

せん断遅れと横せん断による断面変形を 統一的に考慮した梁理論

齊木 功¹・鄭 勲²

¹正会員 東北大学准教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: isao.saiki.a4@tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

²非会員 エム・エムブリッジ株式会社 生産・技術部 (〒 733-0036 広島市西区観音新町 1-20-24)
E-mail: zheng.xun@mm-bridge.co.jp

これまで、細長い部材におけるせん断遅れと横せん断に関する研究は別々に行われてきた。せん断遅れの研究は、その初期のころから断面変形を考慮していたのに対し、横せん断の研究では、せん断応力分布から補正係数を求める研究が主流であり、断面変形が陽に考慮されることはほとんどなかった。著者らは横せん断の断面変形を陽に考慮する梁理論を構築したことから、本研究ではせん断遅れと横せん断の断面変形を統一的に考慮可能な梁理論を提案する。提案した梁理論に必要な断面パラメータを数値的に求める方法を示し、解析解と連続体要素を用いた有限要素解を比較し、本梁理論の妥当性を確認できた。

Key Words: shear lag, transverse shear, deformation of cross section, homogenization, Timoshenko beam

1. はじめに

金属材料を用いた薄肉断面部材は様々な工業製品に用いられている。土木工学の分野では、薄肉構造は鋼橋の主要な部材に広く用いられている。特に斜張橋や、アーチ系橋梁のような長大橋においても自重軽減と剛性確保のために大断面箱桁のような薄肉構造が用いられることも多い。このような構造における補剛桁の支持間隔は、冗長性を考慮して 10 ないし 20m 程度とすることが多いようである¹⁾。一方で、桁幅は幅員と同程度となることから 2 車線でも 10m 程度であり、支持間隔を考慮すると細長いとは言えない。桁高に関しては、桁幅ほど大きくはないが、支持間隔を考慮するとやはり細長いとは言えない。

支間に比べて桁幅が小さくない場合はせん断遅れによる変形の影響が無視できなくなる。橋梁の設計においては、応力による照査が主となることから、一般的に有効幅によりせん断遅れが考慮される²⁾。梁理論を拡張し、せん断遅れ変形を直接取り入れた理論は、Reissner³⁾により提案された。その後、Song and Scordelis⁴⁾によるせん断遅れによる応力分布に調和解析を適用した解析的手法や、著者らによる梁の代表体積要素の一樣せん断変形⁵⁾からせん断遅れ変形モードを梁理論に組み込む半解析的手法などが提案されている^{6),7)}。また、梁要素にせん断遅れの自由度を付加した梁要素の提案もなされている^{8),9)}。

支間に比べて桁高が小さくない場合はせん断変形(横

せん断)の影響が無視できなくなる。せん断変形を考慮した梁は Timoshenko 梁¹⁰⁾と呼ばれ、Euler-Bernoulli の梁が用いている断面が中立面に対して垂直を保つという仮定を用いないが、断面内のせん断ひずみ分布は一定、すなわち断面が平面保持することを仮定する。ところが、特殊な場合を除いて梁の上下縁でせん断応力はゼロとなり、断面内のせん断ひずみは一定とはならない。そのため Timoshenko 梁のせん断剛性はせん断補正係数によって修正される。様々な形状の断面に対するせん断補正係数の研究は長年にわたって行われ^{11),12),13)}、近年では有限要素法を援用したせん断補正係数の研究も報告されている^{14),15)}。著者らは梁の代表体積要素⁵⁾の有限要素解析から梁のせん断剛性評価に関する提案を行っている^{16),17)}。加えて著者らは、梁の横せん断変形をせん断遅れと同様に独立な自由度として加えることでより高精度な梁理論を構築できることを示した¹⁸⁾。

梁のせん断遅れと横せん断、ひいてはそれらによる断面変形は、前述のようにこれまでそれぞれ独立に考慮されてきた。ここで、著者らの横せん断剛性の研究¹⁶⁾では、断面形状によって梁がせん断変形する際にせん断遅れ変形を伴う場合、せん断遅れ変形がせん断剛性評価に影響を及ぼすこと、せん断遅れ変形を拘束することで正確なせん断剛性評価が可能であることを報告している。また、せん断遅れによる断面変形も、Reissner や著者らのこれまでの研究においても、ウェブの上下縁からの変位をせん断遅れ変位としており、ウェブの横せん断による変形と分離して考慮しているとも解釈で

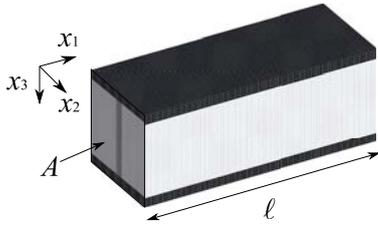


図-1 解析対象と座標・領域の設定

きる。しかしながら、せん断遅れと横せん断による断面変形は相互作用があり、統一的に考慮すべき現象ではないかという着想に至った。そこで本研究では、せん断遅れと横せん断による断面変形を統一的に考え、その断面変形の自由度を持つ梁理論の構築を目的とする。構築した梁理論の妥当性・精度は連続体の有限要素解析と比較して評価する。

2. せん断遅れと横せん断による断面変形を考慮した梁理論の定式化

この章では、著者らの既発表のせん断遅れによる断面変形を考慮した梁理論^{6),7)}と横せん断による断面変形を考慮した梁理論¹⁸⁾を組み合わせた梁理論の定式化を示す。

(1) 問題と変位場の設定

図-1に示すような長さ l の長さ方向に一様な任意形状断面の梁を解析対象とする。梁軸方向を x_1 、梁軸直角水平方向を x_2 、鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する。解析対象の梁軸方向領域を $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq l\}$ 、断面の領域を A とする。断面に x_2 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸と、 x_3 軸周りの曲げのみが作用したときの中立軸の交点を x_2, x_3 の原点とする。

著者ら⁷⁾は、フランジが薄いとはみなせない梁において、フランジ領域のせん断遅れによる梁軸方向変位の分布を断面内の2方向の関数 $f(x_2, x_3)$ と定義することを提案している。また、充実断面梁の横せん断の変形に対する断面変形の変位場を $f(x_3)$ とした梁理論¹⁸⁾も提案している。本論文では、任意形状断面の全断面領域において、せん断遅れに起因する軸方向変位と横せん断に起因する軸方向変位の両者を統合して断面変形の変位場を $f(x_2, x_3)$ とすることを提案する。梁の断面の回転を $\theta(x_1)$ 、断面変形の変位場 f に対する一般化変位を $g(x_1)$ とすると、梁の軸(x_1)方向変位場は

$$u_1 = x_3\theta + f(x_2, x_3)g(x_1) \quad (1)$$

と表すことができる。

断面の平均的な横せん断変形 $\tilde{\gamma}$ をTimoshenko梁と同

様に断面の回転とたわみ角の差として

$$\tilde{\gamma}(x_1) := \theta(x_1) - (-u'_3) \quad (2)$$

と定義する。ここに $:=$ は定義、 $(\cdot)'$ は x_1 に関する導関数を表す。また、軸方向と直交する2方向の変位場は通常の梁理論と同様に $u_2 = 0, u_3 = u_3(x_1)$ とすると、変位場から導かれるひずみは

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3\theta' + fg' \quad (3)$$

$$\gamma_{12} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = f_{,2}g \quad (4)$$

$$\gamma_{13} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \tilde{\gamma} + f_{,3}g \quad (5)$$

となる。ここに、 $(\cdot)_{,i}$ は x_i に関する偏導関数を表す。

(2) 支配方程式の定式化

解析領域を $V := L \times A$ とし、単位軸方向長さ当たりの x_3 方向の分布荷重 $q(x_1)$ と境界条件としての表面力 p_i ($i = 1, 3$)を考慮した仮想仕事式は

$$\begin{aligned} & \int_V \{E\epsilon_{11}\delta\epsilon_{11} + G(\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13})\} dV \\ & = \int_L q\delta u_3 dx + \int_{\partial V} \{p_1\delta u_1 + p_3\delta u_3\} dA \end{aligned} \quad (6)$$

と表せる。ここに、 ∂V は解析領域の境界面(梁の両端の断面)、 $\delta(\cdot)$ は (\cdot) の仮想ひずみもしくは仮想変位を表す。上式に式(3)、(4)、(5)を代入すると

$$\begin{aligned} & \int_V \{E(x_3\theta' + fg')(x_3\delta\theta' + f\delta g') \\ & \quad + G(f_{,2}g)(f_{,2}\delta g) + G(\tilde{\gamma} + f_{,3}g)(\delta\tilde{\gamma} + f_{,3}\delta g)\} dV \\ & = \int_L q\delta u_3 dx + \int_{\partial V} \{p_1\delta u_1 + p_3\delta u_3\} dA \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。上式を展開すると

$$\begin{aligned} & \int_V E(x_3^2\theta'\delta\theta' + fg'x_3\delta\theta' + x_3\theta'f\delta g' + f^2g'\delta g') \\ & \quad + G\{(f_{,2})^2g\delta g + (\tilde{\gamma} + f_{,3}g)\delta\tilde{\gamma} + (\tilde{\gamma} + f_{,3}g)f_{,3}\delta g\} dV \\ & = \int_L q\delta u_3 dx + \int_{\partial V} (x_3p_1\delta\theta + p_1f\delta g) dA \\ & \quad + \int_{\partial V} p_3\delta u_3 dA \end{aligned} \quad (8)$$

となり、さらに断面積分を実行すると、最終的に弱形式の支配方程式

$$\begin{aligned} & \int_L \{K_b\theta'\delta\theta' + R_1g'\delta\theta' + R_1\theta'f\delta g' + R_2g'\delta g' \\ & \quad + (K_s\tilde{\gamma} + R_4g)\delta\tilde{\gamma} + (R_4\tilde{\gamma} + R_3g)\delta g\} dx_1 \\ & = \int_L q\delta u_3 dx_1 + (\bar{M}\delta\theta + \bar{D}\delta g + \bar{Q}\delta u_3) \Big|_{x=0,\ell} \end{aligned} \quad (9)$$

を得る. ここに, K_b , K_s はそれぞれ合成断面の曲げ剛性およびせん断剛性¹, R_i は断面変形に関するパラメータであり, A を断面として

$$\begin{aligned} K_b &:= \int_A E(x_3)^2 dA, & K_s &:= \int_A G dA, \\ R_1 &:= \int_A E x_3 f dA, & R_2 &:= \int_A E f^2 dA, \\ R_3 &:= \int_A G \{(f_{,2})^2 + (f_{,3})^2\} dA, & R_4 &:= \int_A G f_{,3} dA \end{aligned} \quad (10)$$

と定義した. また, \bar{M} , \bar{D} , \bar{Q} は端部断面に作用する外力の合力で

$$\begin{aligned} \bar{M} &:= \int_A x_3 p_1 dA, & \bar{D} &:= \int_A p_1 f dA, \\ \bar{Q} &:= \int_A p_3 dA \end{aligned} \quad (11)$$

と定義した. \bar{M} は外力モーメント, \bar{D} は断面変形に関する一般化外力, \bar{Q} は鉛直外力である².

これを弱形式の支配方程式 (9) に代入し, 支配方程式の独立変数を u_3 , θ , g から u_3 , $\tilde{\gamma}$, g と変換すると

$$\begin{aligned} &\int_L \{(K_b \theta' + R_1 g')(\delta \tilde{\gamma}' - \delta u_3') + (R_1 \theta' + R_2 g') \delta g' \\ &\quad + (K_s \tilde{\gamma} + R_4 g) \delta \tilde{\gamma} + (R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g) \delta g\} dx_1 \\ &= \int_L q \delta u_3 dx_1 + (\bar{M}(\delta \tilde{\gamma} - \delta u_3) + \bar{D} \delta g + \bar{Q} \delta u_3) \Big|_{x=0, \ell} \end{aligned} \quad (12)$$

となる.

式 (12) の δu_3 に関する項を取り出し, δu_3 の導関数を含む項を部分積分すると

$$\begin{aligned} &[(K_b \theta'' + R_1 g'') \delta u_3]_0^L - [(K_b \theta' + R_1 g') \delta u_3]_0^L \\ &\quad - \int_L (K_b \theta''' + R_1 g''' + q) \delta u_3 dx \\ &= (\bar{Q} \delta u_3 - \bar{M} \delta u_3') \Big|_{x=0, \ell} \end{aligned} \quad (13)$$

を得る.

式 (12) の $\delta \tilde{\gamma}$ に関する項を取り出し, $\delta \tilde{\gamma}'$ を含む項に部分積分を適用すると

$$\begin{aligned} &[(K_b \theta' + R_1 g') \delta \tilde{\gamma}]_0^{\ell} \\ &\quad + \int_L (-K_b \theta'' - R_1 g'' + K_s \tilde{\gamma} + R_4 g) \delta \tilde{\gamma} dx_1 \\ &= (\bar{M} \delta \tilde{\gamma}) \Big|_{x=0, \ell} \end{aligned} \quad (14)$$

を得る.

式 (12) の δg に関する項を取り出し, $\delta g'$ を含む項に

部分積分を適用すると

$$\begin{aligned} &[(R_1 \theta' + R_2 g' - \bar{D}) \delta g]_0^{\ell} \\ &\quad + \int_L (-R_1 \theta'' - R_2 g'' + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g) \delta g dx_1 \\ &= (\bar{D} \delta g) \Big|_{x=0, \ell} \end{aligned} \quad (15)$$

を得る.

以上から, 強形式の支配方程式は

$$K_b \theta''' + R_1 g''' + q = 0 \quad (16)$$

$$-K_b \theta'' - R_1 g'' + K_s \tilde{\gamma} + R_4 g = 0 \quad (17)$$

$$-R_1 \theta'' - R_2 g'' + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g = 0 \quad (18)$$

となる. 式 (16) は曲げモーメント, 式 (17) はせん断力, 式 (18) は断面変形に関するつり合い式である.

式 (16) における R_1 を含む左辺第 2 項は, 著者らの文献^{6,7)} では曲げモーメントのつり合い式におけるせん断遅れの影響を表す項である. これらの文献では, Reissner に倣い, フランジとウェブの交点を基準とした軸方向変位を断面変形モード f としていた. 本論文では, フランジ領域・ウェブ領域を区別せず, かつ, せん断遅れと横せん断に起因する断面変形を区別せずに統一的に扱うために, 著者らによる文献¹⁸⁾ と同様に代表体積要素に一樣せん断変形を与えたときの軸方向変位をそのまま断面変形モード f として用いる. 断面の回転角に対しても文献¹⁷⁾ で提案する回転角 θ

$$\theta = \frac{1}{K_b} \int_A E x_3 u_1 dA \quad (19)$$

を用いる. この u_1 をそのまま断面変形モード f に用いるので, $K_b \neq 0$ より式 (10) で定義する R_1 は

$$R_1 = \int_A E x_3 f dA = 0 \quad (20)$$

となる. すると支配方程式は

$$K_b \theta''' + q = 0 \quad (21)$$

$$-K_b \theta'' + K_s \tilde{\gamma} + R_4 g = 0 \quad (22)$$

$$-R_2 g'' + R_4 \tilde{\gamma} + R_3 g = 0 \quad (23)$$

となる. ここで, 前述のせん断遅れに関する項である R_1 を含む項がゼロとなり, 支配方程式に含まれなくなる. その代わりに式 (19) で定義される断面の回転角にせん断遅れに起因する変位も含まれているので, R_1 に関する項を含まない支配方程式 (21), (22), (23) はせん断遅れの影響を考慮していることとなる. また, 式 (23) 左辺第 3 項の R_3 に面内せん断変形, すなわちせん断遅れの影響が直接考慮されている.

直応力 $\sigma_{11} := E \epsilon_{11}$ と横せん断応力 $\sigma_{13} := G \gamma_{13}$ を定義し, それらによる合応力, すなわち断面力 M , D , Q

¹ 定義式から明らかなように, K_s は断面変形がない, すなわちせん断ひずみが断面内で一樣と仮定した場合のせん断剛性である.

² 簡単のために軸力 $\int_A p_1 dA$ はゼロとした

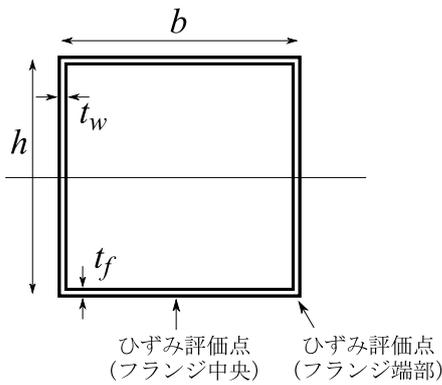


図-2 箱断面

を表面力による合応力の定義式 (11) と同様とすると

$$M := \int_A x_3 \sigma_{11} dA = \int_A x_3 E \epsilon_{11} dA \quad (24)$$

$$= \int_A \{(x_3)^2 E \theta' + x_3 E f g'\} dA = K_b \theta'$$

$$D := \int_A f \sigma_{11} dA = \int_A E \epsilon_{11} f dA \quad (25)$$

$$= \int_A E \{f x_3 \theta + f^2 g'\} dA = R_2 g'$$

$$Q := \int_A \sigma_{13} dA = \int_A G \gamma_{13} dA \quad (26)$$

$$= \int_A G \{\tilde{\gamma} + f_{,3} g\} dA = K_s \tilde{\gamma} + R_4 g$$

のように断面力を変形で表現することができる。ここに、 M は曲げモーメント、 Q はせん断力、 D は断面変形に関する一般化変位 g と仕事共役な一般化力であり、 $R_1 = 0$ を考慮した。式 (26) と式 (22) より、せん断力は

$$Q = K_b \theta' = M' \quad (27)$$

と表すこともできる。

式 (13)–(15) の境界 $x_1 = 0, \ell$ の項より、境界条件が

$$Q n_i = \bar{Q}_i \quad \text{or} \quad u_3 = (u_3)_i \quad (28)$$

$$M n_i = \bar{M}_i \quad \text{or} \quad \theta = \theta_i \quad (29)$$

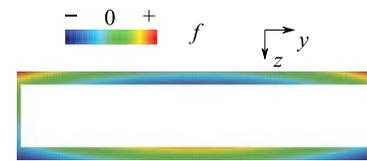
$$D n_i = \bar{D}_i \quad \text{or} \quad g = g_i \quad (30)$$

により与えられる。ここに、下付き $i = 1, 2$ はそれぞれ $x_1 = 0, \ell$ における諸量を意味し、 $n_1 = -1, n_2 = 1$ である。

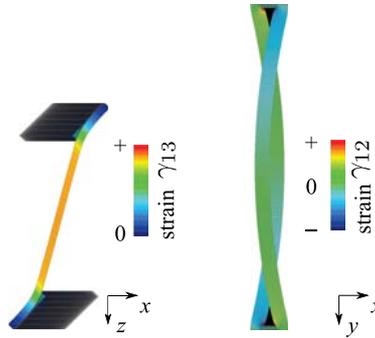
3. 均質箱断面梁による検証

(1) 問題設定

せん断遅れと横せん断による断面変形が曲げに対して無視できない影響をおよぼす典型的な部材として、図-2に示す単一材料の箱断面の梁を選択し、提案した梁理論の精度を検証する。箱断面の寸法は幅 $b = 80$ 、高さ $h = 20$ 、ウェブ厚 $t_w = 1$ 、フランジ厚 $t_f = 3$ とした。材



(a)



(b)

(c)

図-3 箱断面梁の代表体積要素のせん断変形

料は等方弾性体とし、Young 率は $E = 1$ 、Poisson 比はゼロ（せん断弾性係数は $G = 0.5$ ）とした。この断面の幅と高さの比は冒頭で述べた長大橋の補剛桁で採用されるものと同じ程度である。

この箱断面梁に対して、式 (1) で定義される本提案梁理論で採用する変位場に必要断面変形モード $f(x_2, x_3)$ を求めるために、文献¹⁷⁾に基づき有限要素離散化した代表体積要素に単位の横せん断変形を与えた。代表体積要素は 1 辺 0.5 の寸法の立方体形状の 1 次 6 面体アイソパラメトリック要素を用いて離散化した。断面当たりの要素数は 2,032 となった。

代表体積要素の解析結果として得られる x_2, x_3 各点の軸方向変位が f である。得られた f の分布を図-3に示す。同図 (a) は x_2 - x_3 面で見た代表体積要素であり、色は f 、すなわち軸方向変位を表す。この f を用いて式 (10) に示すパラメタ R_i を評価した。なお、パラメタ R_i に含まれる f の導関数は、有限要素におけるひずみと同様の手順により要素内の物性評価点 (Gauss 点) で評価可能であり、面積分も Gauss 積分によって行った。同図 (b) は x_1 - x_3 面で見た代表体積要素の変形であり、色は γ_{13} を示す。箱断面のウェブ部分が x_2 軸周りに回転しているように見えるが、上フランジが x_1 の負の方向に、下フランジが正の方向にせん断遅れ変形していることで断面全体としては回転がゼロとなっている。また、この箱断面は上下フランジがウェブに比較して厚いが、フランジ断面はほぼ剛体回転しており、横せん断ひずみ γ_{13} もゼロに近い。同図 (c) は x_1 - x_2 面で見た代表体積要素の変形であり、色は γ_{12} を示す。単純な箱断面であるため、上下フランジに見られるせん断遅れ変形は Reissner³⁾ が仮定した放物線に近い。この代表体積

表-1 箱断面梁の断面のパラメタ

$K_b/E\lambda^4$	3.550×10^4
$K_s/G\lambda^2$	254.0
$R_2/E\lambda^4$	1.374×10^3
$R_3/G\lambda^2$	241.4
$R_4/G\lambda^2$	-241.4

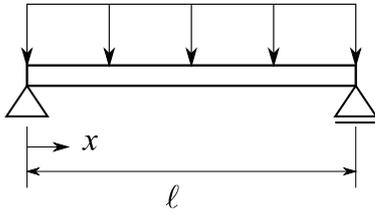


図-4 等分布荷重を受ける単純梁

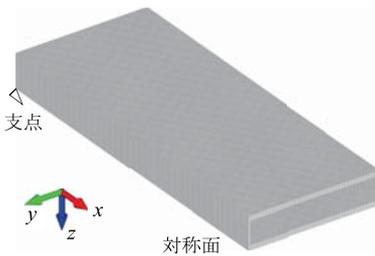


図-5 単純梁の有限要素モデル (参照解用)

要素の解析により得られた f から決定される断面パラメタを表-1に示す. 表中の値は Young 率 E , せん断弾性係数 G と単位長さ λ でそれぞれ無次元化した. なお, 図-3では $x_1-x_2-x_3$ 座標を $x-y-z$ で表示しており, 以降の図も同様とする.

図-4に示す単純支持梁の境界値問題を考え, 通常連続体ソリッド要素による数値解析結果を参照解とする. 本提案手法による解³を参照解と比較しその精度・妥当性を評価する. 支間長 $l = 400$ とし, 細長比は約 48 である. 比較対象としたソリッド要素によるモデルを図-5に示す. 支間中央断面に対する対称性を利用し 1/2 モデルとした. 要素寸法は代表体積要素と同じ 1 辺 0.5 の立方体とし, 総要素数は 812,800 要素である. 分布荷重はウェブに相当する要素に物体力として载荷した. ヒンジ支点は支点上の全ての節点を x_3 方向に拘束してモデル化した. 対称条件は対称面上のすべての節点を x_1 方向に拘束してモデル化した.

(2) たわみと軸ひずみの軸方向分布

本手法と参照解および Euler-Bernoulli 梁によるたわみ \bar{w} を図-6に示す. たわみは Euler-Bernoulli 梁による支間中央のたわみで無次元化している. なお, 参照解

³ 対応する境界値問題の本手法による解析解を付録 I に記した.

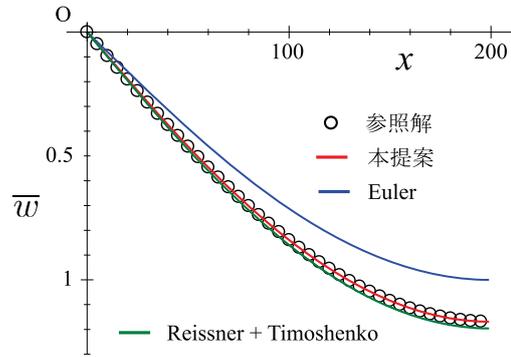


図-6 箱断面梁のたわみ

表-2 箱断面梁のたわみ相対差の比較

	本手法	Timoshenko (Cowper)	Reissner + Timoshenko
支間中央	2.0×10^{-5}	-1.2×10^{-2}	2.3×10^{-2}
L^2	4.3×10^{-5}	1.2×10^{-2}	2.4×10^{-2}

のたわみは断面の平均たわみ

$$w(x_1) = \frac{1}{A} \int_A u_3(x_1, x_3) dA \quad (31)$$

である. また, 同図には Reissner の方法によりせん断遅れを考慮した梁のたわみ (Timoshenko 梁の横せん断によるたわみを含む⁴) も比較のために示している. 径間中央の最大たわみで, 参照解は Euler-Bernoulli 梁に対して 17% 程度大きい. 図中には示していないが, Timoshenko 梁の結果も含めたたわみの参照解との相対差比較を表-2にまとめた. ここで, 相対差 L^2 ノルムは, 各手法による解 β_p と参照解 β_s との差の L^2 ノルムを参照解の L^2 ノルムで無次元化し

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p - \beta_s)^2 dx_1}{\int_L (\beta_s)^2 dx_1}} \quad (32)$$

と定義した. 参照解との差で比較すると, 径間中央たわみと L^2 ノルムの双方で, 本手法は Timoshenko 梁や Reissner の方法の 200 分の 1 以下程度であり, 参照解に対する精度が最も良かった. Reissner の方法の精度が Timoshenko 梁に対して改善していない理由は, Reissner の方法ではフランジが非常に薄いという仮定を用いているが, 本例題ではフランジ厚が断面高さに対して 15% と薄いいためであると考えられる.

本手法と参照解および Euler-Bernoulli 梁⁵と Reissner による軸ひずみ $\bar{\epsilon}$ を図-7に示す. 同図は引張側フラン

⁴ せん断補正係数は Cowper¹¹⁾ による係数を用いた.

⁵ 軸ひずみの評価において, Euler 梁と Timoshenko 梁は等価である.

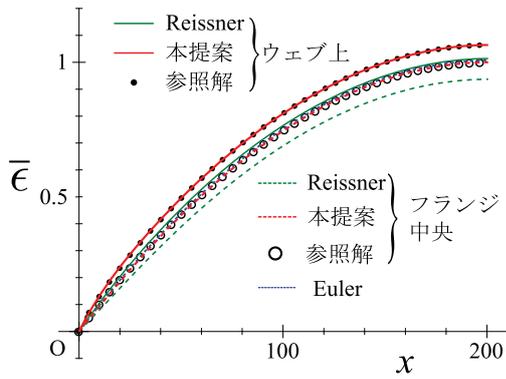


図-7 箱断面梁の軸ひずみ

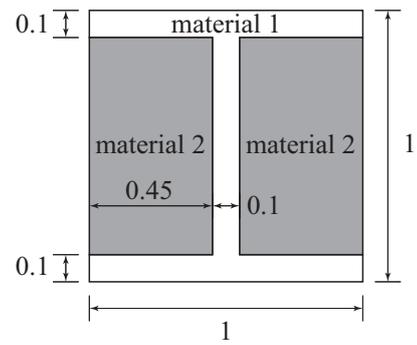


図-8 非均質断面

表-3 箱断面梁下フランジの軸ひずみ相対差の比較 (支間中央)

	本手法	Euler 梁	Reissner
中央	2.1×10^{-6}	6.8×10^{-3}	-6.3×10^{-2}
端部	2.3×10^{-7}	-5.8×10^{-2}	-4.8×10^{-2}

表-4 非均質断面梁の断面のパラメタ

$K_b/E\lambda^4$	4.497×10^{-2}
$K_s/G\lambda^2$	0.1404
$R_2/E\lambda^4$	3.470×10^{-4}
$R_3/G\lambda^2$	9.770×10^{-2}
$R_4/G\lambda^2$	-9.770×10^{-2}

ジの橋軸直角方向中央と端部（ウェブ外側）のそれぞれにおいて軸ひずみの軸方向分布を示している。フランジの板厚方向の位置は最外縁であり、該当する要素内の平均値を採用した。これらのひずみ評価点の位置は図-2にも示した。軸ひずみは、本手法においては式(3)により求めた。Euler 梁は橋軸直角方向には一樣なので橋軸直角方向位置による区別はない。それぞれの軸ひずみは Euler 梁の支間中央の軸ひずみにより無次元化している。フランジのせん断遅れにより、橋軸直角方向中央部の軸ひずみは Euler 梁の軸ひずみよりわずかに（参照解で 0.7%程度）小さく、橋軸直角方向端部（ウェブ上）で 6%大きい。本手法による解は参照解と図においてほぼ重なっている。一方、Reissner による解は、ひずみが端部で大きく中央部で小さいというせん断遅れの定性的な傾向は表現できているが、全体的にひずみを過小評価している。ここで、支間中央における、参照解を基準とした相対差を表-3に示す。Euler 梁はせん断遅れを考慮していないので相対差が大きくなるのは当然であるが、Reissner による解も Euler 梁に対して定量的には精度を改善できていない。それに対して、本手法は相対差 10^{-6} という良い精度で参照解を再現できた。

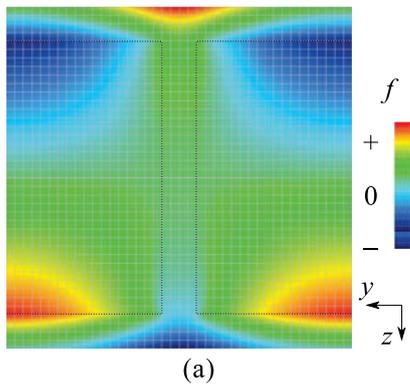
4. 非均質断面梁による検証

(1) 問題設定

図-8に示す非均質断面の梁に対して本提案手法の妥当性と精度を検証する。ともに等方弾性体の材料 1, 2 の Young 率を E_1, E_2 とし、 $E_2 = E_1 \times 10^{-3}$ とした。

Poisson 比は材料 1, 2 ともにゼロとした（せん断弾性係数は $G_i = E_i/2$ ($i = 1, 2$))。このような非均質断面は、鉄骨鉄筋コンクリート (SRC) 部材に見られる。本例ではコンクリートに相当する材料 2 の剛性をやや誇張して小さくしているが、これは、せん断遅れと横せん断が同程度に生じることを意図した。この非均質断面梁は、著者らの過去の文献¹⁶⁾にてせん断剛性評価を行っているが、せん断遅れを拘束することで精度の良いせん断剛性が評価できたと報告している。本論文では、せん断遅れと横せん断の断面変形を統一的に扱える梁理論を提案しているので、せん断遅れを拘束せずに文献¹⁷⁾と同じ断面回転の定義を用いて代表体積要素に一樣せん断変形を与えた。

代表体積要素は文献¹⁶⁾と同様に縦横 40 分割し、断面あたり 1,600 要素の立方体形状の 6 面体 1 次アイソパラメトリック要素を用いてモデル化した。図-9に代表体積要素の一樣せん断変形を示す。図-9(a)は x_2-x_3 面で見た代表体積要素であり、色は f 、すなわち軸方向変位の分布を示す。この図から上下縁付近がせん断遅れ変形していることが確認できる。同図 (b)は x_1-x_3 面で見た代表体積要素の変形であり、色は γ_{13} を示す。この図からは剛性の小さい材料 2 の x_1-x_3 面でのせん断変形（横せん断変形）が大きいことが確認できる。一方、上下縁にある材料 1 の領域はほぼ剛体回転しており、横せん断ひずみ γ_{13} はゼロに近い。同図 (c)は x_1-x_2 面で見た代表体積要素の変形であり、色は面内せん断ひずみ γ_{12} を示す。この図の変形と面内ひずみひずみ分布からも断面の上下端付近がせん断遅れ変形していることが確認できる。この代表体積要素の解析により得られ



(a)

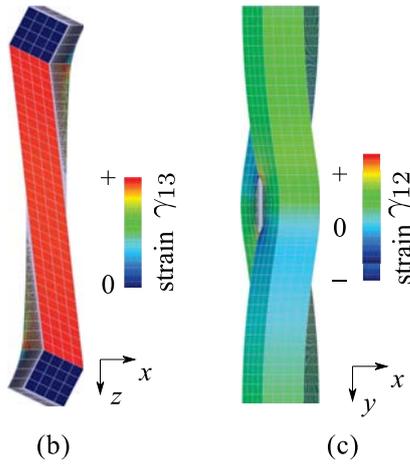


図-9 非均質断面梁の一様せん断変形

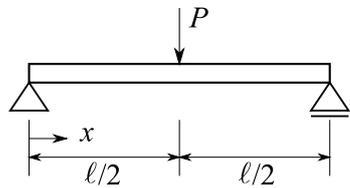


図-10 集中荷重を受ける単純支持梁の境界値問題

た f から決定される断面パラメタを表-4に示す. 表中の値は材料1のYoung率と単位の長さでそれぞれ無次元化した.

図-10に示す単純支持梁の境界値問題を考え, 前章と同様に通常の連続体ソリッド要素による数値解析結果を参照解として, 本提案手法による解を比較しその精度・妥当性を評価する. 支間長 $l = 5$ とし, 細長比は約 12.5である. 支間中央断面に対する対称性を利用し 1/2モデルとした. 要素寸法は代表体積要素と同じ 1辺 0.025の立方体とし, 総要素数は 160,000要素である. 支点および対称条件のモデル化は, 前章と同様であり, 荷重は対称面上のすべての節点に x_3 方向の強制変位を与えることでモデル化した. この問題の 1/2モデルは, 先端に集中荷重を受ける片持梁と等価になる. 本手法の対応する境界条件における解析解を付録IIに記した.

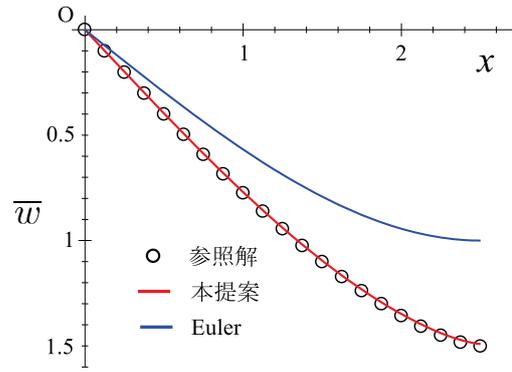


図-11 非均質断面梁のたわみ

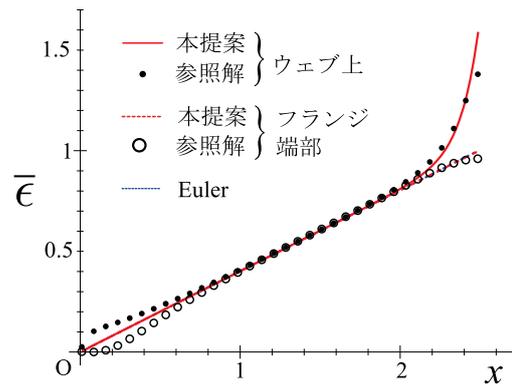


図-12 非均質断面梁の軸ひずみ

(2) たわみと軸ひずみの軸方向分布

本手法と参照解および Euler-Bernoulli 梁によるたわみ \bar{w} を図-11に示す. たわみは Euler-Bernoulli 梁による支間中央のたわみで無次元化し, 左支点から対称面である支間中央までを示している. なお, 参照解のたわみは断面の平均たわみである. 径間中央の最大たわみで, 参照解は Euler-Bernoulli 梁に対して 50%程度大きい. 本手法によるたわみの参照解との相対差は, 集中荷重載荷点の支間中央におけるたわみで 7.4×10^{-3} , L^2 ノルムで 6.7×10^{-3} であった.

本手法と参照解および Euler-Bernoulli 梁による軸ひずみ $\bar{\epsilon}$ を図-12に示す. 参照解の軸ひずみは材料1をI形断面と考えたときのフランジの鉛直 (x_3) 方向最も外側の要素で, かつ幅 (x_2) 方向の中央 (ウェブ上) と端部の2箇所を示している. 本手法においては, 式(3)により参照解と同じ位置で求めた. Euler 梁は参照解と同じ高さで評価した. それぞれの軸ひずみは Euler 梁の支間中央の軸ひずみにより無次元化している. フランジのせん断遅れにより, フランジ端部の軸ひずみは Euler 梁の軸ひずみよりわずかに (参照解で 0.7%程度) 小さく, 中央 (ウェブ上) で 6%大きい. 本手法による解は参照解との全体的な傾向を表現できている. 載荷点付近では図からもやや差があることがわかるが, 載荷点

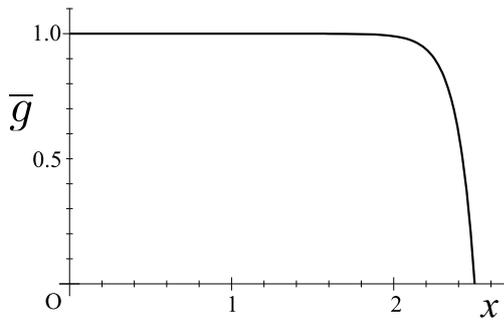


図-13 非均質断面梁の断面変形 \bar{g}

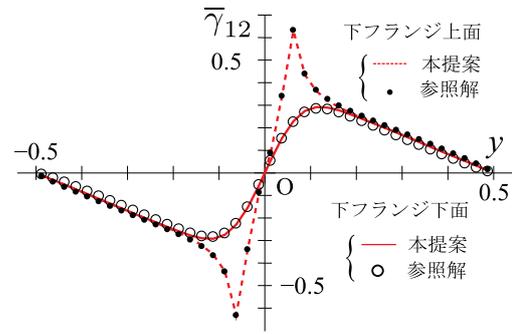


図-15 非均質断面梁下フランジの面内せん断変形 $\bar{\gamma}_{12}$

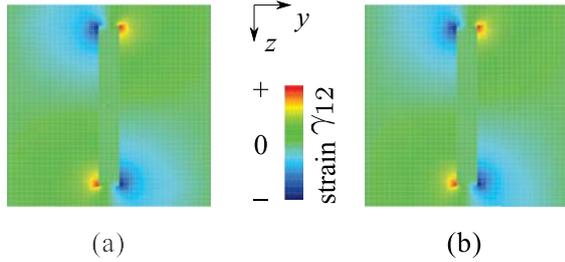


図-14 非均質断面梁の面内せん断変形 γ_{12} 分布

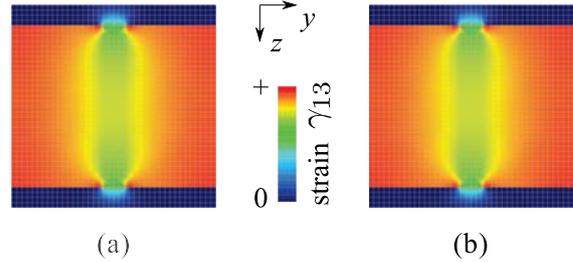


図-16 非均質断面梁の面内せん断変形 γ_{13} 分布

に最も近い要素から支点に向かって 15%, 8%, 4%の相対差があったが、それ以降は 3%以下となっていた。一方、支点付近において本手法の解と参照解の差が認められるが、参照解の変形を確認したところ、 x_2 方向の伸縮変形がみられた。これは、梁の端部で断面の変形が自由となっていることから、本手法で考慮していない断面変形モードが現れたためであると考えられる。

次に、本手法により得られた断面変形に関する一般化変位 g の軸方向分布を図-13に示す。 g は Timoshenko 梁のせん断ひずみ $\frac{P}{2K_{seq}}$ で無次元化した⁶。中央に集中荷重を受ける単純支持梁の左半分のせん断力は正で一定なので、この図から、断面変形は基本的に梁のせん断力 Q に比例することがわかる。一方、支間中央の集中荷重載荷点においてせん断力が不連続に変化するが、断面変形 g は連続である必要があるため、荷重載荷点のごく近傍で連続的にゼロへと変化している。また、式(3)から、軸方向ひずみ ϵ_{11} の断面変形による影響は g の導関数に比例する。図-13の荷重点付近の g の変化と図-12の荷重点付近の ϵ_{11} の変化が対応している。

(3) 断面内のひずみ分布

図-14に $x_1 = 1.5$ の断面⁷における面内せん断ひずみ γ_{12} 分布を示す。同図 (a) は参照解、(b) は本手法による解である。本手法による解は式(4)と代表体積要素の数

値解析から求めた $f(x_2, x_3)$ による。式(4)より、面内せん断変形は断面変形に関する一般化変位 g そのものに比例する。同図 (a) と (b) より、上下フランジ付近においてせん断遅れ変形による面内せん断ひずみが断面中央に対して反対称に生じており、本手法と参照解のひずみ分布は定性的に一致していることがわかる。次に、本手法による解の定量的な比較のため、図-15に同断面における下フランジの最も外側（下フランジ下面）の要素と最も内側（下フランジ上面）の要素の面内せん断ひずみ分布の x_2 方向分布を示す。なお、面内ひずみ γ_{12} は $\frac{P}{2K_{seq}}$ で無次元化している。本手法の解の参照解に対する相対差は、参照解がもっとも大きい点において 2.5%、 x_2 方向に積分した L^2 ノルムでは下フランジ上下面でそれぞれ 3.2%、5.4%であった。

図-16に $x_1 = 1.5$ の断面における横せん断ひずみ γ_{13} 分布を示す。同図 (a) は参照解、(b) は本手法による解である。本手法の解は式(5)と代表体積要素の数値解析から求めた $f(x_2, x_3)$ により求めた。式(5)より、横せん断変形も面内せん断変形と同じく断面変形に関する一般化変位 g そのものに比例する。同図 (a) と (b) より、上下フランジに横せん断変形はほとんど生じておらず、上下フランジの間、特に材料 2 において横せん断変形が支配的となっていることがわかる。本手法と参照解はこのようなひずみ分布において定性的に一致している。図-17に同断面における x_2 方向最も外側の要素と x_2 方向中央（ウェブ中央）の要素の横せん断ひずみ γ_{13} 分布

⁶ K_{seq} は梁の等価せん断剛性であり、式 (I.12) で定義した。

⁷ 参照解はソリッド要素の要素値であるため、正確には $x_1 = 1.5$ の支点側にある要素（要素中心座標 $x_1 = 1.4875$ ）の結果であり、本手法の結果もこの座標における結果である。

付録 I 等分布荷重を受ける単純梁の解析解

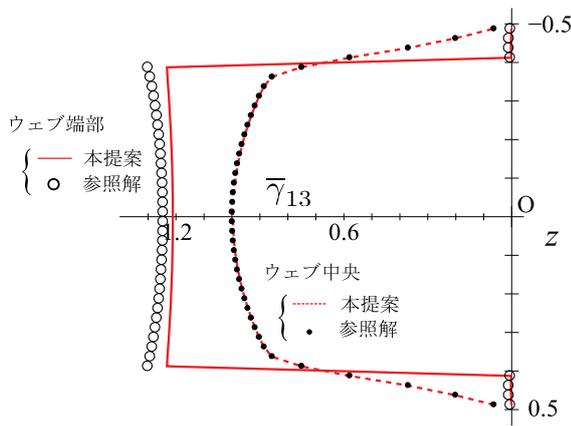


図-17 非均質断面梁の横せん断変形 γ_{13}

の x_3 方向分布を示す. なお, γ_{13} は $\frac{P}{2K_{seq}}$ で無次元化している. 本手法の解の参照解に対する相対差は, 参照解がもっとも大きい点において -5.3% , x_3 方向に積分した L^2 ノルムではウェブ端部・中央でそれぞれ 3.6% , 2.1% であった.

5. おわりに

本論文では, 梁のせん断遅れ変形と横せん断変形による断面変形を統一的に考慮可能な梁理論を構築した. 提案した梁理論には3つの付加的な断面特性が必要となるが, 著者らが過去に発表した均質化法を梁に適用した代表体積要素の数値解析により付加的な断面特性を数値的に得る方法を具体的に示した.

幅の広い(径間長の1/5)均質箱断面梁に対して本理論を適用し, 連続体要素による数値解析結果を参照解とし, 結果を比較した. その結果, たわみに関して著者らの過去の結果¹⁶⁾と比較して精度が改善されることを示した. せん断遅れ変形の影響を受ける軸ひずみに関しても, 参照解を精度よく再現できることを確認した.

剛性差の大きい (10^3) 2材料からなる非均質断面梁に対しても本手法を参照解と比較した. 本手法の解の参照解に対する相対差は, たわみに関しては1%未満程度であった. 軸ひずみやせん断ひずみに関しては相対差は5%程度であったが, 非均質断面に特有の複雑な変形状を再現することができた.

謝辞: 本研究の一部は JSPS 科研費 15K14017 (代表: 齊木 功), 18K04318 (代表: 齊木 功) の助成および日本鉄鋼連盟鋼構造研究支援助成を受けたものです.

単純支持の境界条件は

$$\begin{aligned} M(0) &= 0, & M(\ell) &= 0, \\ u_3(0) &= 0, & u_3(\ell) &= 0, \\ D(0) &= 0, & D(\ell) &= 0 \end{aligned} \tag{I.1}$$

である. 最後の2式は支点で断面変形の拘束がないことを意味する.

モーメントのつり合いより

$$M(x) = \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \tag{I.2}$$

を得る. 曲げモーメントと支配方程式(16)より

$$K_b\theta'' = \frac{q\ell}{2} - qx \tag{I.3}$$

を得る. せん断力のつり合い式(17)より断面の平均的な横せん断変形を

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{K_s} \left(\frac{q\ell}{2} - qx - R_4g \right) \tag{I.4}$$

と表すことができる. 上式と支配方程式(18)から断面変形に関する一般化変位 g は

$$g'' - k^2g = \frac{R_4}{K_s R_2} \left(\frac{q\ell}{2} - qx \right) \tag{I.5}$$

と表される. ここに

$$k^2 := \frac{R_3}{R_2} - \frac{(R_4)^2}{K_s R_2} \tag{I.6}$$

とした⁸⁾. 上式の一般解は

$$g = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + \frac{qR_4}{k^2 K_s R_2} \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \tag{I.7}$$

である. ここに, e は Napier 数, c_i は積分定数である. D に関する境界条件より, 積分定数が⁸⁾

$$c_1 = -\frac{qR_4}{K_s R_2 k^3 (e^{k\ell} + 1)}, \quad c_2 = \frac{qR_4 e^{k\ell}}{K_s R_2 k^3 (e^{k\ell} + 1)} \tag{I.8}$$

と決定できる.

式(I.2)を考慮して式(24)を積分すると断面の回転角

$$\theta = \frac{q}{K_b} \left(\frac{\ell x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + c_3 \right) \tag{I.9}$$

を得る. ここに c_3 は積分定数である. 式(I.7)で求められた g を用いると, 式(I.4)により

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \frac{q}{K_s} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) - \frac{R_4}{K_s} \left(c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + \frac{R_4 q (x - \ell/2)}{K_s R_3 - (R_4)^2} \right) \\ &= \frac{q}{K_{seq}} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) - \frac{R_4}{K_s} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) \end{aligned} \tag{I.10}$$

⁸⁾ $k^2 \geq 0$ であることは Cauchy-Schwarz の不等式

$$\int_a^b g(x)^2 dx \int_a^b h(x)^2 dx \geq \left(\int_a^b g(x)h(x) dx \right)^2$$

において $g(x) = \sqrt{G}$, $h(x) = \sqrt{G(f_2^2 + f_3^2)}$ とおくことで確認できる. $f_2 \equiv 0$ かつ $f_3 \equiv 0$ のとき $k^2 = 0$ となるが, この場合は断面変形がないということであり, 本理論は Timoshenko 梁理論と一致する.

となるので, $\theta = \tilde{\gamma} - u'_3$ より

$$u'_3 = \frac{q}{K_b} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{4} - c_3 \right) + \frac{q}{K_{\text{seq}}} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) - \frac{R_4}{K_s} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) \quad (\text{I.11})$$

を得る. ここに

$$K_{\text{seq}} := K_s - \frac{(R_4)^2}{R_3} \quad (\text{I.12})$$

と定義した. 式 (I.11) を積分すると

$$u_3 = \frac{q}{K_b} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{\ell x^3}{12} - c_3 x \right) + \frac{q}{K_{\text{seq}}} \left(\frac{\ell x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{R_4}{kK_s} (c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx}) + c_4 \quad (\text{I.13})$$

を得る. 積分定数 c_3, c_4 は u_3 に関する境界条件より

$$c_3 = -\frac{\ell^3}{24}, \quad c_4 = -\frac{q(R_4)^2}{k^4(K_s)^2 R_2} \quad (\text{I.14})$$

と定まる. なお, たわみを表す式 (I.13) の右辺の第 1 項は Euler-Bernoulli 梁の曲げによるたわみ, 第 2 項は平均的な横せん断変形によるたわみ, 第 3 項以降は断面変形に起因するたわみである. せん断変形によるたわみは, K_{seq} がせん断補正係数 κ を含むせん断剛性 κGA と等価であると考えれば Timoshenko 梁のせん断によるたわみとなる.

付録 II 集中荷重を受ける片持ち梁の解析解

単純支持の中央に 1 つの集中荷重を受ける梁は, 対称条件を考慮すると自由端に集中荷重を受ける片持ち梁と等価である. $x = 0$ で埋込支持され $x = \ell$ の自由端に集中荷重 P を受ける片持ち梁の境界値問題の境界条件は

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0, & M(\ell) &= 0, \\ u_3(0) &= 0, & Q(\ell) &= P, \\ g(0) &= 0, & D(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

である. 最後の 2 つは埋込支点での断面変形がゼロであること, および自由端で断面変形の拘束がないことを意味する.

$M(\ell)$ および $Q(\ell)$ に関する境界条件より

$$M(x) = Px - P\ell \quad (\text{II.2})$$

を得る.

$M = K_b \theta'$ および $q = 0$ を考慮し, 上式を式 (22) に代入すると

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{K_s} (P - R_4 g) \quad (\text{II.3})$$

となる. 上式を式 (18) に代入すると

$$g'' - k^2 g = \frac{R_4 P}{K_s R_2} \quad (\text{II.4})$$

となる. 上式の一般解は

$$g = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} - \frac{PR_4}{k^2 K_s R_2} \quad (\text{II.5})$$

である. g および D に関する境界条件より, 積分定数は

$$c_1 = \frac{PR_4 e^{-k\ell}}{2k^2 K_s R_2 \cosh(k\ell)}, \quad c_2 = \frac{PR_4 e^{k\ell}}{2k^2 K_s R_2 \cosh(k\ell)} \quad (\text{II.6})$$

となる.

式 (24) を積分すると

$$\theta = \frac{1}{K_b} \left(\frac{Px^2}{2} - P\ell x \right) + c_3 \quad (\text{II.7})$$

を得る. θ に関する境界条件より

$$c_3 = 0 \quad (\text{II.8})$$

となる. 式 (II.5) で求められた g を用いると, 式 (II.3) により

$$\tilde{\gamma} = \frac{P}{K_s} - \frac{R_4}{K_s} \left(c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} - \frac{PR_4}{k^2 K_s R_2} \right) \quad (\text{II.9})$$

となるので, $\theta = \tilde{\gamma} - u'_3$ より

$$u'_3 = \frac{P}{K_b} \left(-\frac{x^2}{2} + \ell x \right) + \frac{P}{K_{\text{seq}}} - \frac{R_4}{K_s} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) \quad (\text{II.10})$$

を得る. 式 (II.10) を積分するとたわみ

$$u_3 = \frac{P}{K_b} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{\ell x^2}{2} \right) + \frac{Px}{K_{\text{seq}}} - \frac{R_4}{kK_s} (c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx}) + c_4 \quad (\text{II.11})$$

を得る. u_3 に関する境界条件より, 積分定数が

$$c_4 = -\frac{P(R_4)^2}{(K_s)^2 R_2} \frac{\sinh(k\ell)}{k^3 \cosh(k\ell)} \quad (\text{II.12})$$

と決定される.

参考文献

- 1) 早坂俊広, 渡邊英彦, 向田 昇, 竹田竜一, 小橋朋和, 池田大樹: 気仙沼大島大橋の計画・設計, 橋梁と基礎, Vol.52, No.1, pp.27-32, 2018.
- 2) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説 II 鋼橋・鋼部材編, 2017.
- 3) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, Vol.4, No.3, pp.268-278, 1946.
- 4) Song, Q. and Scordelis, A. C.: Shear-lag analysis of T-, I-, and box beams, *J. Struc. Eng.*, Vol.116, pp.1290-1305, 1990.
- 5) 齊木 功, 鎌 一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫: 非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価, 土木学会応用力学論文集, Vol.15, pp.161-169, 2012.
- 6) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法, 土木学会論文集 A2, Vol.71, No.2, pp.I.11-I.18, 2015.
- 7) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化, 土木学会論文集 A2, Vol.72, No.2, pp.I.53-I.62, 2016.
- 8) Luo, Q. Z., Li, Q. S. and Tang, J.: Shear lag in box girder bridges, *J. Bridge Eng.*, ASCE, Vol.7, pp.308-313, 2002.
- 9) 齊木 功, 西井大樹, 山本剛大: 任意断面梁のせん断遅れを考慮できる梁要素, 日本計算工学会論文集, Vol.2018, p.20180013, 2018.
- 10) Timoshenko, S. P.: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Phil. Magazine*, Vol.41, pp.744-746, 1921.

- 11) Cowper, G. R.: The shear coefficient in in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, ASCE, Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 12) Renton, J. D.: Generalized beam theory applied to shear stiffness, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.27, pp.1955-1967, 1991.
- 13) Hutchinson, J. R.: Shear coefficients for Timoshenko beam theory, *J. Appl. Mech.*, ASCE, Vol.68, pp.87-92, 2001.
- 14) Gruttmann, F. and Wagner, W.: Shear correction factors in Timoshenko's beam theory, *Comp. Mech.*, Vol.27, pp.199-207, 2001.
- 15) Dong, S. B., Alpdogan, C. and Taciroglu, E.: Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.47, pp.1651-1665, 2010.
- 16) 齊木 功, 新井晃朋, 山本剛大, 岩熊哲夫: 非均質断面梁のせん断剛性評価に関する一考察, 土木学会論文集 A2, Vol.73, No.2, pp.I.23-I.31, 2017.
- 17) 齊木 功, 藤本竜太, 山本剛大: 非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察, 土木学会論文集 A2, Vol.74, pp.I.3-I.11, 2018.
- 18) 齊木 功, 鄭 勳, 山本剛大: 断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.75, pp.I.3-I.12, 2019.

(Received June 18, 2020)

(Accepted November 20, 2020)

A BEAM THEORY WITH CROSS-SECTIONAL DEFORMATION DUE TO BOTH SHEAR LAG AND TRANSVERSE SHEAR

Isao SAIKI and Xun ZHENG

Shear lag and transverse shear in beams have been studied separately so far. The research on shear lag has taken cross-sectional deformation into account since its early stage. On the other hand, most of the research on transverse shear has devoted itself to determine the shear correction factor and has rarely considered the cross-sectional deformation. The authors have developed a beam theory that explicitly takes into account the cross-sectional deformation of transverse shear. On the basis of this theory, this paper proposes a beam theory that can take into account the cross-sectional deformations due to shear lag and transverse shear in a unified manner. A numerical method for determining the cross-sectional parameters required for the proposed beam theory is presented and comparison of solutions of the proposed theory with finite element solutions using continuum elements confirms the validity of the proposed beam theory.