

断面変形を考慮した梁要素と 連続体要素の接続に関する検討

星屋美優¹・斉木 功²・山本剛大³

¹学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

²正会員 東北大学大学院准教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail: isao.saiki.a4@tohoku.ac.jp (Corresponding Author)

³正会員 東北大学大学院特任准教授 工学研究科航空宇宙工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01)

構造解析において、対象構造や部材の形状により連続体要素と梁要素の両方を用いることにより計算効率を向上することができる場合がある。しかし、薄肉断面や複合断面のような断面変形が無視できない部材においては、平面保持を仮定した梁要素を連続体要素に接続すると、両要素間の接続部での変位場の不整合から、接続部での応力や変形の解析精度が低下することが知られている。この問題の原因である変位場の不整合を解決するために、均質化法を梁に適用することで、せん断遅れや横せん断変形などの断面変形の考慮を可能とした梁要素を連続体要素と接続することを提案する。提案手法により異種要素を接続したモデルの解を連続体要素のみを用いたモデルの解と比較することで、提案手法の妥当性と精度を確認した。

Key Words: shear lag, cross-sectional deformation, finite element method, combined modeling

1. はじめに

橋梁等の構造物の有限要素解析において、梁要素を使うと連続体要素を使ったときに比べモデル全体の自由度を低減することができる。しかしながら、アーチ橋における補剛桁とアーチの剛結部やラーメン橋の梁と柱の剛結部、桁橋における支点部などでは梁理論の変位場では再現できない局所的な変形が生じる。これにより、梁要素のみでモデル全体を作成すると、剛結部や支点部の局所的な変形により解析の精度が低下する。そこで、局所的な変形が生じる部分を連続体要素で、断面が一樣である部分は梁要素を用いてモデル化することで、連続体要素のみでモデル化した場合よりも自由度を低減し、計算コストを抑えることができる。

アーチ系橋梁や斜張橋等の比較的規模の大きな橋梁では、薄肉の箱形断面を用いることが多いようである。特に補剛桁は支間に比べ幅員が大きくなる。このような幅広薄肉断面部材では、フランジ部に発生する面内せん断応力によって、せん断遅れ変形が発生する。また、ウェブ部でも面外せん断により断面変形が生じる。構造解析で通常用いられる初等梁理論では断面変形を無視した平面保持を仮定しているが、せん断遅れや面外せん断変形が発生すると、初等梁理論によって求められる橋軸方向直応力よりも大きな応力が主桁部に生じ、その分布も断面内で一定ではない。さらに、幅広薄肉断面の構造物を初等梁理論に基づく梁要素と連続体要素を多点拘束法^{1),2)}により接続してモデル化すると、

接続部の断面が平面に拘束されるため、接続部の応力の解析精度が低下することが知られている。

これらの問題を解決するために以下のような研究が行われてきた。連続体要素と梁要素の自由度の不整合を解決するためのアプローチとして、遷移要素³⁾と呼ばれる異なる自由度を有する要素を接続する特殊な要素を導入する手法⁴⁾が提案されている。また、変分法的定式化に基づくアプローチとして、Nitsche法を用いた研究^{5),6),7),8)}が行われている。Nitsche法は接続部での表面力による仕事がゼロになる条件を用いて、変位のみならず応力の連続性を課す手法である。他の変分法的定式化に基づくアプローチとして、変位と断面の回転のみ連続させる *varlinks*⁹⁾が提案されている。これによれば梁要素の変位場に起因する断面変形の過剰な拘束を連続体要素が受けることがないが、断面変形の連続性は考慮することができない。

梁の断面変形はせん断遅れや横せん断といった要因ごとに研究がなされている。せん断遅れの初期の研究は、Reissner¹⁰⁾によりなされた。Reissnerはフランジの軸方向変位分布を2次関数として近似し、せん断遅れの程度を表す自由度を追加した梁理論を定式化している。その後、軸方向変位分布を高次化・高精度化する試みがChang and Yun¹¹⁾、Song and Scordelis¹²⁾、Evans and Ahmad¹³⁾によって行われた。近年ではProkić¹⁴⁾やLuo et al.¹⁵⁾により、Reissnerの手法で導入したせん断遅れの程度を表す自由度を他の変位とともにそのまま離散化する数値解析が提案されている。著者らのグループも

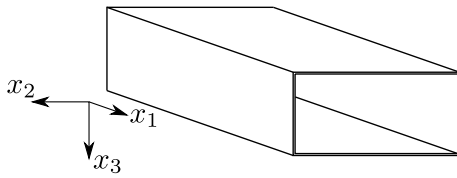


図-1 正規直交座標系の設定

均質化法を梁理論に適用し¹⁶⁾、代表体積要素によって断面変形モードを数値的に求める半解析的手法^{17),18)}や、断面変形の自由度を組み込んだ梁要素¹⁹⁾を提案した。

横せん断については、直接的に断面変形をモデル化せず、断面変形の結果生じる応力の分布を考慮した研究が Cowper²⁰⁾によってなされた。近年では梁断面に特化した有限要素離散化により断面変形を求める方法²¹⁾も提案されている。著者らのグループも梁の代表体積要素に剛体回転拘束を組み込むことにより、断面変形を数値的に評価する方法を提案している^{22),23)}。横せん断による断面変形を直接的に考慮した研究としては、梁ではないが複合板に対する Reddy の研究²⁴⁾が挙げられる。著者らも前述した代表体積要素により求めた断面変形を独立自由度として考慮する梁理論を提案した²⁵⁾。

本論文では、著者らが開発した梁の均質化法によりせん断に伴う断面変形を考慮した梁要素を連続体要素と接続する方法を提案する。接続する梁要素には断面変形を考慮しているので、基礎的な拘束条件式を用いた接続法を用いても従来の初等梁を接続するときのような断面変形の拘束による解析精度の低下を低減できると考えた。提案手法の妥当性を、連続体要素のみで求めた数値解と比較することで確認する。

2. 梁の変位場

図-1に示すように、橋軸方向を x_1 、橋軸直角水平方向を x_2 、鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する。 x_2 軸まわりの曲げと x_3 軸まわりの曲げは独立であるため、本論文では x_1 - x_3 面内の2次元問題の定式化を示す。そのため、 x_1 、 x_3 方向の変位のみを考慮し、 x_2 方向の変位は発生しないものとする。

(1) 断面変形を考慮した梁の変位場

著者らの既発表の文献^{17),18)}で提案されている梁の変位場を要約する。梁の断面内の任意の点における軸方向 (x_1 方向) の変位 u_1 を、断面の重心部の x_1 方向変位 u_1^b 、断面の回転 θ^b および断面変形を表す一般化変位 g^b による変位の和として

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1^b(x_1) + x_3 \theta^b(x_1) + f(x_2, x_3) g^b(x_1) \quad (1)$$

と表す。ここで、 $f(x_2, x_3)$ はせん断による断面のゆがみ変位の分布を表す関数であり、周期境界条件のもとで

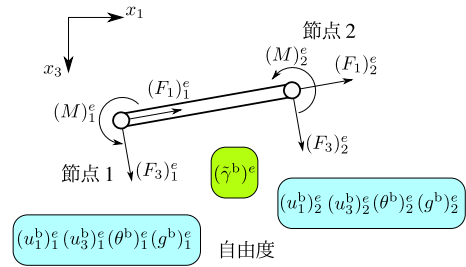


図-2 断面変形を考慮した梁要素の自由度

梁の代表体積要素にせん断変形を与えた際の断面の任意の点の x_1 方向変位とする²⁵⁾。また、 $\theta^b = \bar{\gamma}^b - \frac{du_3^b}{dx_1}$ は断面の回転角、 $\bar{\gamma}^b$ は梁の断面の平均せん断ひずみである。また、鉛直方向 (x_3 方向) の変位 u_3 は

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^b(x_1) \quad (2)$$

と表し、断面内で一様とする。

(2) Timoshenko 梁の変位場

梁の断面内の任意の点における軸方向 (x_1 方向) の変位 u_1 を、断面の重心部の x_1 方向変位 u_1^b および断面の回転 θ^b による変位の和として

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1^b(x_1) + x_3 \theta^b(x_1) \quad (3)$$

と表す。また、鉛直方向 (x_3 方向) の変位 u_3 は

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^b(x_1) \quad (4)$$

と表し、断面内で一様とする。

3. 梁要素

図-1に示すような正規直交座標系を考え、すべての要素において、 x_1 、 x_3 方向の変位のみを考慮し、 x_2 方向の変位は発生しないものとする。

(1) 断面変形を考慮した梁要素

図-2に示すように、断面変形を考慮した梁は1要素あたり2節点で構成されており、1節点あたり x_1 方向変位 u_1^b 、断面の回転 θ^b 、断面変形を表す一般化変位 g^b および x_3 方向変位 u_3^b の4つの自由度を持つ¹⁹⁾。また、梁の断面の平均せん断ひずみ $\bar{\gamma}^b$ を要素中心値 (要素自由度) として持つ。この要素の要素剛性方程式は、要

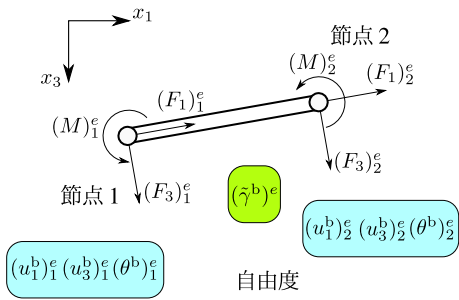


図-3 Timoshenko 梁要素の自由度

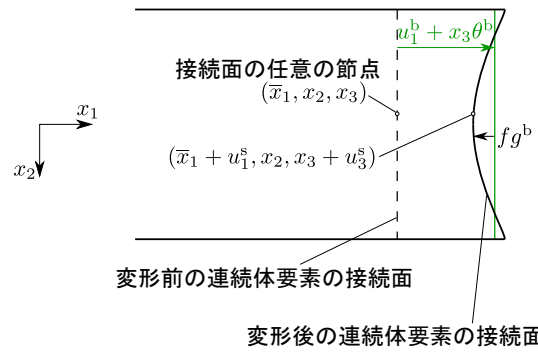


図-4 断面変形を考慮した梁との接続面 (x1-x2 面)

素自由度 $\tilde{\gamma}^b$ を静的縮約すると

$$\mathbf{K}_e \begin{Bmatrix} (u_1^b)_1^e \\ (u_3^b)_1^e \\ (\theta^b)_1^e \\ (g^b)_1^e \\ (u_1^b)_2^e \\ (u_3^b)_2^e \\ (\theta^b)_2^e \\ (g^b)_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (F_1)_1^e \\ (F_3)_1^e \\ (M)_1^e \\ (F_g)_1^e \\ (F_1)_2^e \\ (F_3)_2^e \\ (M)_2^e \\ (F_g)_2^e \end{Bmatrix} \quad (5)$$

と表される. ここで, \mathbf{K}_e は 8×8 の要素剛性行列, $(F_j)_i^e$, $(M)_i^e$ は要素節点力で, $(F_j)_i^e$ は x_j 方向の力, $(M)_i^e$ は x_2 軸周りのモーメントである. また, $(F_g)_i^e$ は g^b と仕事をする一般化力である²⁵⁾.

(2) Timoshenko 梁要素

図-3 に示すように, Timoshenko 梁要素は 1 要素あたり 2 節点で構成されており, 1 節点あたり x_1 方向変位 u_1^b , 断面の回転 θ^b および x_3 方向変位 u_3^b の 3 つの自由度を持つ. また, 梁の断面の平均せん断ひずみ $\tilde{\gamma}^b$ を要素自由度として持つ. 要素剛性方程式は, $\tilde{\gamma}^b$ を静的縮約すると

$$\mathbf{K}_e^t \begin{Bmatrix} (u_1^b)_1^e \\ (u_3^b)_1^e \\ (\theta^b)_1^e \\ (u_1^b)_2^e \\ (u_3^b)_2^e \\ (\theta^b)_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (F_1)_1^e \\ (F_3)_1^e \\ (M)_1^e \\ (F_1)_2^e \\ (F_3)_2^e \\ (M)_2^e \end{Bmatrix} \quad (6)$$

と表さる. ここに, \mathbf{K}_e^t は 6×6 の要素剛性行列である.

4. 梁要素と連続体要素の接続手法

断面変形を考慮した梁要素と Timoshenko 梁要素の連続体要素との接続は変位の拘束条件式を使った多点拘束法で行う.

(1) 断面変形を考慮した梁要素と連続体要素の接続

断面変形を考慮した梁要素と連続体要素を $x_1 = \bar{x}_1$ の位置で接続するために, 図-4, 5 に示すように, 連続体

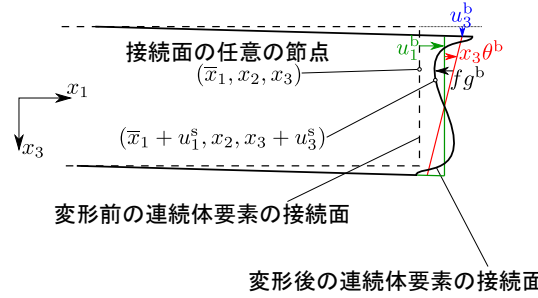


図-5 断面変形を考慮した梁との接続面 (x1-x3 面)

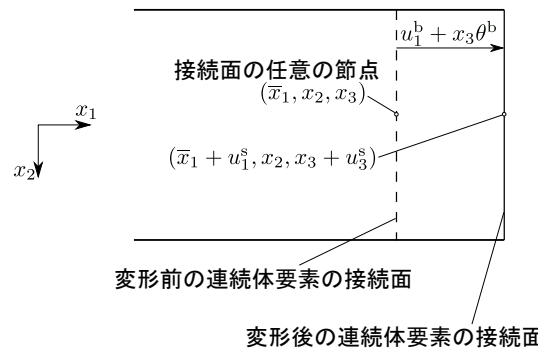


図-6 Timoshenko 梁との接続面 (x1-x2 面)

要素の接続断面の各節点の x_1 方向変位 u_1^s , x_3 方向変位 u_3^s を

$$\left. \begin{aligned} u_1^s(\bar{x}_1, x_2, x_3) &= u_1^b(\bar{x}_1) + x_3 \theta^b(\bar{x}_1) \\ &\quad + f(x_2, x_3) g^b(\bar{x}_1) \\ u_3^s(\bar{x}_1, x_2, x_3) &= u_3^b(\bar{x}_1) \end{aligned} \right\} \forall (x_2, x_3) \in \Gamma_c \quad (7)$$

の 2 つの拘束条件式を用いて梁要素の自由度に従属させる. ここで, f は連続体要素と同じ要素分割で得られており, Γ_c は連続体要素の接続部の断面における節点座標の集合である.

(2) Timoshenko 梁要素と連続体要素の接続

Timoshenko 梁要素と連続体要素を $x_1 = \bar{x}_1$ の位置で接続するために, 図-6, 7 に示すように, 連続体要素の

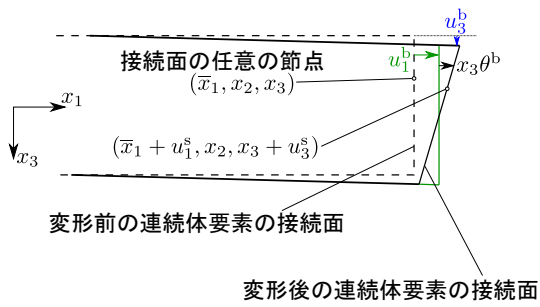


図-7 Timoshenko 梁との接続面 (x_1 - x_3 面)

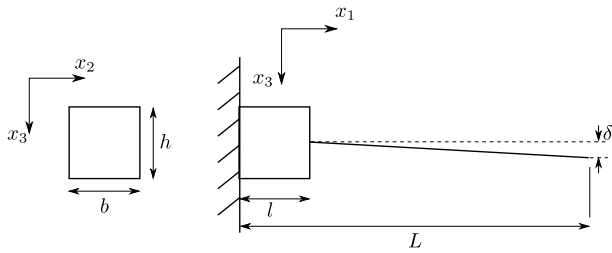


図-8 先端集中荷重を受ける片持ち梁

接続断面の各節点の x_1 方向変位 u_1^s , x_3 方向変位 u_3^s を

$$\left. \begin{aligned} u_1^s(\bar{x}_1, x_2, x_3) &= u_1^b(\bar{x}_1) + x_3 \theta^b(\bar{x}_1) \\ u_3^s(\bar{x}_1, x_2, x_3) &= u_3^b(\bar{x}_1) \end{aligned} \right\} \forall (x_2, x_3) \in \Gamma_c \quad (8)$$

の 2 つの拘束条件式を用いて梁要素の自由度に従属させる。

5. 先端集中荷重を受ける片持ち梁による検証

先端に集中荷重を受ける均質矩形断面の片持ち梁を用いて提案手法の検証を行う。図-8 に対象とする梁の断面および問題の境界条件を示す。幅 $b = 1$ m, 高さ $h = 1$ m, 長さ $L = 5$ m とし, 固定端から $l = 1$ m を連続体要素, その先を梁要素とした。本研究で提案する断面変形を考慮した梁要素と連続体要素の接続モデル(本手法), Timoshenko 梁要素と連続体要素を接続したモデル(従来手法)を作成し, 連続体要素のみを用いた参照解と解析結果を比較する。材料は等方線形弾性体, Young 率は $E = 2.0 \times 10^{11}$ N/m², Poisson 比は $\nu = 0$ とした。連続体要素は, 断面を 1 辺 64 分割 (0.015625 m) の立方体とし, 梁要素の要素長は x_1 方向に 0.5 m とし, Timoshenko 梁要素のせん断補正係数は $\kappa = \frac{5}{6}$ とした。固定端 ($x_1 = 0$ m) ではすべての節点を全方向に拘束し, $x_1 = 5$ m に位置する節点すべてに x_3 方向の強制変位 $\delta = 0.01$ m を与えた。

計算時間および総節点数を表-1 に示す。本手法および従来手法によるモデルの節点数は参照解のモデルの節点数の $\frac{1}{5}$ 程度であり, 計算時間は $\frac{1}{18}$ ないし $\frac{1}{16}$ 程度であった。なお計算時間は Intel Core i7-8700 を搭載

表-1 計算時間と節点数(片持ち梁)

	計算時間 [s]	総節点数 連続体+梁
参照解	2,149.75	1,356,225 + 0
本手法	118.10	270,400 + 9
従来手法	136.87	270,400 + 9

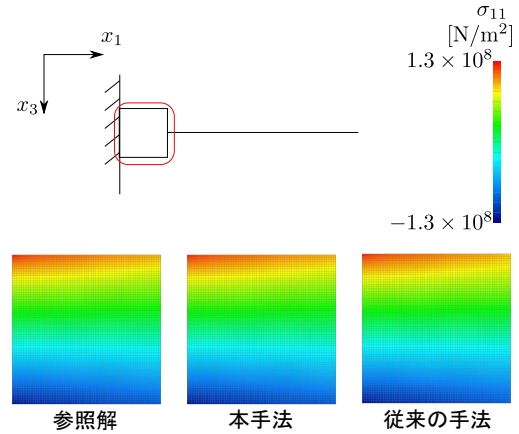


図-9 連続体要素部分の σ_{11} の分布

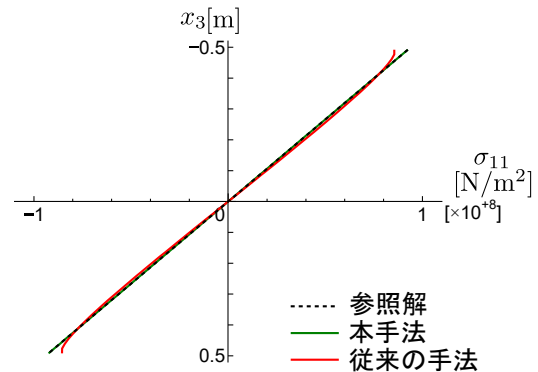


図-10 接続部の σ_{11} の x_3 方向分布

した計算機および疎行列直接解法を用いた場合の一例であり, 本論文の他の解析例においても同様である。

固定端から $l = 1$ m の間の連続体要素部分の直応力 σ_{11} の分布を図-9 に示す。連続体要素部分の直応力の分布は本手法, 従来手法ともに参照解と定性的に一致している。

接続部 ($x_1 = 1$ m) の連続体要素の直応力 σ_{11} の x_3 方向分布を図-10 に示す。従来手法では上下縁で参照解に対する再現性が低下しているが, それに比べて本手法は全域にわたり参照解に対する再現性が改善されていることが確認できる。また, 相対誤差 L^2 ノルムは, 従来手法で 3.60×10^{-2} であるのに対し, 本手法では 8.23×10^{-6} と改善した。なお, 本手法および従来手法の解 β_p と参照解 β_a との差の L^2 ノルムを参照解の L^2

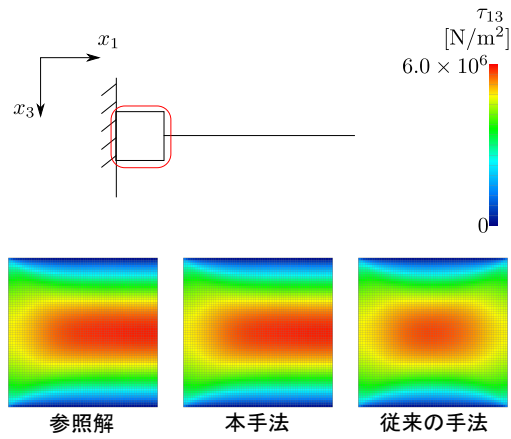


図-11 連続体要素部分の τ_{13} の分布

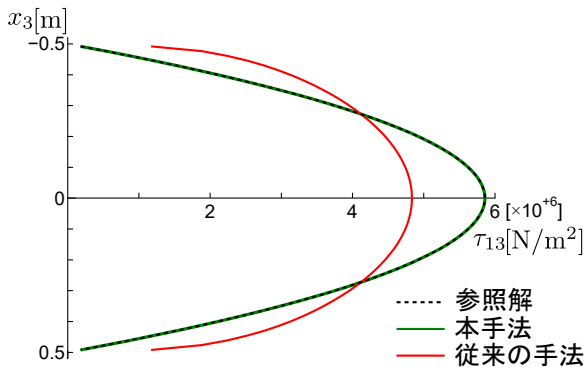


図-12 接続部の τ_{13} の x_3 方向分布

ノルムで無次元化した値

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p - \beta_a)^2 dL}{\int_L (\beta_a)^2 dL}} \quad (9)$$

を相対誤差 L^2 ノルムとして定義する。

固定端から $l = 1$ m の間の連続体要素部分の x_1 - x_3 面のせん断応力 τ_{13} の分布を図-11に示す。せん断力一定なので、参照解は固定端で断面変形が拘束されている点の近傍以外は x_1 方向に一様であることが確認できる。従来手法では、固定端と接続部が同様の応力分布となっており、接続部でも断面変形が拘束されている影響が見られる。それに対し、本手法では参照解に対する定性的な再現性が向上している。

接続部 ($x_1 = 1$ m) の連続体要素の x_1 - x_3 面のせん断応力 τ_{13} の x_3 方向分布を図-12に示す。従来手法では、接続部において断面変形が拘束された影響により接続部の x_1 - x_3 面のせん断応力 τ_{13} の分布が参照解とは異なっているが、本手法では参照解に近い分布となっていることが確認できる。相対誤差 L^2 ノルムは、従来手法で 1.94×10^{-1} であるのに対し、本手法では 8.81×10^{-5} と改善した。

梁上縁の直応力 σ_{11} の x_1 方向分布を図-13に示す。従来手法では接続部付近で応力が不連続となっている

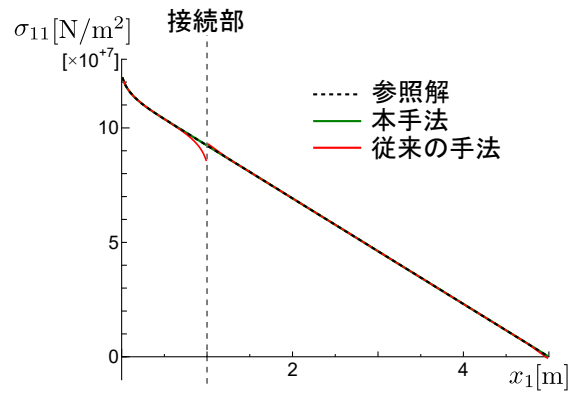


図-13 梁の断面上縁の σ_{11}

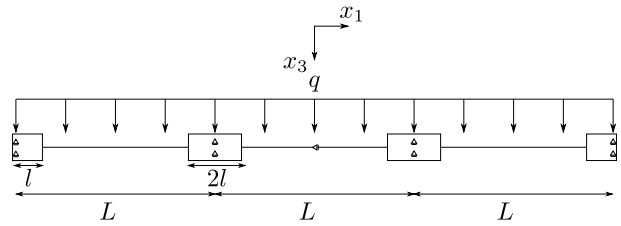


図-14 等分布荷重を受ける連続梁

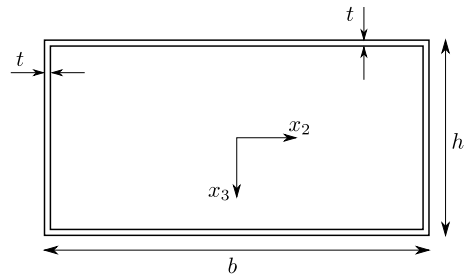


図-15 等分布荷重を受ける連続梁の断面 1

のに対し、本手法では接続部付近でも連続的な応力分布となっていることが確認できる。

6. 等分布荷重を受ける連続梁による検証

図-14に示す等分布荷重を受ける連続梁を用いて提案手法の検証を行う。支間長 $L = 15$ m の3径間連続梁とし、支点部から両側 $l = 2$ m を連続体要素、中間部を梁要素とした。支点部には厚さ $t = 0.02$ m のダイアフラムを設置し、ウェブを x_3 方向に拘束した。荷重は、梁要素で作成した部分には x_1 方向に長さ当たり 1000 N/m の等分布荷重となるように各節点に x_3 方向の等価節点外力を与えた。連続体要素で作成した部分では、 x_1 方向に長さ当たり 1000 N/m の等分布荷重となるようにウェブに x_3 方向の物体力を与えた。ウェブのみに物体力を与えたのは、フランジの板曲げ変形が生じないようにするためである。本研究で提案する断面変形を考慮した梁要素と連続体要素の接続モデル(本手法)、Timoshenko 梁要素と連続体要素を接続したモデル(従

表-2 計算時間と節点数(連続梁・断面1)

	計算時間 [s]	総節点数 連続体+梁
参照解	191.04	1,498,064 + 0
本手法	58.57	511,088 + 333
従来手法	56.87	511,088 + 333

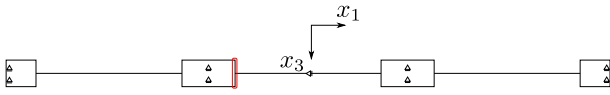


図-16 中間支点付近の接続部 ($x_1 = -5.5$ m)

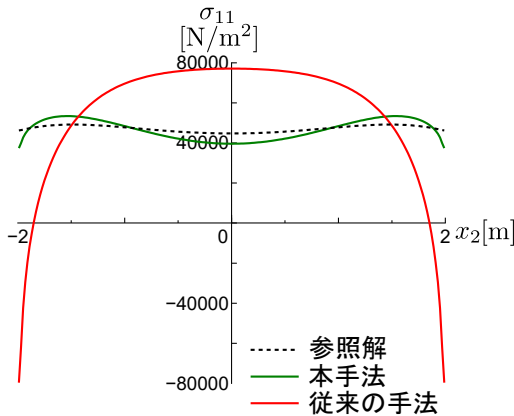


図-17 接続部の上フランジの σ_{11} の x_2 方向分布

来の手法)を作成し、連続体要素のみを用いた参照解と解析結果を比較する。断面の支間に対する寸法比による解析精度の違いを検証するため、2種類の断面を用いて検証を行った。後述する2種類の断面において、材料は等方線形弾性体、Young 率は $E = 2.0 \times 10^{11}$ N/m²、Poisson 比は $\nu = 0$ で共通とする。Timoshenko 梁要素のせん断補正係数の算出は Cowper の式²⁰⁾を用いた。

(1) 薄肉箱断面(断面1)による検証

図-15 に対象とする梁の断面を示す。幅 $b = 4$ m、高さ $h = 2$ m、厚さ $t = 0.02$ m の断面とした。連続体要素の要素長は、 x_2, x_3 方向に 0.02 m、 x_1 方向に 0.04 m、梁要素の要素長は x_1 方向に 0.1 m とした。

計算時間および総節点数を表-2 に示す。本手法および従来手法によるモデルの節点数は参照解のモデルの節点数の $\frac{1}{3}$ 程度であり、計算時間は $\frac{1}{3}$ 程度であった。

中間支点付近の接続部 ($x_1 = -5.5$ m, 図-16) における連続体要素の直応力 σ_{11} の x_2, x_3 方向分布をそれぞれ図-17, 18 に示す。従来手法では上フランジ、ウェブともに端部で参照解との誤差が大きくなっているが、本手法では全域にわたり参照解に対する再現性が改善されていることが確認できる。相対誤差 L^2 ノルムは、

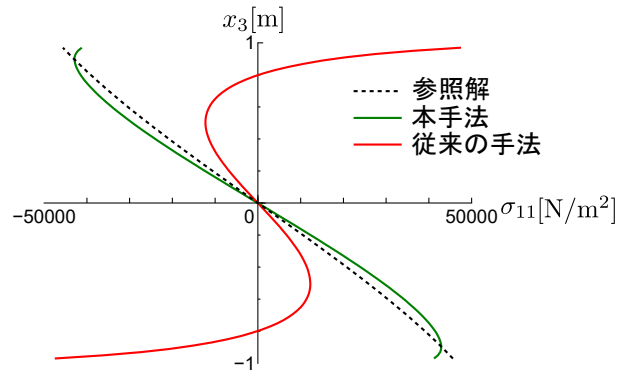


図-18 接続部のウェブの σ_{11} の x_3 方向分布

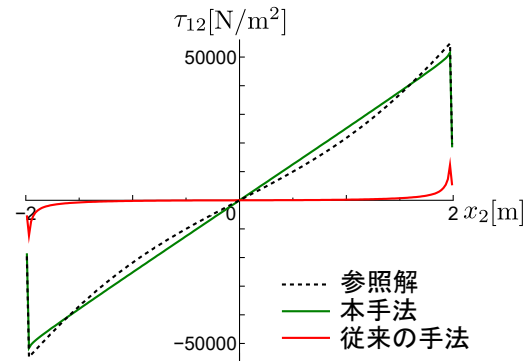


図-19 接続部の上フランジの τ_{12} の x_2 方向分布

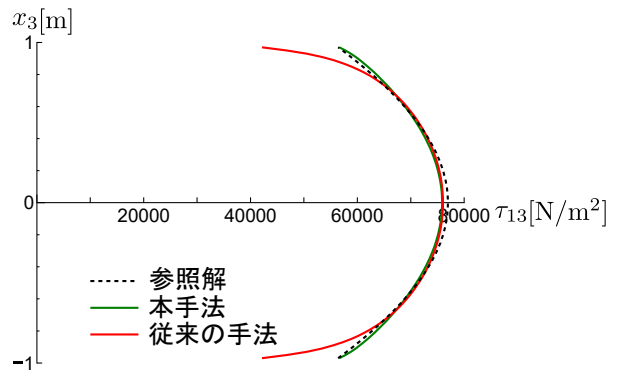


図-20 接続部のウェブの τ_{13} の x_3 方向分布

上フランジ、ウェブでそれぞれ従来手法で 0.705, 1.11 であるのに対し、本手法では 7.39×10^{-2} , 9.68×10^{-2} と改善した。

中間支点付近の接続部 ($x_1 = -5.5$ m) における連続体要素の上フランジの x_1 - x_2 面のせん断応力 τ_{12} の x_2 方向分布を図-19 に示す。従来手法では断面変形が拘束された影響により、 x_1 - x_2 面のせん断応力が参照解に比べかなり小さくなっているが、本手法ではせん断遅れ変形が再現できていることが確認できる。相対誤差 L^2 ノルムは、従来手法で 0.957 であるのに対し、本手法では 8.56×10^{-2} と改善した。

ウェブの x_1 - x_3 面のせん断応力 τ_{13} の x_3 方向分布を図-20 に示す。従来手法では端部で参照解との誤差が

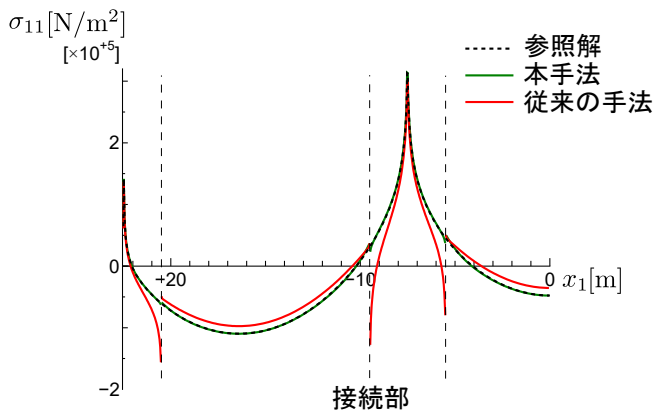


図-21 上フランジ端部の σ_{11}

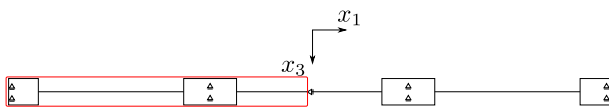


図-22 連続梁の $x_1 < 0$ m 部分

表-3 接続部における接続部応力のジャンプ量

x_1 (m)	-20.5	-9.5	-5.5
本手法	-0.06	0.16	0.28
従来手法	-1.79	1.99	2.82

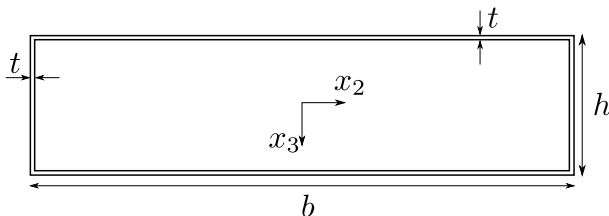


図-23 等分布荷重を受ける連続梁の断面 2

大きくなっているが、本手法では全域にわたり参照解に対する再現性が改善されていることが確認できる。相対誤差 L^2 ノルムは、従来手法で 4.29×10^{-2} であるのに対し、本手法では 1.05×10^{-2} と改善した。

上フランジ端部（ウェブ上）の直応力 σ_{11} の x_1 方向分布を図-21 に示す。なお、解析モデルは x_2 - x_3 面に対称であるため、半分の $x_1 < 0$ m の領域の結果を示す（図-22）。応力は接続部においても連続であるべきだが、従来手法では接続部付近で明らかに不連続となっている。本手法は従来手法と比較して定性的に参照解と一致していることが確認できる。ここで、接続部の参照解の応力で無次元化した接続部応力のジャンプ量を表-3 にまとめた。従来手法に対し、本手法ではジャンプ量を低減できていることが確認できる。

表-4 計算時間と節点数（連続梁・断面 2）

	計算時間 [s]	総節点数 連続体+梁
参照解	501.06	2,990,512 + 0
本手法	87.35	1,052,416 + 333
従来手法	81.61	1,052,416 + 333

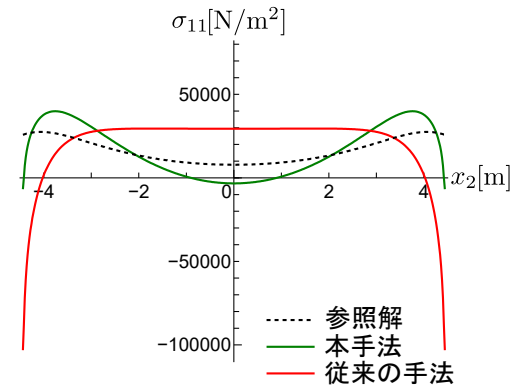


図-24 接続部の上フランジの σ_{11} の x_2 方向分布

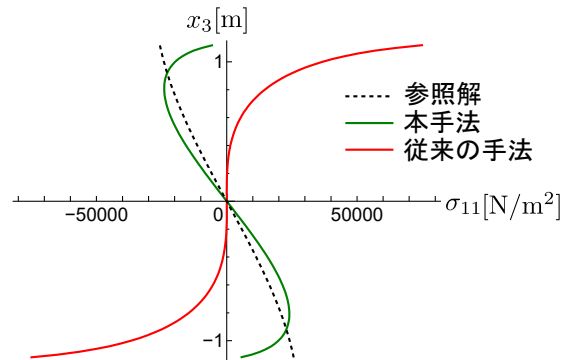


図-25 接続部のウェブの σ_{11} の x_3 方向分布

(2) 薄肉幅広箱断面（断面 2）による検証

図-23 に対象とする梁の断面を示す。幅 $b = 8.9$ m、高さ $h = 2.3$ m 厚さ $t = 0.02$ m の幅広箱断面である。連続体要素の要素長は、 x_2, x_3 方向に 0.02 m、 x_1 方向に 0.04 m、梁要素の要素長は x_1 方向に 0.1 m とした。支間長 $L = 15$ m に対して幅 $b = 8.9$ m と幅広になっている。計算時間および総節点数を表-4 に示す。本手法および従来手法によるモデルの節点数は参照解のモデルの節点数の $\frac{1}{3}$ 程度であり、計算時間は $\frac{1}{6}$ 程度であった。

中間支点部付近の接続部（ $x_1 = -5.5$ m）における連続体要素の直応力 σ_{11} の上フランジの x_2 方向分布を図-24、ウェブの x_3 方向分布を図-25 に示す。断面 1 の結果（図-17, 18）と比較すると本手法の参照解に対する再現性が低下しているものの、従来手法よりは再現性が向上している。相対誤差 L^2 ノルムは、上フラン

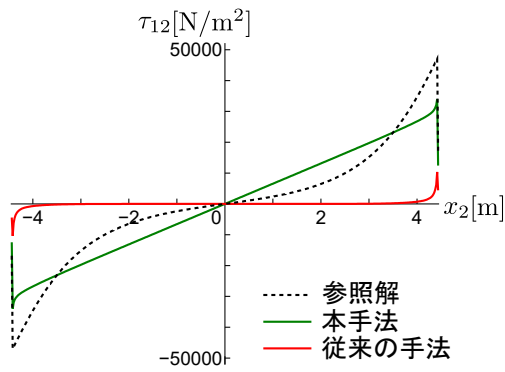


図-26 接続部の上フランジの τ_{12} の x_2 方向分布

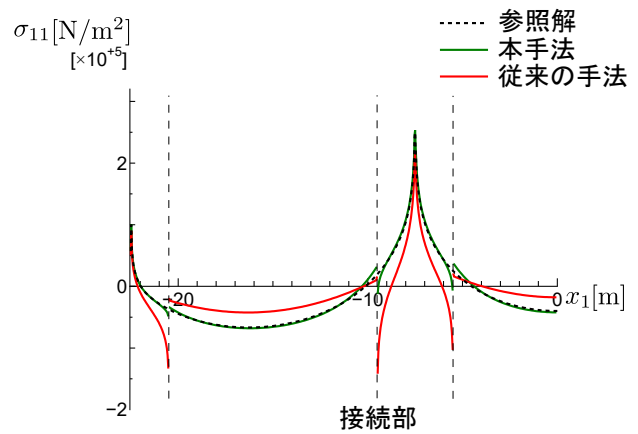


図-28 上フランジ端部の σ_{11}

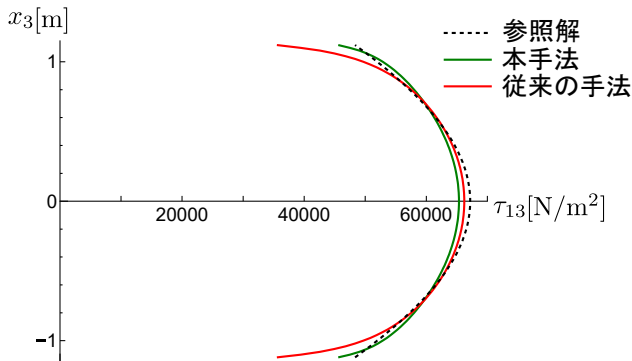


図-27 接続部のウェブの τ_{13} の x_3 方向分布

表-5 接続部における接続部応力のジャンプ量

x_1 (m)	-20.5	-9.5	-5.5
本手法	-0.40	-2.15	1.68
従来の手法	-3.09	-7.79	4.81

ジ、ウェブでそれぞれ従来の手法で 1.42, 2.21 であるのに対し、本手法では 0.516, 0.327 と改善した。

中間支点部付近の接続部 ($x_1 = -5.5$ m) における連続体要素の上フランジの x_1 - x_2 面のせん断応力 τ_{12} の x_2 方向分布を図-26 に示す。本手法では従来の手法と比較して参照解に対する再現性が改善されているが、断面 1 の結果 (図-19) と比較すると参照解に対する再現性が低下していることが確認できる。断面 1 (図-19) では参照解のせん断応力が直線に近い分布となっているが、断面 2 (図-26) では異なる分布となっていることから、本手法で仮定している梁としての変位場では再現できない変形となっていると考えられる。相対誤差 L^2 ノルムは、従来の手法で 0.965 であるのに対し、本手法では 0.324 と改善した。

ウェブの x_1 - x_3 面のせん断応力 τ_{13} の x_3 方向分布を図-27 に示す。従来の手法では端部で参照解との誤差が大きくなっているが、本手法では端部での参照解に対する再現性が改善されている。相対誤差 L^2 ノルムは従来の手法で 3.23×10^{-2} であるのに対し、本手法では 1.91×10^{-2} とやや改善した。

$x_1 < 0$ m の領域の上フランジ端部の直応力 σ_{11} の x_1 方向分布を図-28 に示す。従来の手法では接続部付近で応力が不連続となっているのに対し、本手法では不連続性が緩和されている。接続部の参照解の応力で無次

元化した接続部応力のジャンプ量を表-5 に示す。断面 1 の結果 (表-3) と比較するとジャンプ量は大きくなったが、本手法では従来の手法に対しジャンプ量を低減できている。図-28 より、接続部以外の場所においても、本手法は従来の手法と比較して参照解に対する再現性が向上していることが確認できる。

7. おわりに

本研究では、連続体要素と断面変形を考慮した梁要素を多点拘束法により接続するモデル化手法を提案した。連続体要素と梁要素の接続において本手法を用いることで、充実断面片持ち梁、薄肉断面連続梁のいずれにおいても、従来の手法で問題となっていた接続部付近の応力の精度の低下、および接続部での応力の不連続性を緩和することが確認できた。支間長に対してフランジの幅が大きくなるモデルでは、本手法は従来の手法と比較すると精度は向上するものの、幅が小さい断面を持つモデルと比較すると、精度は低下した。これは、支間に比べある程度より幅が広くなると、本手法で用いている断面変形を考慮した梁要素で表現できる断面変形の範囲を超えた変形となったことが原因であると考えられる。

謝辞：本研究の一部は JSPS 科研費 18K04318 (代表：齊木 功) の助成を受けたものです。

参考文献

- 1) Curiskis, J.I. and Valliappan, S.: A solution algorithm for linear constraint equations in finite element analysis, *Comput. Struct.*, Vol.8, pp.117-124, 1978.
- 2) Liu, G.R. and Quek, S.S.: *The finite element method: a practical course*, 2nd edn., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2013.
- 3) Surana, K.S.: Transition finite elements for three-dimensional stress analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.15, pp.991-1020, 1980.
- 4) Garusi, E. and Tralli, A.: A hybrid stress-assumed transition element for solid-to-beam and plate-to-beam connections, *Comput. Struct.*, Vol.80, pp.105-115, 2002.
- 5) Nguyen, V.P., Kerfriden, P., Brino, M., Bordas, S.P.A. and Bonisoli, E.: Nitsche's method for two and three dimensional NURBS patch coupling, *Comput. Mech.*, Vol.53, pp.1163-1182, 2014.
- 6) 山田貴博, 仲田光秀: Nitsche 法に基づくはり要素とソリッド要素の接続手法, 土木学会論文集 A2, Vol.71, No.2, pp.I.319-I.326, 2015.
- 7) 山本剛大, 山田貴博, 松井和己: Nitsche 法を用いたシェル要素とソリッド要素の接合, 土木学会論文集 A2, Vol.73, No.2, pp.I.177-I.187, 2017.
- 8) Yamamoto, T., Yamada, T. and Matsui, K: Numerical procedure to couple shell to solid elements by using Nitsche's method, *Comput. Mech.*, Vol.63, pp.69-98, 2019.
- 9) Romero, I.: Coupling nonlinear beams and continua: Variational principles and finite element approximations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.114, pp.1192-1212, 2018.
- 10) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by the principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268-278, 1946.
- 11) Chang, S. T. and Yun, D.: Shear lag effect in box girder with varying depth, *J. Struc. Eng.*, Vol.114, pp.2280-2292, 1988.
- 12) Song, Q. and Scordelis, A. C.: Shear-lag analysis of T-, I-, and box beams *J. Struc. Eng.*, Vol.116, pp.1290-1305, 1990.
- 13) Evans, H. R. and Ahmad, M. K. H.: Shear lag in composite box girders of complex cross-sections, *J. Construct. Steel Research*, Vol.24, pp.183-204, 1993.
- 14) Prokić, A.: New finite element for analysis of shear lag, *Comput. Struct.*, Vol.80, pp.1011-1024, 2002.
- 15) Luo, Q. Z., Li, Q. S. and Tang, J.: Shear lag in box girder bridges, *J. Bridge Eng.*, ASCE, Vol.7, pp.308-313, 2002.
- 16) 齊木 功, 鎌 一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫: 非均質な Timoshenko 梁の平均物性評価, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.15, pp.161-169, 2012.
- 17) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法, 土木学会論文集 A2, Vol.71, No.2, pp.I.11-I.18, 2015.
- 18) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化, 土木学会論文集 A2, Vol.72, No.2, pp.I.53-I.62, 2016.
- 19) 齊木 功, 西井大樹, 山本剛大: 任意断面梁のせん断遅れを考慮できる梁要素, 日本計算工学会論文集, Vol.2018, p.20180013, 2018.
- 20) Cowper, G.R.: The shear coefficient in in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, ASCE, Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 21) Gruttmann, F. and Wagner, W.: Shear correction factors in Timoshenko's beam theory, *Comp. Mech.*, Vol.27, pp.199-207, 2001.
- 22) 齊木 功, 新井晃朋, 山本剛大, 岩熊哲夫: 非均質断面梁のせん断剛性評価に関する一考察, 土木学会論文集 A2, Vol.73, pp.I.23-I.31, 2017.
- 23) 齊木 功, 藤本竜太, 山本剛大: 非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察, 土木学会論文集 A2, Vol.74, pp.I.3-I.11, 2018.
- 24) Reddy, J.N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J. Appl. Mech.*, ASCE, Vol.51, pp.745-752, 1984.
- 25) 齊木 功, 鄭 勳, 山本剛大: 断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した梁理論, 土木学会論文集 A2, Vol.75, pp.I.3-I.12, 2019.

(Received June 24, 2020)

(Accepted November 19, 2020)

A STUDY OF CONNECTING SOLID AND BEAM ELEMENTS WITH CROSS-SECTIONAL DEFORMATION

Miyu HOSHIYA, Isao SAIKI and Takeki YAMAMOTO

In structural analysis, depending on the shape of the objective structure and members, the use of both solid elements and beam elements can improve the computational efficiency. However, it is known that the accuracy of stress distribution near connection is deteriorated for the members such as thin-walled cross-sections and composite cross-sections, where cross-sectional deformation cannot be ignored. The reason for the problem is the inconsistency between the displacement fields of the beam element which assumes plane sections remain plane and the solid element. To solve this problem, we propose a method to connect a beam element which allows for the cross-sectional deformation due to shear lag and transverse shear and the solid element. Feasibility of the proposed method is confirmed through a couple of numerical examples by comparing the solution of the method with that of the model with the only solid element.