずみの影響線

図-4 に示すような有限要素モデルにおける節点  $a, b$  間の  $x$  方向の垂直ひずみ  $(\epsilon_x)_{ab}$  を考える. 系 1 には任意位置にある節点  $\xi$  に  $y$  方向単位荷重  $P_\xi^1 = 1$  が作用しており, 系 2 には節点  $a$  と  $b$  に互いに逆向きの  $x$  方向単位荷重  $P_a^2 = -1, P_b^2 = 1$  が作用している. 節点  $\xi$  の  $y$  方向の変位を  $v_\xi$  とし, 節点  $a, b$  の  $x$  方向の変位を  $u_a, u_b$  とする. 相反定理より

$$u_a^1 P_a^2 + u_b^1 P_b^2 = v_\xi^2 P_\xi^1 \quad (17)$$

が成立する. 単位荷重を考慮すると

$$u_b^1 - u_a^1 = v_\xi^2 \quad (18)$$

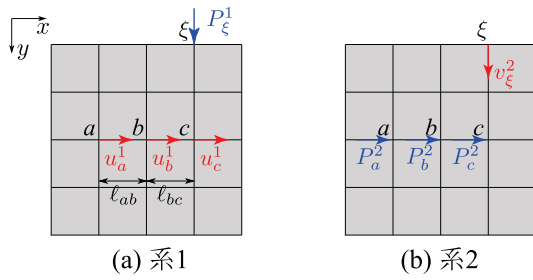


図-5 節点のひずみの影響線の解析

となることから、節点  $a, b$  間の要素辺長を  $l$  とすると

$$(\epsilon_x)_{ab} = \frac{u_b^1 - u_a^1}{l} = \frac{v_\xi^2}{l} \quad (19)$$

となり、着目辺  $ab$  の両端に逆向きの単位荷重を載荷したときの各節点の  $y$  方向変位の  $\frac{1}{l}$  倍が、着目辺  $ab$  のひずみ  $(\epsilon_x)_{ab}$  の影響線となっていることが示される。これは、着目辺  $ab$  の両端に逆向きに大きさ  $\frac{1}{l}$  の荷重を載荷したときの各節点の  $y$  方向変位が  $(\epsilon_x)_{ab}$  の影響線となっていると言い換えることもできる。

構造物の設計においては、着目点での応力やひずみを問題とする。通常の有限要素法では、要素間の変位の連続性は課されるが、その導関数であるひずみは連続性を有さない。したがって、節点でのひずみは一般的には定義されないが、節点をはさむ2つの要素辺におけるひずみの何らかの平均が用いられることも多い。そこで図-5のように着目節点  $b$  とその両隣の節点  $a, c$  の  $x$  方向変位を  $u_\alpha (\alpha = a, b, c)$  とし、有限要素法の内挿関数ではなく3点の変位を2次関数で内挿した時の  $b$  における傾きを  $b$  におけるひずみと考えることとする。  $ab$  間の長さを  $l_{ab}$ ,  $bc$  間の長さを  $l_{bc}$  とすると、  $b$  における2次曲線の傾きで定義されるひずみ  $(\epsilon_x)_b$  は

$$\begin{aligned} (\epsilon_x)_b &= \frac{l_{bc}(u_b - u_a)}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})} + \frac{l_{ab}(u_c - u_b)}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})} \\ &= \frac{-l_{bc}u_a}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})} + \frac{(l_{bc} - l_{ab})u_b}{l_{ab}l_{bc}} + \frac{l_{ab}u_c}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})} \end{aligned} \quad (20)$$

となる。このことと、相反定理

$$u_a^1 P_a^2 + u_b^1 P_b^2 + u_c^1 P_c^2 = v_\xi^2 P_\xi^1 \quad (21)$$

より、節点  $a, b, c$  それぞれに以下の荷重

$$P_a^2 = -\frac{l_{bc}}{l_{ab}(l_{ab} + l_{bc})} \quad (22)$$

$$P_b^2 = \frac{l_{bc} - l_{ab}}{l_{ab}l_{bc}} \quad (23)$$

$$P_c^2 = \frac{l_{ab}}{l_{bc}(l_{ab} + l_{bc})} \quad (24)$$

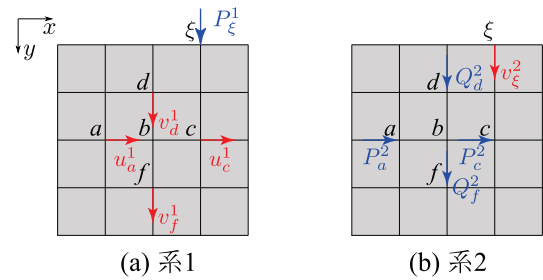


図-6 節点における応力の影響線の解析

を与えたときの各節点の  $y$  方向変位が着目点のひずみ  $(\epsilon_x)_b$  の影響線となることが示される。なお、  $l_{ab} = l_{bc} = l$  のときは

$$-P_a^2 = P_c^2 = \frac{1}{2l}, \quad P_b^2 = 0 \quad (25)$$

とすれば各節点の  $y$  方向変位が  $(\epsilon_x)_b$  の影響線となる。

## (2) 応力の影響線

線形問題においては応力とひずみは線形関係にあるが、例えば平板の問題では平面応力状態であり、その構成関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

となるため、垂直応力の影響線を得るためには2成分のひずみの影響線が必要となる。

図-6に示すような有限要素モデルにおける節点  $b$  の  $x$  方向の垂直応力  $(\sigma_x)_b$  の影響線を求める方法について考える。簡単のため、要素はすべて辺長  $l$  の正方形の双1次四辺形要素とする。これ以外の場合でも、有限要素離散化を用いる限り任意点の変位は節点変位で表現できることから、以下の手法は適用可能である。系1には任意位置にある節点  $\xi$  に  $y$  方向単位荷重  $P_\xi^1 = 1$  が作用しており、系2には節点  $b$  の  $x$  方向に隣接する節点  $a$  と  $c$  に  $x$  方向荷重  $P_a^2, P_c^2$  が作用しており、節点  $b$  の  $y$  方向に隣接する節点  $d$  と  $f$  に  $y$  方向荷重  $Q_d^2, Q_f^2$  が作用している。節点  $\xi$  の  $y$  方向の変位を  $v_\xi$  とし、節点  $a, b$  の  $x$  方向の変位を  $u_a, u_b$ , 節点  $d, f$  の  $y$  方向の変位を  $v_d, v_f$  とする。系1と2に相反定理を適用すると

$$u_a^1 P_a^2 + u_b^1 P_b^2 + v_d^1 Q_d^2 + v_f^1 Q_f^2 = v_\xi^2 P_\xi^1 \quad (27)$$

が成立する。

前項の結果を考慮すると

$$P_a^2 = \frac{-1}{2l}, \quad P_c^2 = \frac{1}{2l}, \quad Q_d^2 = Q_f^2 = 0, \quad P_\xi^1 = 1 \quad (28)$$

のとき、相反定理は

$$\frac{u_c^1 - u_a^1}{2\ell} = (\epsilon_x)_b = v_\xi^2 \quad (29)$$

となり、系2のy方向変位が節点bにおけるx方向垂直ひずみ $(\epsilon_x)_b$ の影響線となる。同様に

$$Q_d^2 = \frac{-1}{2\ell}, \quad Q_f^2 = \frac{1}{2\ell}, \quad P_a^2 = P_c^2 = 0, \quad P_\xi^1 = 1 \quad (30)$$

のとき、相反定理は

$$\frac{v_f^1 - v_d^1}{2\ell} = (\epsilon_y)_b = v_\xi^2 \quad (31)$$

となり、系2の各節点のy方向変位が節点bにおけるy方向垂直ひずみ $(\epsilon_y)_b$ の影響線となる。x方向垂直応力 $\sigma_x$ は、式(26)で表されるように、これらの線形結合で表されることから

$$\begin{aligned} -P_a^2 &= P_c^2 = \frac{E}{2\ell(1-\nu^2)} \\ -Q_d^2 &= Q_f^2 = \frac{\nu E}{2\ell(1-\nu^2)} \\ P_\xi^1 &= 1 \end{aligned} \quad (32)$$

とすると、相反定理は

$$\frac{u_c^1 - u_a^1}{2\ell} \frac{E}{(1-\nu^2)} + \frac{v_f^1 - v_d^1}{2\ell} \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} = v_\xi^2 \quad (33)$$

$$\frac{E(\epsilon_x)_b}{(1-\nu^2)} + \frac{\nu E(\epsilon_y)_b}{(1-\nu^2)} = (\sigma_x)_b = v_\xi^2 \quad (34)$$

となり、式(32)の荷重を载荷した系2の各節点のy方向変位が節点bにおけるx方向垂直応力 $(\sigma_x)_b$ の影響線となる。

ここでは平面応力の場合について、節点における応力の影響線の解析方法を述べたが、3次元問題においても同様の考え方で影響線を求めることができる。説明が冗長になるので、詳細を記述することは避けるが、3次元の弾性係数行列の各成分と、着目節点のx, y, zの各方向の隣接する節点との距離を用いて、それらの節点における荷重を式(32)のように設定することで、4.(2)に後述するように応力の影響線を得ることができる。

また、本章では垂直ひずみ・垂直応力の影響線についてのみ述べたが、同様の考え方でせん断ひずみ・せん断応力の影響線についても適用することが可能である。

#### 4. 提案手法の妥当性の検証

本章では、提案する影響線の解析手法の妥当性を平面応力問題と3次元問題において検証する。

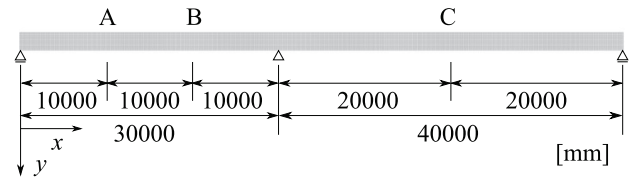


図-7 2径間連続梁の問題設定

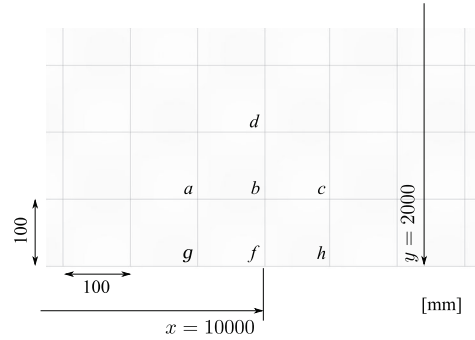


図-8 着目点付近の要素分割の様子



図-9 有限要素モデルの変形の様子

#### (1) 平面応力問題

図-7に示す2径間連続梁の平面応力問題を考える。梁は高さ2,000 mm、支間30,000+40,000 mmとし、100mm四方の双1次四辺形要素で分割した。このとき総要素数は14,000、総節点数は14,742となった。材料は均質でYoung率 $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ 、Poisson比 $\nu = 0.3$ の等方線形弾性体とした。座標xを左支点から右向きに取り、座標yを梁上縁から下向きに取る。着目点を $x = 10,000 \text{ mm}$ とし、着目点付近の有限要素モデルを図-8に示す。

まず要素辺abのx方向垂直ひずみの影響線で本手法の妥当性を確認する。3.(1)で述べたように、節点aおよびbにそれぞれ以下のx方向荷重

$$P_a = -\frac{1}{\ell}, \quad P_b = \frac{1}{\ell} \quad (35)$$

を与えて解析を行った。ここに、 $\ell$ は要素長100mmである。このときの有限要素モデルの変形の様子を図-9に示す。着目点付近の変形が不自然に見えるのは梁全体の変形が見やすいように変形倍率を与えているためである。橋梁のような構造物では、床版上のみ鉛直方向外力が作用するので、図-10に梁上縁のy方向変位を任意のxについて連続的に示した。同図が骨組の構造解析における影響線に相当する。この影響線を通常境界値問題における単位荷重に対する着目点ひずみと比較することで、本解

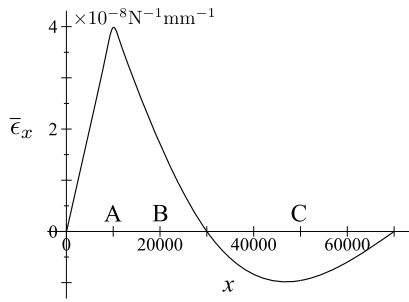


図-10 梁上縁での着目要素辺ひずみの影響線

析の妥当性を確認する.  $x = 10,000 \text{ mm}, 20,000 \text{ mm}, 50,000 \text{ mm}$  の上縁をそれぞれ参照点 A, B, C とし, 単位荷重を載荷した. このときの要素辺  $ab$  のひずみ  $(\epsilon_x)_{ab}$  と, 提案手法による影響線の参照点での値を表-1 にまとめる. なお, 単位荷重を載荷したときの要素辺ひずみは, 節点  $a, b$  の相対変位に基づき算出した. 両者の差は相対誤差で比較したが, 単位荷重による解も近似解であることから相対差と表現した. 相対差の定義は

$$\text{相対差} = \frac{\text{本手法による解} - \text{単位荷重による解}}{\text{単位荷重による解}} \quad (36)$$

である. 表にある通り, 本手法は単位荷重を載荷する通常の解法による解と比較し,  $10^{-3}\%$  程度の精度で一致している.

次に節点におけるひずみの影響線について本手法の妥当性を確認する. 図-8 の節点  $b$  の  $x$  方向垂直ひずみの影響線を得るために式 (25) で与えられる荷重を載荷して解析を行った. このときの有限要素モデルの変形と上縁鉛直変位の分布はそれぞれ図-9, 図-10 と同様である. 参照点 A, B, C に単位荷重を載荷したときのひずみと本手法によるひずみの影響線の参照点での値を表-2 にまとめる. なお, 単位荷重を載荷したときの節点におけるひずみは式 (20) により節点変位から求めた. 表にある通り, 本手法は単位荷重を載荷する通常の解法による解と比較し,  $10^{-3}\%$  程度の精度で一致している.

次に節点における応力の影響線について本手法の妥当性を確認する. 図-8 の節点  $b$  の  $x$  方向垂直応力の影響線を得るために式 (32) で与えられる荷重を載荷して解析を行った. このときの有限要素モデルの

表-1 要素辺ひずみ

| 荷重位置                         | A                     | B                     | C                    |
|------------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 本手法<br>( $\times 10^{-8}$ )  | 3.98281               | 1.70716               | -0.957129            |
| 単位荷重<br>( $\times 10^{-8}$ ) | 3.98283               | 1.70717               | -0.957109            |
| 相対差%                         | $-3.8 \times 10^{-4}$ | $-3.4 \times 10^{-4}$ | $2.1 \times 10^{-3}$ |

変形と上縁鉛直変位の分布はそれぞれ図-9, 図-10 と同様である. 参照点 A, B, C に単位荷重を載荷したときの応力と本手法による応力の影響線の参照点での値を表-3 にまとめる. なお, 単位荷重を載荷したときの節点における応力は節点変位から求めた節点  $b$  における  $x$  方向垂直ひずみと  $y$  方向垂直ひずみと平面応力の構成関係から求めた. 表にある通り, 本手法は単位荷重を載荷する通常の解法による解と比較し,  $10^{-3}\%$  程度の精度で一致している.

次に, 分布荷重による応力について, 本手法の妥当性を確認する. 図-7 に示す梁の左支間  $x = 0$  から  $x = 10,000 \text{ mm}$  まで単位奥行きあたりの等分布荷重  $q = 1 \text{ N/mm}^2$  を載荷した. このときの節点  $b$  の  $x$  方向垂直応力は  $1.13428 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$  であった. 本手法による応力の影響線と等分布荷重の積を載荷範囲で積分すると  $1.13436 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$  となり, 相対差は  $6.6 \times 10^{-3}\%$  となった.

建造物の設計においては, 図-8 の  $f$  点のように最外縁における応力が問題となることが多い. この場合は節点  $g, f, h$  の変位から  $x$  方向垂直ひずみを定義し, 節点  $b, f$  の変位から  $y$  方向垂直ひずみを定義することで, 節点  $b$  の応力と同様に節点  $f$  の応力の影響線を求めることができる. 具体的には節点  $b, g, h$  に  $x$  方向荷重  $P$  を, 節点  $b, g$  に  $y$  方向荷重  $Q$  を

$$\begin{aligned} -P_g^2 = P_h^2 &= \frac{E}{2\ell(1-\nu^2)} \\ -Q_b^2 = Q_f^2 &= \frac{\nu E}{\ell(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (37)$$

と与えれば, そのときの各節点の変位が節点  $f$  の応力の影響線となる. 参照点 A, B, C に単位荷重を載荷したときの応力と本手法による応力の影響線の参照点での値を表-4 にまとめる. なお, 単位荷重を載荷したときの節点における応力は節点変位から求めた節点  $f$  における  $x$  方向垂直ひずみと  $y$  方向垂直ひ

表-2 節点ひずみ

| 荷重位置                         | A                     | B                    | C                     |
|------------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| 本手法<br>( $\times 10^{-8}$ )  | 3.98630               | 1.71574              | -0.96194              |
| 単位荷重<br>( $\times 10^{-8}$ ) | 3.98631               | 1.71574              | -0.96194              |
| 相対差%                         | $-2.8 \times 10^{-4}$ | $1.7 \times 10^{-4}$ | $-1.5 \times 10^{-3}$ |

表-3 節点応力

| 荷重位置  | A                    | B                    | C                     |
|---|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 本手法<br>( $\times 10^{-3} \text{ N/mm}^2$ )  | 7.96948              | 3.43171              | -1.92386              |
| 単位荷重<br>( $\times 10^{-3} \text{ N/mm}^2$ ) | 7.96906              | 3.43151              | -1.92387              |
| 相対差%  | $5.3 \times 10^{-3}$ | $5.8 \times 10^{-3}$ | $-5.8 \times 10^{-4}$ |

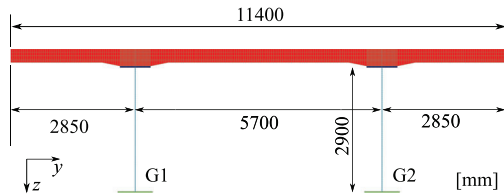


図-11 断面図

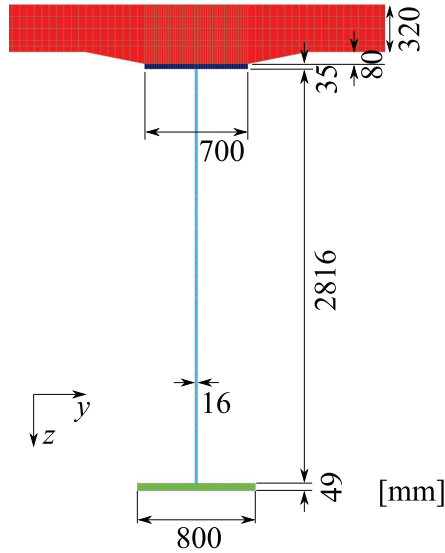


図-12 主桁断面図

ずみと平面応力の構成関係から求めた。表にある通り、本手法は単位荷重を載荷する通常の解法による解と比較し、 $10^{-3}\%$ 程度の精度で一致している。

### (2) 3次元問題

文献<sup>13)</sup>の合成桁照査例に掲載されている2主合成桁を参考にした対象構造を用いて本手法の妥当性検証を行う。対象構造の断面図を図-11に、桁断面図を図-12示す。図中の赤色の領域がコンクリート、それ以外が鋼であり、上フランジ上面で完全に一体化しているものとしてモデル化し、鉄筋やずれ止め、横桁等はモデル化していない。鋼・コンクリートはと

表-4 最外縁節点応力

| 荷重位置                                       | A                     | B                     | C                     |
|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 本手法<br>( $\times 10^{-3} \text{N/mm}^2$ )  | 8.95645               | 3.83058               | -2.14736              |
| 単位荷重<br>( $\times 10^{-3} \text{N/mm}^2$ ) | 8.95753               | 3.83171               | -2.14818              |
| 相対差%                                       | $-1.2 \times 10^{-2}$ | $-2.9 \times 10^{-2}$ | $-3.8 \times 10^{-2}$ |

表-5 材料特性

|        | Young 率 ( $\text{N/mm}^2$ ) | Poisson 比 |
|--------|-----------------------------|-----------|
| 鋼      | $2 \times 10^5$             | 0.3       |
| コンクリート | $3 \times 10^4$             | 0.2       |

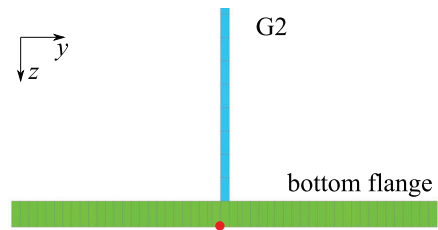


図-13 下フランジ着目点

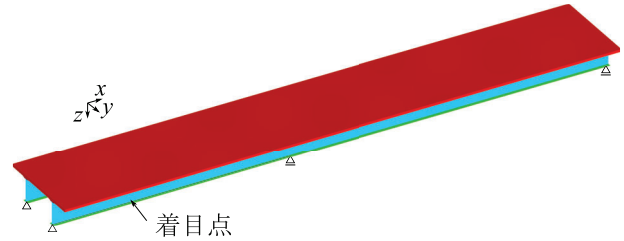


図-14 解析モデル全体図

もに等方線形弾性体とし、材料定数を表-5に示す。断面を1770要素、軸方向要素長を100mmとし、計1,239,000要素の1次6面体要素によりモデル化した。なお、総節点数は1,610,898である。

4.(1)の平面問題と同様に30,000mmと40,000mmの2径間連続梁とし、30,000mm支間側の端支点を原点とし、原点から逆側の端支点に向かう軸をx軸、断面の曲げ中立軸を原点に鉛直下向きをz軸、床版中央を原点に軸直角水平方向をy軸とする。支点では下フランジ下面をz方向に線支持し、他の方向の拘束は剛体運動を拘束する最低限の拘束とした。x=10,000mmの図-13に赤丸で示す点を着目点とした。また、解析モデル全体図と着目点の位置を図-14に示した。3次元の構成関係を考慮し、着目点のx方向の隣接する各節点にx方向の荷重 $P_x$ を、y方向の隣接する各節点にy方向の荷重 $P_y$ をそれぞれ互いに逆向きに作用させた。また、着目点はz方向の端点であるため、着目点とz方向に隣接する節点にz方向の荷重 $P_z$ を互いに逆向きに作用させた。これらの荷重は

$$P_x = \frac{E(1-\nu)}{2l_x(1+\nu)(1-2\nu)} = 1.34615 \times 10^3 \text{ N/mm}^3 \quad (38)$$

$$P_y = \frac{\nu E}{2l_y(1+\nu)(1-2\nu)} = 3.60577 \times 10^3 \text{ N/mm}^3 \quad (39)$$

$$P_z = \frac{\nu E}{l_z(1+\nu)(1-2\nu)} = 2.35479 \times 10^3 \text{ N/mm}^3 \quad (40)$$

である。ここに、 $l_x, l_y, l_z$ は各方向の要素長であり

$$l_x = 100 \text{ mm}, \quad l_y = 16 \text{ mm}, \quad l_z = 49 \text{ mm} \quad (41)$$

である。

この解析によって得られた結果から、床版上面の



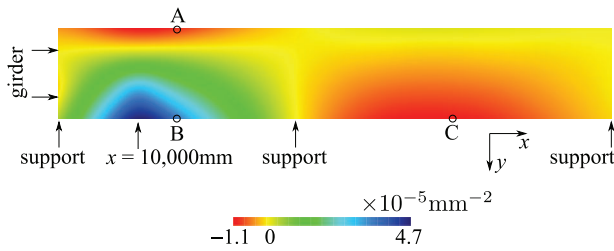


図-15 床版上面での着目点の応力影響線

表-6 フランジ下部着目点応力

| 参照点  | A                    | B                    | C                     |
|--|----------------------|----------------------|-----------------------|
| x 座標 (mm)                                  | 15000                | 15000                | 50000                 |
| y 座標 (mm)                                  | 5700                 | -5700                | 5700                  |
| 本手法<br>( $\times 10^{-3} \text{N/mm}^2$ )  | 3.55819              | -9.04473             | -1.00547              |
| 単位荷重<br>( $\times 10^{-3} \text{N/mm}^2$ ) | 3.54258              | -9.03943             | -1.00579              |
| 相対差%                                       | $4.4 \times 10^{-1}$ | $5.9 \times 10^{-2}$ | $-3.2 \times 10^{-2}$ |

z 方向変位, すなわち着目点の x 方向垂直応力の影響線コンターを図-15 に示す. 図には主桁位置と支点位置も示している. この結果の妥当性を確認するために, 図-15 に示す A, B, C の 3 点を参照点として選び, 通常の単位荷重載荷の解析を行い, 着目点応力との比較を行う. 参照点の座標と各参照点に単位荷重を載荷したときの着目点応力と, 本手法による参照点における影響線の値を表-6 にまとめる. 表にある通り, 本手法は単位荷重を載荷する通常の解法による解と比較し,  $10^{-1}\%$ 程度の精度で一致している.

## 5. おわりに

有限要素モデルの影響線を求める方法を提案した. 構造解析でよく用いられる Müller-Breslau の原理では, 内力の影響線を求めるためには不連続変位を与える必要がある. そのため, 有限要素モデルに Müller-Breslau の原理を適用するためには, 2 重節点化のモデル修正が必要になる. 本論文では相反定理に基づき節点間の相対変位の影響線を求める方法を提案した. 相対変位の影響線はひずみの影響線と等しく, 複数成分のひずみの影響線を重ね合わせることで応力の影響線を求めることができる. 本手法によれば, 一つの着目点に対して一度の解析を実行するだけでよく, 着目点の応答を床版面に関連付けるポストプロセスも不要であるという Müller-Breslau の原理に基づく方法が有する利点を持ち, かつ有限要素モデルの修正をする必要がないため, 従来の手法よりも効率的に影響線を求めることができる. また,

本提案手法において影響線の解析のためにモデルに与える荷重は, 要素長と材料定数から容易に設定できることから, 汎用有限要素解析コードへの実装も容易である.

平面応力問題と 3 次元問題で単位荷重に対する応答を求め, 本手法による影響線の値と比較した. 両者の差は最大でも  $10^{-1}\%$ 程度であり, 本手法の妥当性を確認することができた.

本論文では連続体ソリッド要素で離散化したモデルの垂直ひずみ・垂直応力の影響線に限定して述べたが, 提案手法には有限要素離散化や応力の成分に制限はないので, 今後, 梁・シェル要素のような構造要素や, 合応力である断面力に対する影響線の解析手法を構築したいと考えている.

**謝辞:** 本研究は東北大学とエム・エムブリッジ株式会社との共同研究の一環として実施したものである. また, 本研究の一部は JSPS 科研費 22K04278 (代表: 齊木 功) の助成を受けたものです.

## REFERENCES

- 1) 森 猛, 金子 想, 林 暢彦, 内田大介, 小笠原照夫: 鋼床版デッキ進展き裂の起点を対象とした応力影響面とその利用, 土木学会論文集 A1, Vol. 73, No. 1, pp. 21-31, 2017. [Mori, T., Kaneko, S., Hayashi, N., Uchida, D. and Ogasawara, T.: Stress influence plane at originating point of fatigue crack propagating into deck plate of steel plate deck and its application, *Journal of JSCE Ser. A1*, Vol. 73, No. 1, pp. 21-31, 2017.]
- 2) 横関耕一, 横山 薫, 富永知徳, 三木千壽: 鋼床版縦横リブ交差部構造の高疲労強度化, 土木学会論文集 A1, Vol. 73, No. 1, pp. 206-217, 2017. [Yokozeki, K., Yokoyama, K., Tominaga, T. and Miki, C.: Fatigue enhancement of longitudinal-to-transverse rib connection in orthotropic steel deck, *Journal of JSCE Ser. A1*, Vol. 73, No. 1, pp. 206-217, 2017.]
- 3) 横山 薫, 鈴木俊光, 橋本幹司, 三木千壽: 主桁に隣接する縦リブに着目した鋼床版縦横リブ交差部の疲労寿命に関する一検討, 土木学会第 71 回年次学術講演会概要集, I-56, 2020. [Yokoyama, K., Suzuki, T., Hashimoto, T. and Miki, C.: A study on fatigue life of longitudinal-to-transverse rib connection in orthotropic steel deck, *Proc. 71st Annual Conf. JSCE*, I-56, 2020.]
- 4) 石川一美, 岡村宏一, 益田 敬: 選点法を応用した平板構造の影響面の解析について, 土木学会第 39 回年次学術講演会概要集, I 部門, pp. 19-20, 1984. [Ishikawa, K., Okamura, H. and Masuda, T.: Analysis of influence surface of plate structures by point collocation method, *Proc. 39th Annual Conf. JSCE*, pp. 19-20, 1984.]
- 5) 佐光浩継, 岡村宏一, 石川一美: 選点法を応用した曲線平板構造の影響面の解析, 土木学会第 42 回年次学術講演会概要集, I 部門, pp. 22-23, 1987. [Sako, H., Okamura, H. and Ishikawa, K.: Analysis of influence surface of curved plate structure applying collocation method, *Proc.*

- 42nd Annual Conf. JSCE, pp. 22-23, 1987.]
- 6) Cifuentes, A. and Paz, M.: A note on the determination of influence lines and surfaces using finite elements, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, pp. 299-305, 1991.
  - 7) Orakdöğen, E. and Girgin, K.: Direct determination of influence lines and surfaces by F.E.M., *Structural Engineering Mechanics*, Vol. 20, pp. 279-292, 2005.
  - 8) 古市 亨, 松井繁之, 佐光浩継: ミューラー・ブレスロウの原理を応用した3次元立体 FEM 解析による影響面作成と疲労の一考察, 土木学会論文集 A, Vol. 65, No. 4, pp. 949-954, 2009. [Furuichi, T., Matsui, S. and Sako, H.: Preparation of influence surface for three dimensional structures by employing Müller-Breslau's theorem into 3D FEM analysis and some fatigue examinations, *Journal of JSCE Ser. A*, Vol. 65, No. 4, pp. 949-954, 2009. ]
  - 9) Shen, W.: The generalized Müller-Breslau principle for higher-order elements, *Computers & Structures*, Vol. 44, pp. 207-212, 1992.
  - 10) Jepsen, M. and Damkilde, L.: A direct and fully general implementation of influence lines/surfaces in finite element software, *Advances in Engineering Software*, Vol. 120, pp. 55-61, 2018.
  - 11) Belegundu, A. D.: The adjoint method for determining influence lines, *Computers & Structures*, Vol. 29, pp. 345-350, 1988.
  - 12) Memari, A. M. and West, H. H.: Computation of bridge design forces from influence surfaces, *Computers & Structures*, Vol. 38, pp. 547-556, 1991.
  - 13) 土木学会複合構造委員会: 複合構造の性能照査例, 丸善, 2006. [Committee on Hybrid Structures, JSCE: *Examples of Performance Verification Based on Guidelines for Performance-Based Design of Steel-Concrete Hybrid Structures*, Maruzen, 2006.]

(Received June 13, 2022)  
(Accepted September 21, 2022)

## INFLUENCE LINE ANALYSIS OF FINITE ELEMENT MODELS WITHOUT MODEL MODIFICATION BASED ON THE RECIPROCAL THEORY

Isao SAIKI, Ryohei MITSUI, Kaoru YOKOYAMA, Toshimitsu SUZUKI  
and Tsuyoshi HASHIMOTO

In the design of structures subjected to moving loads, such as bridges, the influence line representing the response of stresses at a point of interest in terms of the location of the load is essential. To obtain the influence line for a finite element model requires the same number of analyses as the number of nodes on the surface to which the load is possibly applied. On the other hand, some methods based on the Müller-Breslau principle, which enable us to obtain the influence line by performing the finite element analysis only once, have been proposed. However, the methods require modification of the finite element model which increases the preprocess cost because it is necessary to provide a discontinuous displacement at the point of interest. Hence, this paper proposes an analysis method for influence lines that does not require model modification and can be easily implemented in any finite element codes. The proposed method is based on a reciprocal theorem applied directly to finite element discretized problems. The validity of the proposed method is confirmed by comparing the influence lines obtained by the proposed method with the results of the conventional finite element analysis with unit load for plane stress and three-dimensional problems.