

Poisson 効果による断面変形を考慮した梁理論

齊木 功¹・田淵 航²

¹正会員 東北大学 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: isao.saiki.a4@tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

²正会員 川田工業株式会社 (〒 114-8562 東京都北区滝野川 1-3-11)

均質な梁では Poisson 効果による軸直角方向の変位は拘束されないため、初等梁理論では一次元の弾性構成則を用いている。しかし、Poisson 比の異なる複数の材料からなる複合梁では、軸に垂直な方向の変位を複数の材料が互いに拘束することになる。軸方向の剛性や曲げ剛性は拘束の影響を受けるため、正確な剛性の評価には Poisson 効果を考慮することが必要となる。そこで本研究では、断面変形を含む梁理論を拡張し、Poisson 効果を考慮できる梁理論を定式化する。提案梁理論の解と連続体の解を比較することで提案梁理論の妥当性を確認する。

Key Words: beam theory, Poisson's effect, cross-sectional deformation, representative volume element

1. はじめに

平板の曲げ理論においては、その 2 次元的な広がりから、均質な平板においても 2 方向の軸まわりの曲率と曲げモーメントの間に、Poisson 効果による相互作用が考慮される¹⁾。そのため、例えば、図-1 に示すように xy 平面上の平板に y 軸まわりのみ曲げモーメントが作用した場合でも y 軸まわりの曲率に加え x 軸まわりの曲率も生じる。これは、 y 軸まわり曲率によって x 軸方向の垂直ひずみが生じ、同時に Poisson 効果によって y 軸方向の垂直ひずみも生じるためである。

さらに、平板が Poisson 比の異なる材料からなる積層板のような場合においては、 y 軸まわり曲率によって x 方向の垂直ひずみが生じ、その Poisson 効果によって y 軸方向の垂直ひずみも生じるが、 y 軸方向垂直ひずみは Poisson 比の異なる層間において互いに拘束を受けることになる。例えば Reddy による積層板の高次せん断理論²⁾ では、曲げ剛性を各層の材料の剛性の積分により評価しているが、異なる Poisson 比の層間の拘束は考慮されていない。

一方、均質な梁に関しては、軸直角方向への変形を拘束するものはないので、軸直角方向の応力がゼロとなり、軸方向のひずみと応力が Young 率で関係づけられる 1 次元構成関係を用いるのが普通である。換言すれば、Poisson 効果による変形は拘束されないことを前提としている。しかし、Poisson 比の異なる材料からなる複合梁では、積層板と同様に材料間で Poisson 効果による変形を拘束することになる。例えば、図-2 に示すような、円管と充填材からなる複合断面の円柱部材が軸圧縮を受けることを考える。ここで、円管の材料の Poisson 比

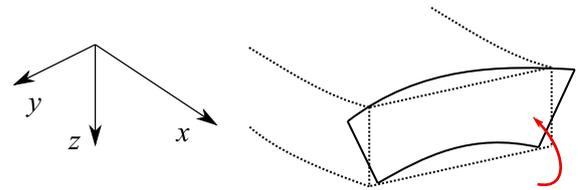


図-1 平板の y 軸まわり曲げモーメントによる 2 軸曲率変形

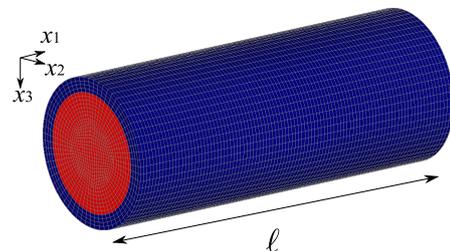


図-2 解析対象と座標の定義

が小さく、充填材の Poisson 比が大きいとすると。このとき、充填材は圧縮を受ければ大きな Poisson 比のために軸直角方向に膨張するが、円管の材料の Poisson 比は小さいので充填材ほどは膨張しない。したがって、円管の材料は充填材の膨張を拘束し、充填材の軸方向の見掛け上の剛性は増加する。コンクリート充填鋼管では、前述のような弾性変形のみではないが、これを拘束効果と呼び、充填コンクリートの材料特性に拘束効果を反映している³⁾。

梁における Poisson 比の考慮は、例えば先に述べた Reddy の積層板²⁾ を梁に適用した積層梁理論⁴⁾ が報告されている。しかし、 xy 平面の積層板において y 方向の応力をゼロとして梁理論を構築しているため、積層板

と同様に Poisson 効果による層間の拘束効果は考慮されていない。近年では、Ma et al.⁵⁾ や Wang et al.⁶⁾ が特徴長さを有する梁理論において Poisson 効果を考慮したと報告している。しかし、これらの文献では軸直角方向のひずみをゼロとしており、Poisson 効果による変形を完全に拘束しており、異種材料間の拘束の相互作用は考慮することはできない。Faroughi and Shaat⁷⁾ は負の Poisson 比を持つ梁を定式化しているが、均質な梁のみを扱っており、初等梁理論と同様に軸直角方向の応力はゼロとしている。

以上から、本論文では、Poisson 効果による軸直角方向の変形の異種材料間の拘束効果を考慮でき、任意形状の複合断面を有する梁に適用可能な梁理論を構築することを目的とする。このために、著者らがこれまで開発してきた断面変形を考慮できる梁理論^{8),9),10),11)} に Poisson 効果による変位場を組み込んだ梁理論を定式化する。

2. Poisson 効果を考慮した梁理論の定式化

図-2 に示すような軸方向に一樣な長さ ℓ の任意形状複合断面の梁を解析対象とする。梁軸方向を e_1 、梁軸直角水平方向を e_2 、鉛直方向を e_3 とする正規直交座標規定ベクトルを定義し、それらの座標系成分を x_1, x_2, x_3 とし、変位成分を u_1, u_2, u_3 とする。解析対象の軸方向領域を $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq \ell\}$ 、軸と直交する断面の領域を A とする。断面に x_2 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸と x_3 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸との交点を x_2, x_3 の原点とする。以下では梁の曲げせん断に関しては x_1 - x_3 面でのせん断および x_2 軸まわりの曲げのみを取り扱うこととする。

Bernoulli-Euler 梁理論や Timoshenko 梁理論では断面は変形しないことを仮定する。それに対し、Reissner¹²⁾ は箱断面のせん断遅れを解析するために断面変形を考慮している。断面変形は、薄いフランジの面外変位とし、幅方向に放物線状となるモードを仮定し、そのモードの符号付きの大きさを表す一般化変位により表現している。著者らはこの考え方を一般化し、面外変位のモードを仮定することが困難な任意の複合断面を取り扱うために、均質化法に準じた梁の代表体積要素の有限要素解析から面外変位モードを求める方法を提案している^{8),9),11)}。以下では、せん断遅れと横せん断による面外変位に加えて、Poisson 効果による断面内の変位を変位場に取り入れた梁理論を提案する。

梁を軸方向に引っ張ると、Poisson 比が正の場合は、軸直角方向の垂直ひずみは負となり、断面は収縮する。

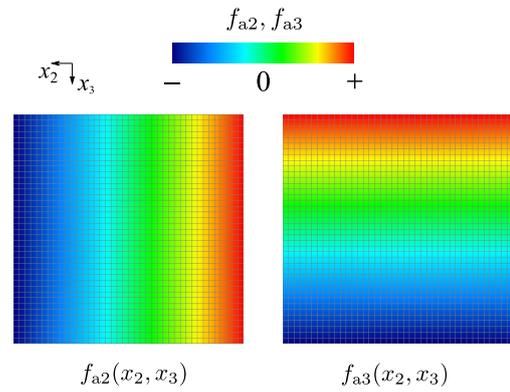


図-3 均質矩形断面の軸変形に対する断面変形モード f_a

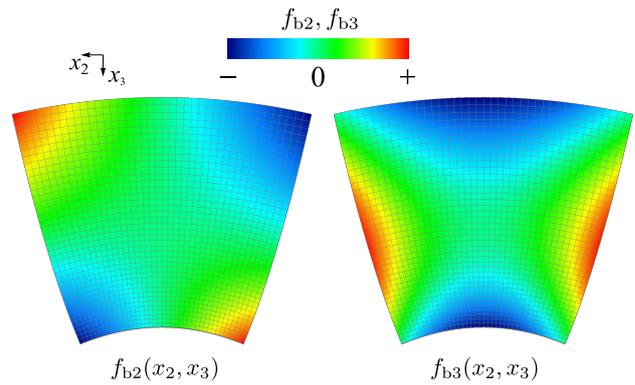


図-4 均質矩形断面の曲げ変形に対する断面変形モード f_b

この軸変形に伴う Poisson 効果の断面内変位場を

$$f_a(x_2, x_3) g_a(x_1) = \{f_{a2}(x_2, x_3)e_2 + f_{a3}(x_2, x_3)e_3\} g_a(x_1) \quad (1)$$

と定義する。ここに、 f_a は単位軸変形（ひずみ）あたりの断面内変位で長さの次元を持つ断面の特性である。 f_a は後述する代表体積要素の有限要素解析で断面ごとに求めておく。一例として均質矩形断面の場合の f_a の各成分を、変形図および色で図-3 に示す。また、 g_a はそれに対応する無次元の一般化変位で、本提案梁理論の追加された自由度である。

同様に、梁に下に凸となるような曲げ変形を与えると、Poisson 比が正の場合は、曲げ圧縮される断面上部は軸直角方向に膨張し、曲げ引張となる断面下部は収縮する。この曲げに伴う Poisson 効果の断面内変位場を

$$f_b(x_2, x_3) g_b(x_1) = \{f_{b2}(x_2, x_3)e_2 + f_{b3}(x_2, x_3)e_3\} g_b(x_1) \quad (2)$$

と定義する。ここに、 f_b は単位曲げ変形（曲率）あたりの断面内変位で無次元の断面特性である。 f_b は後述する代表体積要素の有限要素解析で断面ごとに求めておく。一例として均質矩形断面の場合の f_b の各成分を、変形図および色で図-4 に示す。また、 g_b はそれに対応

する長さの次元を持つ一般化変位で、本提案梁理論の追加された自由度である。

本論文で導入する上記の断面変形に加え、著者らの過去の文献¹¹⁾で導入したせん断変形に伴う軸方向変位

$$f_s(x_2, x_3) g_s(x_1) \quad (3)$$

を考慮する。ここに、 f_s は単位のせん断変形（ひずみ）に伴う軸方向変位で長さの次元を持ち、 g_s はそれに対応する無次元の一般化変位である。

梁の軸線の x_1 軸方向変位を $\tilde{u}_1(x_1)$ 、梁の軸線のたわみを $\tilde{u}_3(x_1)$ 、梁の断面の回転を $\theta(x_1)$ とし、前述の断面変形の変位場を含んだ梁の x_1, x_2, x_3 方向変位場をそれぞれ

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \tilde{u}_1(x_1) + x_3\theta(x_1) + f_s(x_2, x_3) g_s(x_1) \quad (4)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = f_{b2}(x_2, x_3) g_b(x_1) + f_{a2}(x_2, x_3) g_a(x_1) \quad (5)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \tilde{u}_3(x_1) + f_{b3}(x_2, x_3) g_b(x_1) + f_{a3}(x_2, x_3) g_a(x_1) \quad (6)$$

と表す。断面の回転角 θ は、Timoshenko 梁と同様、断面の平均せん断ひずみ $\tilde{\gamma}(x_1)$ とたわみ角から

$$\theta(x_1) := \tilde{\gamma}(x_1) - \tilde{u}_3'(x_1) \quad (7)$$

と定義した。ここに $:=$ は定義、 $(\cdot)'$ は (\cdot) の x_1 に関する導関数を表す。

定義した変位場から、梁の任意点におけるひずみが

$$\epsilon_{11}(x_1, x_2, x_3) = x_3\theta' + f_s g_s' + \tilde{u}_1' \quad (8)$$

$$\epsilon_{22}(x_1, x_2, x_3) = f_{b2,2} g_b + f_{a2,2} g_a \quad (9)$$

$$\epsilon_{33}(x_1, x_2, x_3) = f_{b3,3} g_b + f_{a3,3} g_a \quad (10)$$

$$2\epsilon_{12}(x_1, x_2, x_3) = f_{s,2} g_s + f_{b2} g_b' + f_{a2} g_a' \quad (11)$$

$$2\epsilon_{23}(x_1, x_2, x_3) = (f_{b2,3} + f_{b3,2}) g_b + (f_{a2,3} + f_{a3,2}) g_a \quad (12)$$

$$2\epsilon_{13}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\gamma} + f_{s,3} g_s + f_{b3} g_b' + f_{a3} g_a' \quad (13)$$

と表される。ここに、 $(\cdot)_{,i}$ ($i = 2, 3$) は (\cdot) の x_i ($i = 2, 3$) に関する偏導関数を表す。

材料を線形等方弾性体とすると、応力は

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (14)$$

となる。ここに、 λ, μ は Lamé 定数であり、Young 率 E 、Poisson 比 ν 、せん断弾性係数 G とは

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

の関係がある。

解析対象とする領域を $V := L \times A$ とし、単位軸方向長さ当たりの軸方向分布荷重を $p(x_1)$ 、単位軸方向長さ当たりの鉛直方向分布荷重を $q(x_1)$ 、境界における表面力を t_i ($i = 1, 3$) とする。これらを考慮した仮想仕事式は

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_L q \delta \tilde{u}_3 dx_1 + p \delta \tilde{u}_1 dx_1 + \int_{\partial V} (t_1 \delta u_1 + t_3 \delta u_3) dA \quad (16)$$

と表せる。ここに、 ∂V は x_1 軸に垂直な解析領域の境界（梁の両端の断面）、 $\delta(\cdot)$ は仮想変位もしくは仮想ひずみを表す。仮想仕事式 (16) に梁の変位場 (4)~(6) およびひずみ場 (8)~(13) を代入し、構成関係 (14) を考慮すると提案梁の仮想仕事式が得られる。

仮想仕事式が非常に長くなるので、仮想変位 $\delta \tilde{u}_1, \delta \tilde{u}_3, \delta \tilde{\gamma}, \delta g_s, \delta g_b, \delta g_a$ に関して分割すると、それぞれ

$$\int_V \left\{ (\lambda + 2\mu)(x_3\theta' + f_s g_s' + \tilde{u}_1') \delta \tilde{u}_1' + \lambda(f_{b2,2} g_b + f_{a2,2} g_a) \delta \tilde{u}_1' + \lambda(f_{b3,3} g_b + f_{a3,3} g_a) \delta \tilde{u}_1' \right\} dV \quad (17)$$

$$= \int_L p \delta \tilde{u}_1 dx_1 + \int_{\partial V} t_1 \delta \tilde{u}_1 dA$$

$$\int_V \left\{ -(\lambda + 2\mu)(x_3\theta' + f_s g_s' + \tilde{u}_1')(x_3 \delta \tilde{u}_3') - \lambda(f_{b2,2} g_b + f_{a2,2} g_a)(x_3 \delta \tilde{u}_3') - \lambda(f_{b3,3} g_b + f_{a3,3} g_a)(x_3 \delta \tilde{u}_3') \right\} dV \\ = \int_L q \delta \tilde{u}_3 dx_1 - \int_{\partial V} t_1 (x_3 \delta \tilde{u}_3') dA + \int_{\partial V} t_3 (\delta \tilde{u}_3) dA \quad (18)$$

$$\int_V \left\{ (\lambda + 2\mu)(x_3\theta' + f_s g_s' + \tilde{u}_1')(x_3 \delta \tilde{\gamma}') + \lambda(f_{b2,2} g_b + f_{a2,2} g_a)(x_3 \delta \tilde{\gamma}') + \lambda(f_{b3,3} g_b + f_{a3,3} g_a)(x_3 \delta \tilde{\gamma}') + \mu(\tilde{\gamma} + f_{s,3} g_s + f_{b3} g_b' + f_{a3} g_a') \delta \tilde{\gamma} \right\} dV \\ = \int_{\partial V} t_1 (x_3 \delta \tilde{\gamma}) dA \quad (19)$$

$$\int_V \left\{ (\lambda + 2\mu)(x_3\theta' + f_s g_s' + \tilde{u}_1') f_s \delta g_s' + \lambda(f_{b2,2} g_b + f_{a2,2} g_a) f_s \delta g_s' + \lambda(f_{b3,3} g_b + f_{a3,3} g_a) f_s \delta g_s' + \mu(f_{s,2} g_s + f_{b2} g_b' + f_{a2} g_a') f_{s,2} \delta g_s + \mu(\tilde{\gamma} + f_{s,3} g_s + f_{b3} g_b' + f_{a3} g_a') f_{s,3} \delta g_s \right\} dV \\ = \int_{\partial V} t_1 f_s \delta g_s dA \quad (20)$$

$$\int_V \left\{ (\lambda + 2\mu)(f_{b2,2} g_b + f_{a2,2} g_a) f_{b2,2} \delta g_b + \lambda(x_3\theta' + f_s g_s' + \tilde{u}_1') f_{b2,2} \delta g_b + \lambda(f_{b3,3} g_b + f_{a3,3} g_a) f_{b2,2} \delta g_b + (\lambda + 2\mu)(f_{b3,3} g_b + f_{a3,3} g_a) f_{b3,3} \delta g_b + \lambda(x_3\theta' + f_s g_s' + \tilde{u}_1') f_{b3,3} \delta g_b + \lambda(f_{b2,2} g_b + f_{a2,2} g_a) f_{b3,3} \delta g_b + \mu(f_{s,2} g_s + f_{b2} g_b' + f_{a2} g_a') f_{b2} \delta g_b + \mu((f_{b2,3} + f_{b3,2}) g_b + (f_{a2,3} + f_{a3,2}) g_a) (f_{b2,3} + f_{b3,2}) \delta g_b + \mu(\tilde{\gamma} + f_{s,3} g_s + f_{b3} g_b' + f_{a3} g_a') f_{b3} \delta g_b \right\} dV \\ = \int_{\partial V} t_3 f_{b3} \delta g_b dA \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& \int_V \{ (\lambda + 2\mu)(f_{b2,2}g_b + f_{a2,2}g_a) f_{a2,2}\delta g_a \\
& + \lambda(x_3\theta' + f_s g'_s + \tilde{u}'_1) f_{a2,2}\delta g_a \\
& + \lambda(f_{b3,3}g_b + f_{a3,3}g_a) f_{a2,2}\delta g_a \\
& + (\lambda + 2\mu)(f_{b3,3}g_b + f_{a3,3}g_a) f_{a3,3}\delta g_a \\
& + \lambda(x_3\theta' + f_s g'_s + \tilde{u}'_1) f_{a3,3}\delta g_a \\
& + \lambda(f_{b2,2}g_b + f_{a2,2}g_a) f_{a3,3}\delta g_a \\
& + \mu(f_{s,2}g_s + f_{b2}g'_b + f_{a2}g'_a) f_{a2}\delta g'_a \\
& + \mu((f_{b2,3} + f_{b3,2})g_b + (f_{a2,3} + f_{a3,2})g_a)(f_{a2,3} + f_{a3,2})\delta g_a \\
& + \mu(\tilde{\gamma} + f_{s,3}g_s + f_{b3}g'_b + f_{a3}g'_a) f_{a3}\delta g'_a \} dV \\
& = \int_{\partial V} t_3 f_{a3} \delta g_a dA
\end{aligned} \tag{22}$$

となる．断面積分を実行すると

$$\begin{aligned}
& \int_L (R_{12}\theta' + R_{13}g'_s + K_a \tilde{u}'_1 + R_{14}g_b + R_{11}g_a) \delta \tilde{u}'_1 dx_1 \\
& = \int_L p \delta \tilde{u}_1 dx_1 + [\bar{N} \delta \tilde{u}_1]_0^\ell
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
& \int_L -(K_b \theta' + R_1 g'_s + R_{12} \tilde{u}'_1 + R_5 g_b + R_{15} g_a) \delta \tilde{u}'_3 dx_1 \\
& = \int_L q \delta \tilde{u}_3 dx_1 - [\bar{M} \delta \tilde{u}'_3]_0^\ell + [\bar{Q} \delta \tilde{u}_3]_0^\ell
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
& \int_L \{ (K_b \theta' + R_1 g'_s + R_{12} \tilde{u}'_1 + R_5 g_b + R_{15} g_a) \delta \tilde{\gamma}' \\
& + (K_s \tilde{\gamma} + R_4 g_s + R_6 g'_b + R_{16} g'_a) \delta \tilde{\gamma} \} dx_1 \\
& = [\bar{M} \delta \tilde{\gamma}]_0^\ell
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& \int_L \{ (R_1 \theta' + R_2 g'_s + R_{13} \tilde{u}'_1 + R_7 g_b + R_{17} g_a) \delta g'_s \\
& + (R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g_s + R_8 g'_b + R_{18} g'_a) \delta g_s \} dx_1 \\
& = \bar{D}_s \delta g_s
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
& \int_L \{ (R_{21} g_b + R_{19} g_a + R_6 \theta' + R_7 g'_s + R_{14} \tilde{u}'_1) \delta g_b \\
& + (R_6 \tilde{\gamma} + R_8 g_s + R_9 g'_b + R_{20} g'_a) \delta g'_b \} dx_1 \\
& = \bar{D}_b \delta g_b
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
& \int_L \{ (R_{19} g_b + R_{22} g_a + R_{15} \theta' + R_{17} g'_s + R_{11} \tilde{u}'_1) \delta g_a \\
& + (R_{16} \tilde{\gamma} + R_{18} g_s + R_{20} g'_b + R_{10} g'_a) \delta g'_a \} dx_1 \\
& = \bar{D}_a \delta g_a
\end{aligned} \tag{28}$$

となる．ここに，以下の断面積分

$$\begin{aligned}
K_a & := \int_A (\lambda + 2\mu) dA, & K_b & := \int_A (\lambda + 2\mu) x_3^2 dA \\
K_s & := \int_A \mu dA
\end{aligned} \tag{29}$$

と端部断面に作用する表面力の合力

$$\bar{N} = \int_A t_1 dA, \quad \bar{M} = \int_A t_1 x_3 dA, \quad \bar{Q} = \int_A t_3 dA$$

$\bar{D}_s = \int_A t_1 f_s dA$, $\bar{D}_b = \int_A t_3 f_{b3} dA$, $\bar{D}_a = \int_A t_3 f_{a3} dA$ を定義した．断面積分 $R_i (i = 1 \cdots 22)$ については付録に示した．さらに，式(23)~(28)を部分積分すると

$$\begin{aligned}
& [(R_{12}\theta' + R_{13}g'_s + K_a \tilde{u}'_1 + R_{14}g_b + R_{11}g_a) \delta \tilde{u}_1]_0^\ell \\
& - \int_L \{ (R_{12}\theta'' + R_{13}g''_s + K_a \tilde{u}''_1 \\
& + R_{14}g'_b + R_{11}g'_a) \delta \tilde{u}_1 \} dx_1 \\
& = \int_L p \delta \tilde{u}_1 dx_1 + [\bar{N} \delta \tilde{u}_1]_0^\ell
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
& - [(K_b \theta' + R_1 g'_s + R_{12} \tilde{u}'_1 + R_5 g_b + R_{15} g_a) \delta \tilde{u}'_3]_0^\ell \\
& + [(K_b \theta'' + R_1 g''_s + R_{12} \tilde{u}''_1 + R_5 g'_b + R_{15} g'_a) \delta \tilde{u}_3]_0^\ell \\
& - \int_L \{ (K_b \theta''' + R_1 g'''_s + R_{12} \tilde{u}'''_1 + R_5 g''_b + R_{15} g''_a) \delta \tilde{u}_3 \} dx_1 \\
& = \int_L q \delta \tilde{u}_3 dx_1 - [\bar{M} \delta \tilde{u}'_3]_0^\ell + [\bar{Q} \delta \tilde{u}_3]_0^\ell
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
& [(K_b \theta' + R_1 g'_s + R_{12} \tilde{u}'_1 + R_5 g_b + R_{15} g_a) \delta \tilde{\gamma}]_0^\ell \\
& + \int_L \{ (K_s \tilde{\gamma} + R_4 g_s + R_6 g'_b + R_{16} g'_a) \delta \tilde{\gamma} \\
& - (K_b \theta'' + R_1 g''_s + R_{12} \tilde{u}''_1 \\
& + R_5 g'_b + R_{15} g'_a) \delta \tilde{\gamma} \} dx_1 \\
& = [\bar{M} \delta \tilde{\gamma}]_0^\ell
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& [(R_1 \theta' + R_2 g'_s + R_{13} \tilde{u}'_1 + R_7 g_b + R_{17} g_a) \delta g_s]_0^\ell \\
& + \int_L \{ (R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g_s + R_8 g'_b + R_{18} g'_a) \delta g_s \\
& - (R_1 \theta'' + R_2 g''_s + R_{13} \tilde{u}''_1 \\
& + R_7 g'_b + R_{17} g'_a) \delta g_s \} dx_1 \\
& = \bar{D}_s \delta g_s
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
& [(R_6 \tilde{\gamma} + R_8 g_s + R_9 g'_b + R_{20} g'_a) \delta g_b]_0^\ell \\
& + \int_L \{ R_{21} g_b + R_{19} g_a + R_5 \theta' + R_7 g'_s + R_{14} \tilde{u}'_1 \} \delta g_b \\
& - (R_6 \tilde{\gamma}' + R_8 g'_s + R_9 g''_b + R_{20} g''_a) \delta g_b \} dx_1 \\
& = \bar{D}_b \delta g_b
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
& [(R_{16} \tilde{\gamma} + R_{18} g_s + R_{20} g'_b + R_{10} g'_a) \delta g_a]_0^\ell \\
& + \int_L \{ (R_{19} g_b + R_{22} g_a \\
& + R_{15} \theta' + R_{17} g'_s + R_{11} \tilde{u}'_1) \delta g_a \\
& - (R_{16} \tilde{\gamma}' + R_{18} g'_s + R_{20} g''_b + R_{10} g''_a) \delta g_a \} dx_1 \\
& = \bar{D}_a \delta g_a
\end{aligned} \tag{35}$$

を得る．以上から強形式の支配方程式

$$N' + p = 0 \tag{36}$$

$$M'' + q = 0 \tag{37}$$

$$M' = Q \quad (38)$$

$$D'_s = R_4\tilde{\gamma} + R_3g_s + R_8g'_b + R_{18}g'_a \quad (39)$$

$$D_b = R_{21}g_b + R_{19}g_a + R_5\theta' + R_7g'_s + R_{14}\tilde{u}'_1 \quad (40)$$

$$D_a = R_{19}g_b + R_{22}g_a + R_{15}\theta' + R_{17}g'_s + R_{11}\tilde{u}'_1 \quad (41)$$

および $x_1 = 0, \ell$ での境界条件

$$Nn_i = \bar{N} \quad \text{or} \quad \tilde{u}_1 = \bar{u}_1 \quad (42)$$

$$Qn_i = \bar{Q} \quad \text{or} \quad \tilde{u}_3 = \bar{u}_3 \quad (43)$$

$$Mn_i = \bar{M} \quad \text{or} \quad \theta = \bar{\theta} \quad (44)$$

$$D_s n_i = \bar{D}_s \quad \text{or} \quad g_s = \bar{g}_s \quad (45)$$

$$D_b n_i = \bar{D}_b \quad \text{or} \quad g_b = \bar{g}_b \quad (46)$$

$$D_a n_i = \bar{D}_a \quad \text{or} \quad g_a = \bar{g}_a \quad (47)$$

を得る. ここに, N, M, Q, D_s, D_b, D_a は

$$N := R_{12}\theta' + R_{13}g'_s + K_a\tilde{u}'_1 + R_{14}g_b + R_{11}g_a \quad (48)$$

$$M := K_b\theta' + R_1g'_s + R_{12}\tilde{u}'_1 + R_5g_b + R_{15}g_a \quad (49)$$

$$Q := K_s\tilde{\gamma} + R_4g_s + R_6g'_b + R_{16}g'_a \quad (50)$$

$$D_s := R_1\theta' + R_2g'_s + R_{13}\tilde{u}'_1 + R_7g_b + R_{17}g_a \quad (51)$$

$$D_b := R_6\tilde{\gamma} + R_8g_s + R_9g'_b + R_{20}g'_a \quad (52)$$

$$D_a := R_{16}\tilde{\gamma} + R_{18}g_s + R_{20}g'_b + R_{10}g'_a \quad (53)$$

で定義される軸力, 曲げモーメント, せん断力, 一般化変位 g_s と仕事共役な一般化力, 一般化変位 g_b と仕事共役な一般化力, 一般化変位 g_a と仕事共役な一般化力である. $(\bar{\cdot})$ は境界条件として与えられる諸量, 下付き $i = 1, 2$ はそれぞれ $x_1 = 0$ および $x_1 = \ell$ における諸量を表し, $n_1 = -1, n_2 = 1$ である.

提案梁理論の支配方程式には多数の断面パラメタ R_i を含んでいる. 現時点で証明することはできていないが, 例えば式 (48) で定義される軸力において, 曲率 $\frac{d\theta}{dx_1}$ ・せん断に関する一般化変位 g_s ・曲げに関する一般化変位 g_b が軸力を発生させることはなく, 式 (48) におけるそれらの係数はゼロ, すなわち $R_{12} = R_{13} = R_{14} = 0$ と考えられる. 同様に, 軸変形 \tilde{u}'_1 ・軸変形に関する一般化変位 g_a が曲げモーメントを発生させることはないと考えれば式 (49) から $R_{15} = 0$ と考えられる. また, 軸変形に関する一般化変位がせん断に関する一般化力 D_s に寄与することはないと考えれば, 式 (51) から $R_{17} = 0$ と考えられる. 同様に, せん断変形 $\tilde{\gamma}$, せん断に関する一般化変位 g_s , 曲げに関する一般化変位 g_b のいずれも軸変形に関する一般化力 D_a に寄与することはないと考えれば, 式 (53) から $R_{16} = R_{18} = R_{20} = 0$ と考えられる. さらに支配方程式 (40) において, 曲げ変形の一般化力に関するつり合い式に軸変形の一般化変位が関係することはない, その係数は $R_{19} = 0$ と考えられる. 実際, 後述する数値解析例において, R_i ($i = 12, \dots, 20$) は他の断面パラメタの 10^{-6} 程度と十分に小さい.

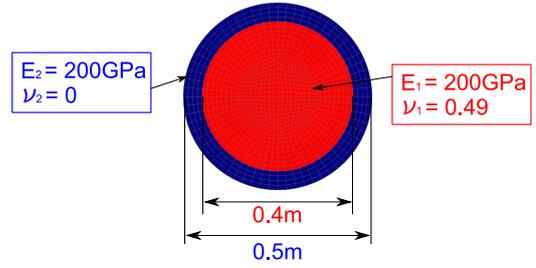


図-5 充填円管の断面

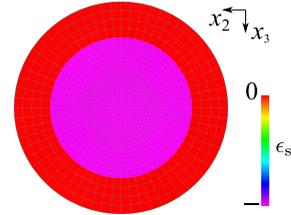


図-6 単位の x_1 軸方向ひずみを与えた代表体積要素の変形と ϵ_s 分布

3. 充填円管梁による検証

円管と充填材に異なる Poisson 比の材料を適用した非均質断面の梁を解析対象として, 提案した梁理論による解析を行い, 妥当性を検証する.

(1) 断面の設定と断面特性

図-5 に示す充実円管断面の梁を解析対象とする. 赤色で示す円柱部の材料を材料 1, 青色で示す円管部の材料を材料 2 とした. 材料はともに等方弾性体とし, 材料 i の Young 率を E_i とし $E_1 = E_2 = 200\text{GPa}$ とした. 材料 1 の Poisson 比は $\nu_1 = 0.49$, 材料 2 の Poisson 比は $\nu_2 = 0$ とした. また, 寸法については, 内径を 0.4m, 外径を 0.5m とした. 代表体積要素は 1 次 6 面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した. 本論文では線形弾性問題を対象としているため, 異種材料の要素間は節点共有としている. 断面は 1,088 要素, 長さ方向に意味はないが 4 要素分とし, 4,352 要素とした.

代表体積要素に単位の x_1 軸方向ひずみを与えた¹ 時の変形を図-6 に示す. 色は断面内平均ひずみ $\epsilon_s := \frac{\epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{2}$ を示している. 図-6 より, 内側の材料 1 が Poisson 効果によって断面内方向に収縮していることがわかる. 外側の材料 2 は材料 1 に引っ張られることで収縮しているが, 材料 1 よりも ϵ_s の値は小さい. この解析の結果として得られた断面内の変位が f_a である².

¹ 具体的には, 代表体積要素の有限要素モデルの相対する断面間に, 軸ひずみと代表体積要素長の積を相対変位とした拘束条件式を与え, つり合い式を解く⁸⁾.

² f_a は上記の代表体積要素に対して得られる固有のモードであるため, 断面形状もしくは材料特性のいずれかでも異なる場合は, それぞれの断面に対して求める必要がある.

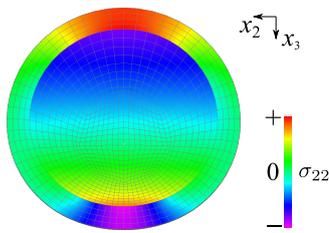


図-7 単位の曲げ変形を与えた代表体積要素の変形と σ_{22} 分布

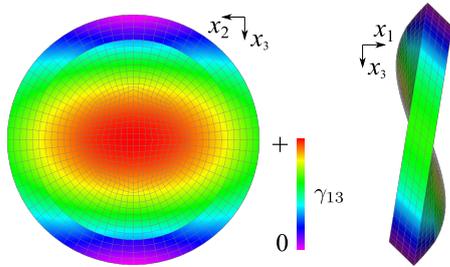


図-8 単位の横せん断変形を与えた代表体積要素の変形と γ_{13} 分布

代表体積要素に x_3 の正の向きに凸となる x_2 軸まわりの単位の曲率を与えた時の変形を図-7に示す。色は x_2 軸方向の応力 σ_{22} を示している。 x_1 軸方向の曲げ圧縮を受ける図の上部では、内側の材料1がPoisson効果によって x_2 - x_3 面内方向に膨張し、Poisson変形の生じない外側の材料2が材料1の変形を拘束することで、材料1には x_2 軸方向の圧縮が、材料2には x_2 軸方向の引張が生じていることが確認できる。曲げ引張を受ける図の下部では上部と逆の変形となっており、材料1がPoisson効果によって面内で収縮し、外側の材料2が材料1の変形を拘束することで、材料1には x_2 軸方向の引張が、材料2には x_2 軸方向の圧縮が生じていることが確認できる。この解析の結果として得られた断面内の変位が f_b である。

代表体積要素に単位の横せん断変形を与えた時の変形図を図-8に示す。色は横せん断ひずみ γ_{13} を示している。図より、 γ_{13} は断面内で2次的に非線形な分布となっている。この解析の結果として得られた x_1 方向の変位が f_s である。

代表体積要素の有限要素解析によって得られた断面変形モード f_a , f_b , f_s から付録で定義した断面パラメタを求めた。断面パラメタを材料特性 $E = E_1$, $G = G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$ および代表長さ $\lambda = 1$ m により無次元化した値を表-1にまとめた。

代表体積要素の軸剛性に関わるパラメタの値を表-2にまとめる。ここに、 K_{a0} は従来の梁論における軸剛性

$$K_{a0} = \int_A E dA \quad (54)$$

表-1 充填円管梁の断面パラメタ

$R_1/E\lambda^4$	2.35×10^{-3}
$R_2/E\lambda^4$	4.15×10^{-4}
$R_3/G\lambda^2$	4.67×10^{-2}
$R_4/G\lambda^2$	-4.67×10^{-2}
$R_5/E\lambda^4$	-1.99×10^{-2}
$R_6/G\lambda^4$	-9.22×10^{-4}
$R_7/E\lambda^4$	-2.32×10^{-3}
$R_8/G\lambda^4$	6.63×10^{-4}
$R_9/G\lambda^6$	1.20×10^{-5}
$R_{10}/G\lambda^4$	1.56×10^{-3}
$R_{11}/E\lambda^2$	-2.01
$R_{12}/E\lambda^3$	-1.39×10^{-11}
$R_{13}/E\lambda^3$	1.94×10^{-8}
$R_{14}/E\lambda^3$	-8.73×10^{-9}
$R_{15}/E\lambda^3$	6.13×10^{-9}
$R_{16}/G\lambda^3$	-5.74×10^{-10}
$R_{17}/E\lambda^3$	-1.70×10^{-8}
$R_{18}/G\lambda^2$	2.66×10^{-9}
$R_{19}/E\lambda^3$	2.61×10^{-9}
$R_{20}/G\lambda^5$	1.10×10^{-12}
$R_{21}/E\lambda^4$	1.99×10^{-2}
$R_{22}/E\lambda^2$	2.01
$K_a/E\lambda^2$	2.22
$K_b/E\lambda^4$	2.32×10^{-2}
$K_s/G\lambda^2$	2.31×10^{-1}

である。また、式(29)で定義した K_a は Ma et al.⁵⁾ や Wang et al.⁶⁾ のようにPoisson効果を完全に拘束したときの軸剛性である。充填材のPoisson比が0.49と非圧縮に近いので、Poisson効果を完全に拘束した場合の軸剛性は従来の梁理論における軸剛性に比べて約10倍程度と大きくなっている。一方、本手法により単位の x_1 軸方向ひずみを与えた代表体積要素に作用する軸力 N を本手法による等価軸剛性とし、これを K_{aeq} とする。これは単位軸変形 $\bar{u}'_1 = 1$ とそれに基づく断面変形 $g_a = 1$ に対する軸力と等価であり、式(48)で定義した軸力から

$$N = K_a + R_{17} \quad (55)$$

となり、実際に K_{aeq} と $K_a + R_{17}$ は数値も等しくなっている。また、「 K_{aeq} と K_{a0} の相対差」は K_{aeq} と K_{a0} の差の K_{a0} に対する比であり、本例ではPoisson効果により軸剛性が従来の梁理論に比べ6.7%ほど大きくなっている。

代表体積要素の曲げ剛性に関わるパラメタの値を表-

表-2 充填円管梁の軸剛性

$K_{aeq}/E\lambda^2$	2.09×10^{-1}
$K_{a0}/E\lambda^2$	1.96×10^{-1}
$K_a/E\lambda^2$	2.22
$(K_a + R_{17})/E\lambda^2$	2.09×10^{-1}
K_{aeq} と K_{a0} の相対差 (%)	6.70

表-3 充填円管梁の曲げ剛性

$K_{beq}/E\lambda^4$	3.28×10^{-3}
$K_{b0}/E\lambda^4$	3.06×10^{-3}
$K_b/E\lambda^4$	2.32×10^{-2}
$(K_b + R_6)/E\lambda^4$	3.30×10^{-3}
K_{beq} と K_{b0} の相対差 (%)	7.40

3に示す。ここに、 K_{b0} は従来の梁論における軸剛性

$$K_{b0} = \int_A E x_3^2 dA \quad (56)$$

である。また、式(29)で定義した K_b はMa et al.⁵⁾やWang et al.⁶⁾のようにPoisson効果を完全に拘束したときの曲げ剛性である。充填材のPoisson比が0.49と非圧縮に近いので、Poisson効果を完全に拘束した場合の曲げ剛性は従来の梁理論における曲げ剛性に比べて約7倍程度と大きくなっている。一方、本手法により単位曲率を与えた代表体積要素に作用する曲げモーメント M を本手法による等価軸剛性とし、これを K_{beq} とする。これは単位軸変形 $\theta = 1$ とそれに基づく断面変形 $g_b = 1$ に対する軸力と等価であり、式(49)で定義した曲げモーメントから

$$M = K_b + R_6 \quad (57)$$

となり、実際に K_{beq} と $K_b + R_6$ の数値の差も1%以下であり、両者はほぼ等しくなっている。また、「 K_{beq} と K_{b0} の相対差」は K_{beq} と K_{b0} の差の K_{b0} に対する比であり、本例ではPoisson効果により軸剛性が従来の梁理論に比べ7.4%ほど大きくなっている。

また、材料1と2を入れ替えて、充填材のPoisson比が小さい場合の解析も行ったところ、 K_{aeq} と K_{a0} の相対差は5.9%、 K_{beq} と K_{b0} の相対差は6.0%であった。

(2) 軸力を受ける両端固定梁

図-9に示すような、軸力を受ける長さ $l = 4.8\text{m}$ の両端固定梁を対象として本手法の精度を検証する。本提案手法による解は支配方程式(36)~(41)を文献¹³⁾で報告した有限要素離散化に基づき、数値的に求めている。要素寸法は参照解とする後述の連続体有限要素モデルの x_1

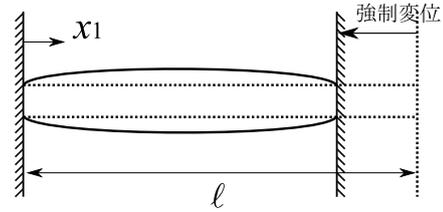


図-9 軸力を受ける両端固定梁

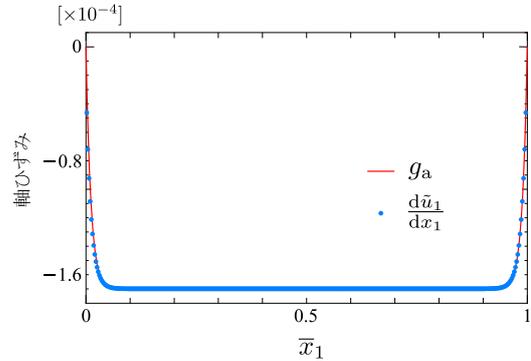


図-10 軸力を受ける両端固定梁の軸ひずみ $\frac{du_1}{dx_1}$ と関連する一般化変位 g_a

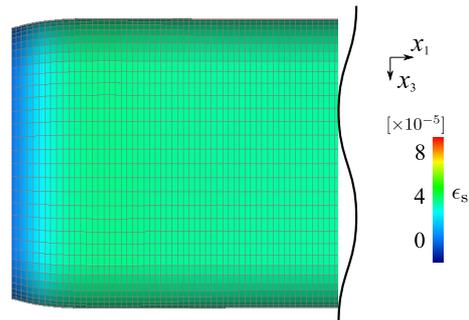


図-11 軸力を受ける両端固定梁の左支点付近の変形 (参照解)

軸方向の要素寸法と同じとした。両端の \bar{u}_3 、 $\bar{\theta}$ 、 \bar{g}_s 、 \bar{g}_b 、 \bar{g}_a を0とし、断面変形も拘束することで固定端とした。左端で $\bar{u}_1 = 0$ とし、右端に強制変位 $\bar{u}_1 = -8.0 \times 10^{-4}\text{m}$ を与え梁を圧縮した。

本手法の精度を比較するための参照解として、連続体有限要素モデルによる解析を行った。断面の要素分割は代表体積要素のモデルと同じとし、軸方向は384分割とし、総要素数は417,792要素となった。両端の断面上の節点を全て完全拘束することで固定端をモデル化し、右端の断面上の全ての節点に強制変位を与えることで梁を圧縮した。

本手法による x_1 軸方向ひずみ $\frac{d\bar{u}_1}{dx_1}$ と軸変形に伴う断面変形に関連する一般化変位 g_a を図-10に示す。横軸は無次元化座標 x_1/l で表している。軸変形に関する断面変形の一般化変位はほぼ軸ひずみと同じで一定であるが、

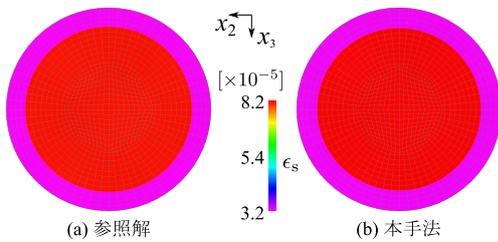


図-12 軸力を受ける両端固定梁の $x_1 = 1.8\text{m}$ に位置する断面の断面内平均ひずみ ϵ_s 分布

端部は境界条件からゼロになっている。境界条件の影響範囲は断面半径の半分程度であった。一方、軸ひずみに関しては、従来の梁理論であれば $(-8.0 \times 10^{-4})/4.8 = -1.67 \times 10^{-4}$ で一定であるが、本手法による軸ひずみは端部で減少している。これは、端部において断面変形が拘束されているので、見掛け上の軸剛性が大きくなっているためである。軸ひずみと一般化変位 g_a は似た傾向で変化しているが、断面変形を完全に拘束しても軸剛性は有限なので、軸ひずみは支点部でゼロとはならない。図-11に参照解の $x_1 = 0$ における支点（左支点）付近の変形の様子を示す。図中の色は断面内平均ひずみ $\epsilon_s = \frac{\epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{2}$ を表す。Poisson 効果により断面が膨張しているが、支点付近で急激に膨張が小さくなっている。本手法と参照解では自由度が異なるので単純な比較はできないが、支点付近で断面変形が拘束されている様子は定性的に一致している。

本手法による水平反力 H_p を無次元化すると $\frac{H_p}{EA} = 1.815 \times 10^{-4}$ 、同様に無次元化した参照解の反力は $\frac{H_s}{EA} = 1.801 \times 10^{-4}$ であった。本手法の参照解に対する相対差は 0.78% である。なお、代表体積要素による等価剛性と強制変位の積から得られる無次元化反力は 1.778×10^{-4} であり、本手法の解および参照解がこれよりも大きくなっているのは、両端における断面変形が拘束されているためである。

Poisson 効果の再現精度を確認するために、本解析結果と参照解において断面内平均ひずみ $\epsilon_s = \frac{\epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{2}$ を比較する。本手法による断面内のひずみは、式(9)、(10)に得られた解を代入することにより求めることができる。ただし、断面変形モード f_a は有限要素離散化した代表体積要素で求めているので、ここでも代表体積要素の有限要素モデルを利用して分布を求めた。図-12は $x_1 = 1.8\text{m}$ ($\bar{x}_1 = 3/8$) の断面における断面内平均ひずみ ϵ_s 分布を示す。同図(a)は参照解、同図(b)は本手法による解である。Poisson 比の大きな充填材は断面内に膨張すること、および本手法と参照解の ϵ_s 分布は定性的に一致していることがわかる。両者の差の L^2 ノルムは

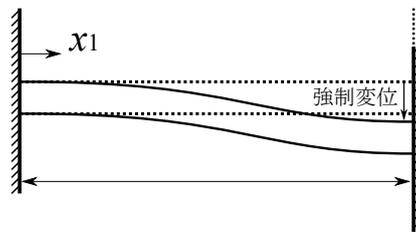


図-13 曲げとせん断を受ける両端固定梁

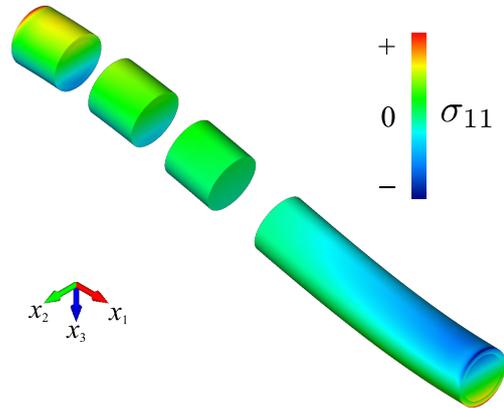


図-14 曲げとせん断を受ける両端固定梁の変形の様子

0.78% であった。ここに、 L^2 ノルムは

$$\sqrt{\frac{\int_A (\beta_p - \beta_s)^2 dA}{\int_A \beta_s^2 dA}} \quad (58)$$

により定義した。ここに、 β_p は本手法による解、 β_s は連続体有限要素モデルによる参照解である。

(3) 曲げとせん断を受ける両端固定梁

前節と同じ両端固定梁に、図-13に示すように右端に鉛直変位を与えることで曲げとせん断を作用させた。左端の \bar{u}_3 は 0 とし、右端に強制変位 $\bar{u}_3 = 8 \times 10^{-4}\text{m}$ を与え、他の自由度は両端ですべてゼロとした。連続体有限要素モデルによる参照解も前節と同様のモデルにより求めた。このとき、右端の断面の全節点に同じ強制変位を与え、両端のすべての節点の他の自由度はすべてゼロとした。参照解の変形の様子を図-14に示した。色は曲げ応力 σ_{11} であり、断面内部の応力分布がわかるようにある範囲の要素を非表示にして示してある。

本手法による曲率 $\frac{d\theta}{dx_1}$ と曲げに伴う断面変形に関連する一般化変位 g_b を図-15に示す。曲げモーメントの絶対値は両固定支点部で最も大きくなるが、一般化変位 g_b は固定端の境界条件から両端ではゼロになる。そのため、端部付近以外では g_b は曲げモーメントと同様に端部に近づくにつれ大きくなるが、端部付近では急減し端部でゼロになっている。前節の軸剛性と同様に、この断面変形の拘束により見かけ上の曲げ剛性が大き

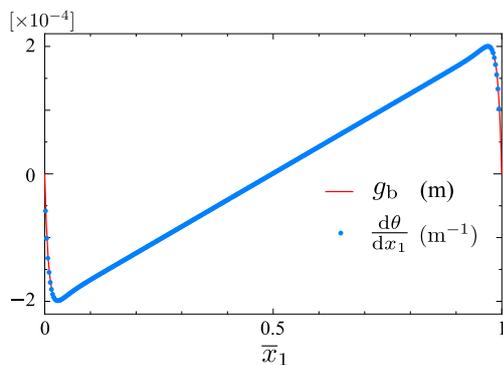


図-15 曲げとせん断を受ける両端固定梁の曲率 $\frac{d\theta}{dx_1}$ と関連する一般化変位 g_b

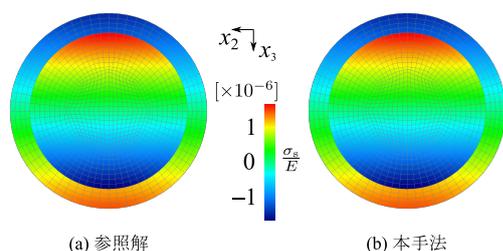


図-16 曲げとせん断を受ける両端固定充填円管梁の $x_1 = 1.8\text{m}$ における断面の σ_s 分布

くなることで、モーメントの絶対値が最大となる支点部付近で曲率も急減している。断面変形の拘束による曲げ剛性の増大は有限なので、曲率は小さくはなるが g_b と異なりゼロにはならない。

Poisson 効果による曲げに伴う断面内の応力の状態を確認するために、図-16に $x_1 = 1.8\text{m}$ ($\bar{x}_1 = 3/8$) の断面における無次元化断面内平均応力 $\frac{\sigma_s}{E}$ を示す。ここに

$$\sigma_s := \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2}, \quad E = E_1$$

とした。同図 (a) は参照解、同図 (b) は本手法による解である。前節と同様に、本手法による解を変位場に代入し、代表体積要素の有限要素モデルを用いて断面内の応力分布を求めた。着目断面は上に凸の変形となるため、上側が x_1 軸方向に引張、下側が圧縮となる。断面内の変形は、上側では充填材が Poisson 効果により収縮しようとするのを円管材がそれを拘束することで、充填材には引張、円管材には圧縮の断面内平均応力が生じている。下側は上側と圧縮・引張が入れ替わっている。同図 (a), (b) の比較から、これらの変形の様子が定性的に一致していると判断できる。また、この断面において前節と同様に断面内平均応力の差の L^2 ノルムを計算すると 0.57% だった。

4. おわりに

本論文では、Poisson 効果による断面内の変位を考慮可能な梁理論を構築した。提案梁理論は、著者らのせん断変形に伴う断面変形を考慮した梁理論¹¹⁾に Poisson 効果による断面変形の大きさを表す2つの一般化変位を加えたものである。Poisson 効果による変位は、梁の代表体積要素の有限要素解析から得られ、提案梁理論ではその変位に関連した量を断面積分した結果として複数の断面パラメタに反映される。

Poisson 効果を互いに拘束しあう断面の典型として、充填円管の充填材・円管材に極端に異なる Poisson 比の材料を用いた複合断面梁に対して本理論を適用し、軸剛性・曲げ剛性を評価し、従来の梁理論および先行研究における Poisson 効果を完全に拘束した場合の結果と相互に比較した。また、両端固定で軸圧縮・曲げせん断を与えた境界値問題を解き、連続体要素による数値解析結果を参照解として比較した。その結果、Poisson 効果による断面内ひずみ・応力に関して本解析結果と参照解は定性的に一致し、かつ、定量的にも1%程度の精度で一致することを確認した。本手法の構築において、断面の形状や材料の配置に何ら条件を設けていないため、本手法は任意形状の複合断面の梁に適用可能である。

謝辞：本研究の一部は JSPS 科研費 18K04318 (代表：齊木 功) の助成および日本鉄鋼連盟鋼構造研究支援助成を受けたものです。

付録 断面積分の定義

仮想仕事式において導入した断面積分の定義を以下に示す。

$$R_1 := \int_A (\lambda + 2\mu)x_3 f_s \, dA$$

$$R_2 := \int_A (\lambda + 2\mu)f_s^2 \, dA$$

$$R_3 := \int_A \mu(f_{s,2}^2 + f_{s,3}^2) \, dA$$

$$R_4 := \int_A \mu f_{s,3} \, dA$$

$$R_5 := \int_A \lambda(f_{b2,2} + f_{b3,3})x_3 \, dA$$

$$R_6 := \int_A \mu f_{b3} \, dA$$

$$R_7 := \int_A \lambda(f_{b2,2} + f_{b3,3})f_s \, dA$$

$$R_8 := \int_A \mu(f_{b2}f_{s,2} + f_{b3}f_{s,3}) \, dA$$

$$R_9 := \int_A \mu(f_{b2}^2 + f_{b3}^2) \, dA$$

$$\begin{aligned}
R_{10} &:= \int_A \mu(f_{a2}^2 + f_{a3}^2) dA \\
R_{11} &:= \int_A \lambda(f_{a2,2} + f_{a3,3}) dA \\
R_{12} &:= \int_A (\lambda + 2\mu)x_3 dA \\
R_{13} &:= \int_A (\lambda + 2\mu)f_s dA \\
R_{14} &:= \int_A \lambda(f_{b2,2} + f_{b3,3}) dA \\
R_{15} &:= \int_A \lambda(f_{a2,2} + f_{a3,3})x_3 dA \\
R_{16} &:= \int_A \mu f_{a3} dA \\
R_{17} &:= \int_A \lambda(f_{a2,2} + f_{a3,3})f_s dA \\
R_{18} &:= \int_A \mu(f_{a2}f_{s,2} + f_{a3}f_{s,3}) dA \\
R_{19} &:= \int_A \left\{ (\lambda + 2\mu)(f_{b2,2}f_{a2,2} + f_{b3,3}f_{a3,3}) \right. \\
&\quad \left. + \lambda(f_{b2,2}f_{a3,3} + f_{b3,3}f_{a2,2}) \right. \\
&\quad \left. + \mu(f_{b2,3} + f_{b3,2})(f_{a2,3} + f_{a3,2}) \right\} dA \\
R_{20} &:= \int_A \mu(f_{b2}f_{a2} + f_{b3}f_{a3}) dA \\
R_{21} &:= \int_A \left\{ (\lambda + 2\mu)(f_{b2,2}^2 + f_{b3,3}^2) \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda f_{b2,2}f_{b3,3} + \mu(f_{b2,3} + f_{b3,2})^2 \right\} dA \\
R_{22} &:= \int_A \left\{ (\lambda + 2\mu)(f_{a2,2}^2 + f_{a3,3}^2) \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda f_{a2,2}f_{a3,3} \right. \\
&\quad \left. + \mu(f_{a2,3} + f_{a3,2})^2 \right\} dA
\end{aligned}$$

参考文献

- 1) Timoshenko, S.P. and Krieger, S.W.: *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 1959.
- 2) Reddy, J.N.: A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.51, pp.745-752, 1984.
- 3) 複合構造標準示方書小委員会：2014年制定 複合構造標準示方書 原則編・設計編，土木学会，2015.
- 4) Chandraskhara, K., Bangera, K.M.: Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element, *Comput. Struct.*, Vol.43, No.4, pp.719-727, 1992.
- 5) Ma, H.M., Gao, L.-H., Reddy, J.N.: A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.56, pp.3379-3391, 2008.
- 6) Wang, B., Zhao, J., Zhou, S.: A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol.29, pp.591-599, 2010.
- 7) Faroughi, S., Shaat, M.: Poisson's ratio effects on the mechanics of auxetic nanobeams, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol.70, pp.8-14, 2018.
- 8) 齊木 功, 鍵 一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫：非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価，土木学会応用力学論文集, Vol.15, pp.161-169, 2012.
- 9) 齊木 功, 藤本竜太, 山本剛大：非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察土木学会論文集 A2, Vol.74, pp.I.3-I.11, 2018.
- 10) 齊木 功, 鄭 勳, 山本剛大：断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2, Vol.75, pp.I.3-I.12, 2019.
- 11) 齊木 功, 鄭 勳：せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考慮した梁理論，土木学会論文集 A2, Vol.77, No.1, pp.1-11, 2021.
- 12) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268-278, 1946.
- 13) 齊木 功, 西井大樹, 山本剛大：任意断面梁のせん断遅れを考慮できる梁要素，日本計算工学会論文集，Vol.2018, p.20180013, 2018.

(Received June 18, 2021)

(Accepted November 30, 2021)

A BEAM THEORY CONSIDERING CROSS-SECTIONAL DEFORMATION DUE TO THE POISSON EFFECT

Isao SAIKI and Ko TABUCHI

Since, in homogeneous beams, the displacement perpendicular to the axis by the Poisson's effect is not constrained, elementary beam theory uses a one-dimensional elastic constitutive law. However, in composite beams consisting of multiple materials with different Poisson's ratios, the multiple materials constrain each other's displacement in the perpendicular direction to the axis. Since the axial stiffness and the bending stiffness are affected by this displacement constraints, accurate evaluation of the stiffness needs to consider the Poisson's effect. In this paper, we propose a beam theory that can consider Poisson's effect as an extension of the beam theory including the cross-sectional deformation. Comparison of the solutions of the proposed beam and continuum shows the validity of the proposed beam theory.