

断面変形を梁のせん断変形と独立に考慮した 梁理論

斉木 功¹・鄭 勲²・山本 剛大³

¹博士(工) 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

²エム・エムブリッジ株式会社 生産・技術部 (〒 733-0036 広島市西区観音新町 1-20-24)

³博士(工) 東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

せん断変形を考慮する Timoshenko 梁は断面平面保持を仮定する。しかし、断面内のせん断応力は実際には一定ではないので、せん断剛性はせん断補正係数によって修正される。はりのせん断補正係数は、弾性学に基づく方法や有限要素離散化による方法などにより断面変形を求めることで決定される。このような梁理論では断面変形は断面の巨視的なせん断変形に比例すると仮定される。しかし、例えば片持ち梁の支点部ではせん断力が大きくなるが断面変形は拘束される。このように、実際の梁においてはせん断変形と、せん断に伴う断面変形は必ずしも比例しない。そこで本研究では、断面変形を巨視的なせん断変形とは独立に考慮できる梁を定式化し、その影響を定量的に考察した。その結果、本手法は連続体の境界値問題を精度よく再現できること、および断面変形の拘束の影響が梁の高さと同程度の長さ及び高さに及ぶことを明らかにした。

Key Words: shear stiffness, deformation of cross section, homogenized beam, Timoshenko beam

1. はじめに

Timoshenko 梁¹⁾は、Bernoulli-Euler の梁が用いている断面が中立面に対して垂直を保つという仮定を用いないが、断面平面保持は仮定する。したがって、せん断変形は許容するが断面内のせん断ひずみは一定となる。このことから、Timoshenko 梁は 1 次せん断変形梁とも呼ばれる。通常、梁の表面に面内方向の荷重は作用しないので、表面におけるせん断応力はゼロとなる。このことは断面内でせん断変形が一定となるという Timoshenko 梁の仮定と整合しない。その結果、せん断力 Q に対する梁の巨視的なせん断変形(断面内のせん断ひずみの平均) $\bar{\gamma}$ をせん断剛性 K_{seq} を用いて $\bar{\gamma} = \frac{Q}{K_{seq}}$ と表すと、せん断剛性 K_{seq} はせん断弾性係数 G と断面積 A の積とは一致しない。そこで、せん断補正係数 κ を用いて $K_{seq} = \kappa GA$ となるようなせん断補正係数に関する研究が行われた。

古典的な弾性学による均質な矩形断面や円形断面などのせん断補正係数に関する研究は、Timoshenko の時代から近年に至るまで行われている。例えば、Cowper²⁾は変位により断面の回転角を定義し、静的つり合いからせん断補正係数を求めている。また、Renton³⁾は、ひずみエネルギーと外力仕事の等価性から均質断面のせん断補正係数の一般形を導いている。Hutchinson⁴⁾は断面平面保持を仮定し、これによる変位場と応力場の不整合を動的な Hellinger-Reissner の原理により解決する方法を提案している。一方、Levinson は⁵⁾弾性板に対し

て、Reddy⁶⁾は積層板に対して、せん断補正係数を陽に用いずせん断ひずみの断面高さ方向分布を直接的に考慮する方法を提案している。

一方、有限要素法により断面を離散化することでせん断剛性を計算する試みが近年では行われている。Gruttman and Wagner⁷⁾は断面を有限要素離散化し Renton³⁾と同様にエネルギーの等価性からせん断剛性を数値的に求める方法を提案した。Dong et al.⁸⁾も断面を離散化しせん断変形によるそり変位を数値的に求め、そり変位からせん断剛性を評価する方法を提案している。これらの離散化に基づく解析は、任意形状断面の梁のせん断剛性評価を可能としているが、いずれも均質断面のみを対象としている。

非均質断面のせん断剛性評価に関する報告は均質断面ほど多くはなく、Steinboeck et al.⁹⁾により半径方向に非均質な円形断面梁のせん断補正係数が報告されている程度である。著者らは均質化法で定義される代表体積要素に剛体回転拘束を組み込むことにより、非均質断面梁のせん断剛性等の力学的特性を数値的に評価する方法を提案し¹⁰⁾、せん断遅れを数値的に取り扱う方法^{11),12),13)}や非均質断面梁のせん断剛性を数値的に求める方法¹⁴⁾に応用している。さらに、この一連の研究において、Cowper²⁾に代表されるように断面の変位から定義される回転角を用いる場合、非均質断面においては材料の剛性を重みとした平均を用いる必要があることを明らかにした¹⁵⁾。

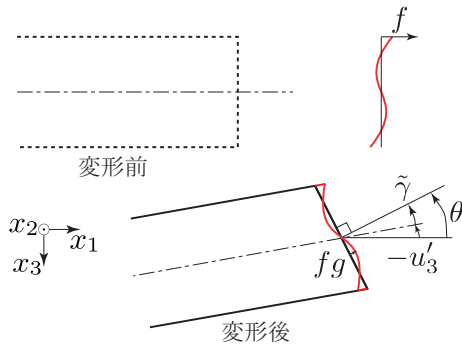


図-1 提案する梁の変位場

以上述べてきたせん断剛性評価に関する既往の研究は、いずれも断面内の一定でないせん断応力の分布を何らかの方法で考慮することでせん断剛性を評価している。弾性体であればせん断応力とせん断ひずみは線形関係にあるため、せん断応力が一定でなければせん断ひずみの分布も一定ではなく、断面は平面を保持せず変形する。本論文では、ここで述べている一定でないせん断ひずみによって断面が平面を保持せずに変形する点に着目し、これをせん断変形に起因する断面変形と定義する¹。一方で、既往の研究ではせん断応力分布は考慮するものの、それによって生じる断面変形は陽に考慮されていない。換言すると、断面変形は作用するせん断力あるいはそれによるせん断変形と線形関係にあることを前提としている。ここで、例えば片持ち梁を考えると、最もせん断力が大きくなる支点において、境界条件により変位が拘束される。また、連続梁の中間支点では支点反力の影響によりせん断力が不連続となるが、変位の連続性から断面変形は連続となる。したがって、断面変形は必ずしもせん断力に比例しない。このような影響がおよぶ範囲は支点の近傍に限定されるかもしれないが、その影響を定量的に評価した研究は著者らの知る限りない。そこで本研究は、断面変形をせん断力・せん断変形とは独立な自由度として考慮する梁理論を定式化し、その影響を数値解析例を通して定量的に評価することを目的とする。

2. 提案する梁の変位場と定式化

正規直交座標系 x_i ($i = 1, 2, 3$) を定義し、図-1 に示すように、梁の軸方向に x_1 軸を設定する。断面は 2 軸対称とし、断面の図心を x_2 および x_3 の原点とする。3 次元梁を対象とするが、 x_1 - x_2 面の変形と x_1 - x_3 面の変形は独立なので、以下では x_1 - x_3 面についてのみ記述する。

¹ Poisson 効果や局部座屈等による断面の断面内の形状の変化も断面変形であるが、ここでは対象外とし、せん断変形に起因する断面変形のみを取り扱う。

梁の断面内の点の軸方向の変位を図-1 に示すように

$$u_1(x_1, x_3) = x_3\theta(x_1) + f(x_3)g(x_1) \quad (1)$$

と表す。上式の右辺第 2 項が通常の Timoshenko 梁に対して本研究で追加された変位場となる。ここで、 θ は断面の回転であり、 f はせん断変形にともなう断面変形に起因する軸方向変位分布、 g は本研究で導入する一般化変位であり、断面変形の大きさを表す。また、断面の回転角と梁の巨視的なせん断変形 $\tilde{\gamma}$ およびたわみ角 u'_3 の関係を $\theta := \tilde{\gamma}(x_1) - u'_3(x_1)$ と定義する。ここで、 $(\cdot)'$ は x_1 に関する導関数である。以上から、変位場を

$$u_1(x_1, x_3) = x_3 \left\{ \tilde{\gamma}(x_1) - u'_3(x_1) \right\} + f(x_3)g(x_1) \quad (2)$$

と表すこともできる。一方、Reddy 梁の変位場^{5),6)} は

$$u_1(x_1, x_3) = x_3 \left\{ \tilde{\gamma}(x_1) - u'_3(x_1) \right\} - \frac{4(x_3)^3}{3h^2} \tilde{\gamma}(x_1) \quad (3)$$

であり、断面変形を表す右辺第 2 項は梁の巨視的なせん断変形 $\tilde{\gamma}$ によって生じる。ここで、 h は梁の断面高さである。また、Polizzotto¹⁶⁾ は変位場を

$$u_1(x_1, x_3) = x_3 \left\{ \tilde{\gamma}(x_1) - u'_3(x_1) \right\} - g_n(x_3)\tilde{\gamma}(x_1) \quad (4)$$

とし、断面変形を表す関数 g_n を

$$g_n(x_3) = \frac{(x_3)^{2n+1}}{(2n+1)(h/2)^{2n}} \quad (5)$$

と任意の次数 n に拡張している。Reddy 梁の支配方程式の誘導については、付録 I に記した。

断面の回転角 θ は、文献¹⁵⁾ に提案されている構成材料の Young 率 E による重み付き平均

$$\theta(x_1) = \frac{\int_A E(x_3)x_3u_1(x_1, x_3) dA}{\int_A E(x_3)x_3^2 dA} \quad (6)$$

を用いる。ここに、積分範囲 A は梁の断面、 $E(x_3)$ は材料の Young 率である。

断面変形に起因する軸方向変位 f は、連続体要素でモデル化した梁の代表体積要素に対して $\theta = 0$ の拘束の下でせん断変形を与えることで数値的に求める^{10),15)}。

式(1)に示した変位場より、軸ひずみ ϵ_1 、面外せん断ひずみ γ_{13} は

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3\theta' + fg' = x_3(\tilde{\gamma}' - u''_3) + fg' \quad (7)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \tilde{\gamma} - u'_3 + f_3g + u'_3 = \tilde{\gamma} + f_3g \quad (8)$$

と表される。ここに、 $(\cdot)_{,3}$ は x_3 に関する導関数を表す。 u_2 、 u_3 は断面内で定数とし、これにより他のひずみ成分はゼロとなる。

解析領域を $V := L \times A$ とし、 x_3 方向の分布荷重 $q(x_1)$ を考慮した仮想仕事式は

$$\int_V E\epsilon_1\delta\epsilon_1 + G\gamma_{13}\delta\gamma_{13} dV = \int_L q\delta u_3 dx \quad (9)$$

と表せる. ここに, $L = \{x_1 | 0 \leq x_1 \leq \ell\}$ は梁の軸方向の解析領域, A は梁の断面, $\delta(\cdot)$ は (\cdot) の仮想ひずみもしくは仮想変位を表す. 上式に式 (7), (8) を代入すると

$$\int_V E \{x_3(\tilde{\gamma}' - u_3'') + fg'\} \{x_3(\delta\tilde{\gamma}' - \delta u_3'') + f\delta g'\} + G(\tilde{\gamma} + f_{,3}g)(\delta\tilde{\gamma} + f_{,3}\delta g) dV = \int_L q\delta u_3 dx \quad (10)$$

を得る. 上式を展開すると

$$\int_V \left\{ Ex_3^2(\tilde{\gamma}' - u_3'')\delta\tilde{\gamma}' - Ex_3^2(\tilde{\gamma}' - u_3'')\delta u_3'' + Ef^2g'\delta g' + G(\tilde{\gamma} + f_{,3}g)\delta\tilde{\gamma} + G(\tilde{\gamma} + f_{,3}g)f_{,3}\delta g \right\} dV = \int_L q\delta u_3 dx \quad (11)$$

となり, さらに断面積分を実行すると, 最終的に

$$\int_L \left\{ K_b\theta' \delta\tilde{\gamma}' - K_b\theta' \delta u_3'' + R_2g'\delta g' + (K_s\tilde{\gamma} + R_4g)\delta\tilde{\gamma} + (R_4\tilde{\gamma} + R_5g)\delta g - q\delta u_3 \right\} dx = 0 \quad (12)$$

を得る. ここに, K_b , K_s はそれぞれ合成断面の曲げ剛性およびせん断剛性, R_i は断面変形に関するパラメタであり

$$\begin{aligned} K_b &:= \int_A E(x_3)^2 dA, & K_s &:= \int_A G dA, \\ R_2 &:= \int_A Ef^2 dA, & R_4 &:= \int_A Gf_{,3} dA \\ R_5 &:= \int_A G(f_{,3})^2 dA \end{aligned} \quad (13)$$

と定義した. また, 前述したように, 断面変形 f による断面の回転はゼロなので, 式 (6) より

$$\int_A x_3Ef dA = 0 \quad (14)$$

であることを用いた.

式 (12) の δu_3 に関する項を取り出し, $\delta u_3''$ を含む項に部分積分を 2 回繰り返して適用すると

$$\left[K_b\theta' \delta u_3 \right]_0^L - \left[K_b\theta' \delta u_3' \right]_0^L - \int_L (K_b\theta''' + q)\delta u_3 dx = 0 \quad (15)$$

を得る. 式 (12) の $\delta\tilde{\gamma}$ に関する項を取り出し, $\delta\tilde{\gamma}'$ を含む項に部分積分を適用すると

$$\left[K_b\theta' \delta\tilde{\gamma} \right]_0^L + \int_L (-K_b\theta'' + K_s\tilde{\gamma} + R_4g)\delta\tilde{\gamma} dx = 0 \quad (16)$$

となる. 式 (12) の δg に関する項を取り出し, $\delta g'$ を含む項に部分積分を適用すると

$$\left[R_2g'\delta g \right]_0^L + \int_L (-R_2g'' + R_4\tilde{\gamma} + R_5g)\delta g dx = 0 \quad (17)$$

を得る. 以上から, 支配方程式は

$$K_b\theta''' + q = 0 \quad (18)$$

$$-K_b\theta'' + K_s\tilde{\gamma} + R_4g = 0 \quad (19)$$

$$-R_2g'' + R_4\tilde{\gamma} + R_5g = 0 \quad (20)$$

となる.

直応力 $\sigma_1 := E\epsilon_1$ と面外せん断応力 $\tau_{13} := G\gamma_{13}$ を定義し, それらによる合力 M , Q , D を

$$\begin{aligned} M &:= \int_A x_3\sigma_1 dA = \int_A x_3E\epsilon_1 dA \\ &= \int_A \{(x_3)^2E\theta' + x_3Ef g'\} dA = K_b\theta' \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Q &:= \int_A \tau_{13} dA = \int_A G\gamma_{13} dA \\ &= \int_A G\{\tilde{\gamma} + f_{,3}g\} dA = K_s\tilde{\gamma} + R_4g \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} D &:= \int_A f\sigma_1 dA = \int_A E\epsilon_1 f dA \\ &= \int_A E\{fx_3\theta + f^2g'\} dA = R_2g' \end{aligned} \quad (23)$$

とする. M は曲げモーメント, Q はせん断力, D は断面変形の大きさ g と仕事共役な一般化力である. 式 (22) と式 (19) より, せん断力は

$$Q = K_b\theta'' = M' \quad (24)$$

と表すこともできる.

式 (15)–(17) の境界 $x_1 = 0, \ell$ の項より, 境界条件が

$$K_b\theta' n_i = C_i \quad \text{or} \quad \theta = \theta_i \quad (25)$$

$$K_b\theta'' n_i = S_i \quad \text{or} \quad u_3 = (u_3)_i \quad (26)$$

$$R_2g' n_i = D_i \quad \text{or} \quad g = g_i \quad (27)$$

により与えられる. ここに, 下付き $i = 1, 2$ はそれぞれ $x_1 = 0, \ell$ における諸量を意味し, $n_1 = -1, n_2 = 1, C$ は外力モーメント, S は鉛直外力, D は断面変形に関する一般化外力である.

3. 等分布荷重を受ける片持ち梁の解析解

等分布荷重 q を受ける片持ち梁に対する支配方程式 (18)–(20) の解析解を以下に示す. 支配方程式は x_1 のみに関する方程式なので, 式が煩雑になるのを避けるために, 以下では x_1 を単に x として示す.

境界条件は

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0, & M(\ell) &= 0, \\ u_3(0) &= 0, & Q(\ell) &= 0, \\ g(0) &= 0, & D(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

である. 最後の 2 つは支定点部での断面変形がゼロであること, および自由端で断面変形の拘束がないことを意味する.

$M(\ell)$ および $Q(\ell)$ に関する境界条件より

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + qlx - \frac{q\ell^2}{2} \quad (29)$$

を得る. $M = K_b\theta'$ を考慮し, 上式を式 (19) に代入すると

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{K_s} (-qx + ql - R_4g) \quad (30)$$

となる．上式を式 (20) に代入すると

$$g'' - k^2 g = \frac{R_4}{K_s R_2} (-qx + q\ell) \quad (31)$$

となる．ここに

$$k^2 := \frac{R_5}{R_2} - \frac{(R_4)^2}{K_s R_2} \quad (32)$$

とした²．上式の一般解は

$$g = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + \frac{qR_4}{k^2 K_s R_2} (x - \ell) \quad (33)$$

である．ここに， e は Napier 数， c_i は積分定数である． g および D に関する境界条件より，積分定数が

$$c_1 = \frac{qR_4}{K_s R_2} \frac{k\ell e^{-k\ell} - 1}{2k^3 \cosh(k\ell)}, \quad c_2 = \frac{qR_4}{K_s R_2} \frac{k\ell e^{k\ell} + 1}{2k^3 \cosh(k\ell)} \quad (34)$$

となる．

式 (21) を積分すると

$$\theta = \frac{1}{K_b} \left(-\frac{qx^3}{6} + \frac{q\ell x^2}{2} - \frac{q\ell^2 x}{2} \right) + c_3 \quad (35)$$

を得る．積分定数 c_3 は θ に関する境界条件より

$$c_3 = 0 \quad (36)$$

と定まる．式 (33) で求められた g を用いると，式 (30) により

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \frac{q}{K_s} (-x + \ell) - \frac{R_4}{K_s} \left(c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + \frac{R_4 q (x - \ell)}{K_s R_5 - (R_4)^2} \right) \\ &= \frac{q}{K_{\text{seq}}} (-x + \ell) - \frac{R_4}{K_s} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) \end{aligned} \quad (37)$$

となるので， $\theta = \tilde{\gamma} - u'_3$ より

$$\begin{aligned} u'_3 &= \frac{q}{K_b} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{2} + \frac{\ell^2 x}{2} \right) + \frac{q}{K_{\text{seq}}} (-x + \ell) \\ &\quad - \frac{R_4}{K_s} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) \end{aligned} \quad (38)$$

を得る．ここに

$$K_{\text{seq}} := K_s - \frac{(R_4)^2}{R_5} \quad (39)$$

と定義した．式 (38) を積分すると

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{q}{K_b} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{\ell x^3}{6} + \frac{\ell^2 x^2}{4} \right) + \frac{q}{K_{\text{seq}}} \left(-\frac{x^2}{2} + \ell x \right) \\ &\quad - \frac{R_4}{kK_s} (c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx}) + c_4 \end{aligned} \quad (40)$$

を得る．積分定数 c_4 は u_3 に関する境界条件より

$$c_4 = \frac{q(R_4)^2}{(K_s)^2 R_2} \frac{1 - k\ell \sinh(k\ell)}{k^4 \cosh(k\ell)} \quad (41)$$

と定まる．なお，たわみを表す式 (40) の右辺の第 1 項は Bernoulli-Euler 梁の曲げによるたわみ，第 2 項はせん断変形によるたわみ，第 3 項以降は断面変形に起因するたわみである．せん断変形によるたわみは， K_{seq} がせ

² $k^2 \geq 0$ であることは Cauchy-Schwarz の不等式

$$\int_a^b g(x)^2 dx \int_a^b h(x)^2 dx \geq \left(\int_a^b g(x)h(x) dx \right)^2$$

において $g(x) = \sqrt{G}$ ， $h(x) = \sqrt{G}f_3$ とおくことで確認できる． $f_3 \equiv 0$ のとき $k^2 = 0$ となるが，この場合は断面変形がないということであり，本理論は Timoshenko 梁理論と一致する．

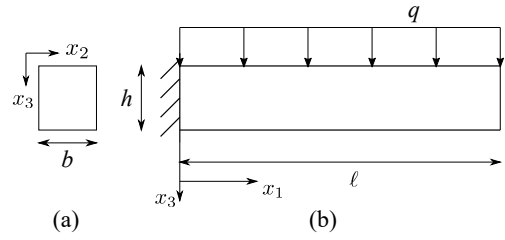


図-2 等分布荷重を受ける均質矩形断面片持ち梁

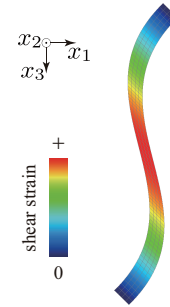


図-3 均質矩形断面梁の代表体積要素のせん断変形

表-1 均質断面梁の断面のパラメタ

K_b	$1.667 \times 10^{10} \text{ Nm}^2$
K_s	$1.000 \times 10^{11} \text{ N}$
R_2	$1.985 \times 10^8 \text{ Nm}^2$
R_4	$-1.666 \times 10^{10} \text{ N}$
R_5	$1.666 \times 10^{10} \text{ N}$

ん断補正係数 κ を含むせん断剛性 κGA と等価であると考えると Timoshenko 梁のせん断によるたわみとなる．

4. 均質矩形断面の片持ち梁における断面変形の影響評価

せん断補正係数が $\kappa = \frac{5}{6}$ とされる均質矩形断面の片持ち梁の曲げせん断問題において，断面変形の影響を評価することを考える．図-2 (a) および (b) に，対象とする梁の断面および問題の境界条件を示す．幅 $b = 1$ とし，せん断変形の影響が大きくなるように，高さ $h = 1$ ，長さ $\ell = 1$ とした．幅は 1 としたが，幅方向は一樣なので結果に影響はない．以下では断りのない限り長さは m，質量は kg，時間は s とする．材料は等方線形弾性体，せん断弾性係数 $G = 1 \times 10^{11}$ ，Young 率 $E = 2G$ とした．

この均質断面の断面パラメタを計算するために，代表体積要素を断面あたり 80×80 要素の立方体形状の 8 節点アイソパラメトリック要素により分割したモデルに文献¹⁵⁾ の方法により回転拘束の下で単位の一様せん断変形を与えた．このときの変形を図-3 に示す．なお，代表体積要素は軸方向に一樣のため，長さに意味はな

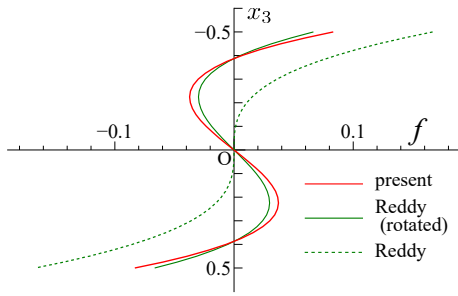


図-4 断面変形に起因する軸方向変位の比較

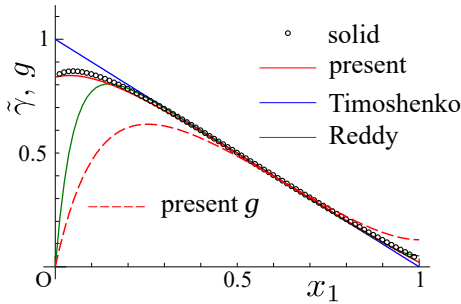


図-5 無次元化した断面のせん断変形

いが4要素分とした．図中，色はせん断ひずみ γ_{13} を表す．この解析により得られた軸方向変位 u_1 を断面変形に起因する軸方向変位 f とし，式(13)で定義した断面のパラメタを数値積分により求めた値を表-1に示す．

以下では比較のために Reddy 梁の結果も示す．Reddy⁶⁾ が用いた断面変形の変位場は式(3)に示す3次関数である．これを本手法の f と比較するために図-4に示す．図中，赤色の実線が本研究で用いている文献¹⁵⁾による f であり，緑色の実線が Reddy の断面変形の変位場，破線は Reddy の断面変形の変位場から回転成分を取り除いたものである．本手法と Reddy による変位場は同様の傾向である．以下，比較のために Reddy 梁の結果を示すが，用いる断面変形の変位場の相違による差と，支配方程式による差を分離するために，Reddy 梁の断面変形の変位場は本手法に用いた f を用いた．なお，支配方程式およびこの問題に対する解析解は付録Iに記した．

本手法と $\kappa = \frac{5}{6}$ とした Timoshenko 梁および本手法の f を断面変形の変位場とした Reddy 梁によるせん断変形 $\tilde{\gamma}$ を図-5に示す．せん断変形は Timoshenko 梁の支点部の値で無次元化している．図中 solid は，本手法の代表体積要素の有限要素モデルと同じ要素を用いた有限要素モデルの解であり，これを参照解とする．なお，参照解のための要素分割は，特に断面変形の再現性を同じ条件で比較するために代表体積要素のモデルと同様とし，断面を 80×80 分割，軸方向も同じ寸法，すなわち 80 分割とした．また，参照解とした有限要素モデルの支点部に相当するすべての節点において3方向の

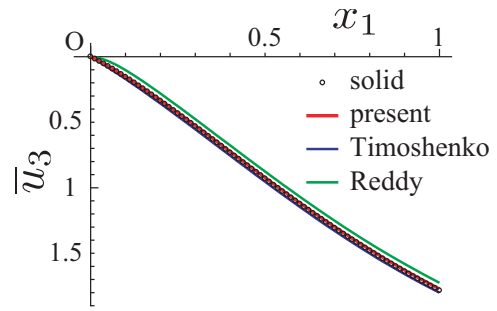


図-6 無次元化したわみ

変位を拘束し，荷重は物体力として与えた．solid のせん断変形は，式(6)に示した文献¹⁵⁾による断面の回転角 θ ，および断面の平均たわみ

$$\tilde{u}_3(x_1) = \frac{1}{A} \int_A u_3(x_1, x_3) dA \quad (42)$$

の中央差分から求めたたわみ勾配 \tilde{u}'_3 を用いて $\tilde{\gamma} := \theta + \tilde{u}'_3$ とした．同図から，Timoshenko 梁ではせん断変形はせん断力が最大となる支点で最も大きくなっている．参照解は支点による断面変形の拘束の影響により支点付近で Timoshenko 梁と比べてせん断変形が 17%程度小さくなっている．本手法はこの傾向を最もよく再現しており，参照解との差は 2.2%未満であった．Reddy 梁は支点部の境界条件 $\tilde{\gamma} = 0$ の影響から支点付近で $\tilde{\gamma}$ の過小評価の影響が大きい．解析領域全体の参照解に対する一致の度合いを表す相対差 L_2 ノルムは Timoshenko 梁 6.0%，Reddy 梁 19%に対して，本手法は 1.6%と最も精度が高かった．ここで，相対差 L_2 ノルムは，各手法による解 β_p と solid による解 β_s との差の L^2 ノルムを solid による解の L^2 ノルムで無次元化し

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p - \beta_s)^2 dx_1}{\int_L (\beta_s)^2 dx_1}} \quad (43)$$

と定義した．

図-5において赤破線は本手法による断面変形の大きさ g を示す．せん断力が最大となる支点で断面変形がゼロになっていること，および，せん断力がゼロとなる自由端でゼロになっていないことが確認できる．赤実線のせん断変形と比較すると，おおよそ x_1 が 0.5 から 0.8 においては一致しているものの，特に支点付近（支点から断面高さの半分程度）では異なっている．一方，Reddy 梁ではせん断変形と断面変形を同じ自由度として表現しており，支点付近では本手法のせん断変形と断面変形の中間の値を取っている．

各手法によるたわみを図-6に示す．たわみは Bernoulli-Euler 梁による自由端のたわみで無次元化している．なお，参照解のたわみは式(42)で定義した断面の平均たわみ \tilde{u}_3 である．どのモデルでもたわみ

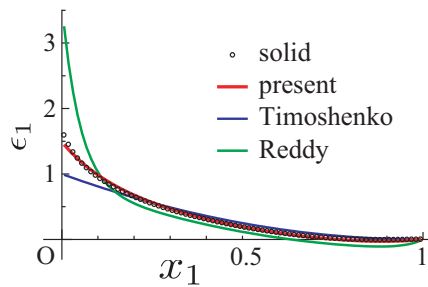


図-7 規格化した軸方向ひずみ

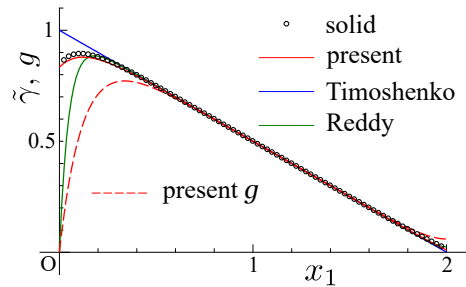


図-8 無次元化した断面のせん断変形 ($\ell = 2$)

に大きな差はないが、Reddy 梁が他のモデルに対し、特に支点近傍でのたわみ角が小さいことから全体的に小さなたわみとなっている。参照解に対する自由端たわみの相対差は、本手法で -0.67% 、Timoshenko 梁で 0.90% 、Reddy 梁で -3.3% であった。本手法と Reddy 梁は断面変形を直接的に考慮しており、支点における断面変形が拘束されるために断面変形を考慮していない Timoshenko 梁よりもたわみが小さくなっている。Reddy 梁では前述したように断面変形とせん断変形が等しく、境界条件によりせん断変形が過度に拘束されるため本手法よりもさらにたわみが小さくなっている。相対差 L_2 ノルムは、Timoshenko 梁 2.0% 、Reddy 梁 5.1% に対し、本手法は 0.72% であった。本手法では支点付近の断面変形の再現性が向上したことにより、たわみの精度も向上している。

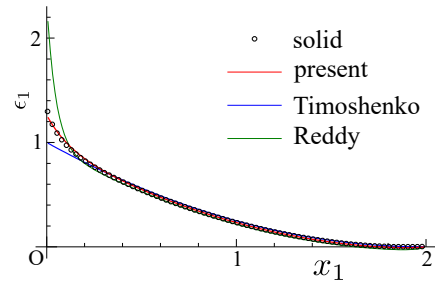


図-9 規格化した軸方向ひずみ ($\ell = 2$)

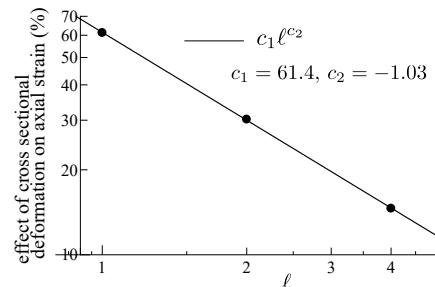


図-10 断面変形の影響と長さの関係

各手法による断面上縁の軸ひずみ ϵ_1 を図-7に示す。軸ひずみは Bernoulli-Euler 梁の支点部上縁のひずみで無次元化している。なお、参照解は連続体要素なので、ひずみは最上部の要素の要素中心で評価しており、他の梁理論でも同じ位置で評価している。支点到最も近い要素における軸ひずみで比較すると、参照解は Timoshenko 梁に対して 60% ほど大きく、本手法は 9% 程度参照解よりも小さくなっている。Reddy 梁は Timoshenko 梁よりも 230% 程度大きい。Reddy 梁では、付加的な軸ひずみは式 (I.3) から断面変形（せん断変形）の 1 階導関数に比例する。さらに、図-5の支点付近で断面変形の勾配が大きいことから付加的なひずみを過大評価している。一方で、本手法ではせん断変形と断面変形を独立に考慮しているため、支点付近の断面変形の傾向をよく再現できていることから、軸ひずみについても参照解の傾向を精度よく再現できている。ひずみの参照解に対する相対差 L_2 ノルムは、Timoshenko 梁で 5.6% 、Reddy 梁で 29% 、本手法では 0.22% であった。

5. 均質矩形断面梁における細長比と断面変形の影響の関係

前章で検討した均質矩形断面梁の長さを $\ell = 1, 2, 4$ と変化させ、細長比と断面変形の影響の関係について検討する。

$\ell = 2$ のモデルに対して得られた断面のせん断変形を図-8に示す。支点部付近の Timoshenko 梁によるせん断変形に比べ、参照解は 17% 程度小さくされており、本手法は 2% 未満の差で参照解を再現できている。本手法によるせん断変形と断面変形は、 $\ell = 1$ とほぼ同様、 x_1 が 0.5 付近以降かつ自由端から 0.2 程度までの範囲でおおよそ一致した。

$\ell = 2$ のモデルに対して得られた各手法による断面上縁の軸ひずみ ϵ_1 を図-9に示す。軸ひずみは Bernoulli-Euler 梁の支点部上縁のひずみで無次元化している。支点到最も近い要素における軸ひずみで比較すると、参照解は Timoshenko 梁に対して 30% ほど大きく、本手法は 4% 程度参照解よりも小さくなっている。Reddy 梁は Timoshenko 梁よりも 118% 大きい。

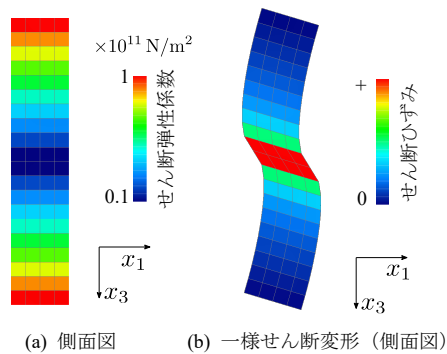


図-11 傾斜機能梁とその一様せん断変形

$\ell = 1$ と $\ell = 2$ のモデルにおいて、せん断変形については同様の傾向となった。一方で、支点付近の断面上縁の軸ひずみについては Timoshenko 梁との差が $\ell = 1$ では 60%, $\ell = 2$ では 30% と定量的に異なる結果となった。そこで、 $\ell = 4$ のモデルの軸ひずみを求めたところ、参照解は Timoshenko 梁の解よりも 14.6% 大きく、本手法の解の参照解に対する差は -1.5% であった。長さの異なる 3 モデルについて、Timoshenko 梁の解に対する参照解の相対差と細長比の関係を図-10 に示す。図中の直線は梁長さ ℓ のべき関数でフィッティングした結果であり、断面変形による軸ひずみの増加率は、長さのほぼ -1 乗に比例する結果となった。細長比は梁の長さと同様関係にあるため、図の横軸は長さ ℓ で表示している。なお、 $\ell = 1$ に対する細長比は 3.46 である。

材料が通常の鋼材であれば、限界細長比は 90 程度であるので、ここで用いている $\ell = 1$ の矩形断面梁の細長比パラメータは 0.0769 程度となる。文献¹⁷⁾ では高さ 11 m 程度の鋼製橋脚の例として細長比パラメータが 0.362 の片持ち柱が用いられている。これを本解析例に当てはめると $\ell = 4.71$ となるので、図-10 を外挿することで、断面変形が軸ひずみに及ぼす影響は 13% 程度と見込まれる。

6. 傾斜機能梁における断面変形の影響

著者らの文献¹⁵⁾ で取り扱った傾斜機能梁における断面変形の影響を評価する。図-11 にその側面図と代表体積要素の一様せん断変形を示す。断面図におけるコンターは断面内のせん断弾性係数の分布を示している。材料は Poisson 比ゼロの等方弾性体であり、断面中心から断面上下縁にいくほど材料の剛性が大きくなっており、梁としての曲げ剛性が大きく、せん断剛性が小さくなっている。図-12 に示すように、梁の高さ $h = 1$ 、長さ $\ell = 5$ 、幅 1 とした片持ち梁の自由端に集中荷重 P を載荷した。支配方程式 (18)–(20) のこの問題に対する解析解とその誘導については付録 II に記した。

表-2 傾斜機能梁の断面のパラメータ

		均質梁との比
K_b	$1.329 \times 10^{10} \text{ Nm}^2$	0.798
K_s	$5.500 \times 10^{10} \text{ N}$	0.550
R_2	$1.589 \times 10^8 \text{ Nm}^2$	0.801
R_4	$-3.238 \times 10^{10} \text{ N}$	1.944
R_5	$3.238 \times 10^{10} \text{ N}$	1.944

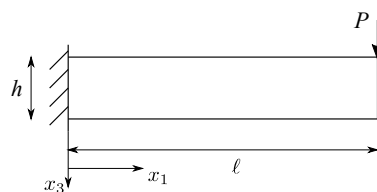


図-12 集中荷重を受ける傾斜機能片持ち梁

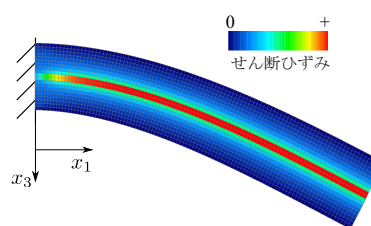


図-13 傾斜機能片持ち梁の連続体による解析結果

代表体積要素の要素分割は、立方体形状の 8 節点 1 次アイソパラメトリック要素を用い、文献¹⁵⁾ と同様に高さ・幅方向ともに 20 分割、軸方向は一様なため意味はないが見やすさを考慮して 4 要素分とした。本手法による断面の特性を表-2 に示す。表には前章の均質梁との比も示した。断面の中央部の剛性が低くなっているため、特にせん断剛性 K_s が小さくなっている一方で、断面変形に関する R_4 , R_5 の絶対値が大きくなっている。

参照解とするため、連続体としての境界値問題を、連続体要素により解析した。要素分割は本手法の代表体積要素と同じとし、断面当たり 20×20 要素、軸方向 100 要素となり、総要素数は 40,000 要素、総節点数は 44,541 となった。境界条件として、支点部に相当するすべての節点において 3 方向の変位を拘束し、自由端における集中荷重は自由端に相当するすべての節点に等しい x_3 方向強制変位を与えることで表現した。参照解の変形の様子を図-13 に示す。図中、コンターはせん断ひずみ γ_{13} を表す。せん断ひずみは断面中央付近のせん断剛性が小さい領域に集中している。また、せん断力は一定であるが、固定支点付近のせん断ひずみは他に比べて減少している。

参照解を基準とした荷重作用点のたわみについては、本手法は $-9.9 \times 10^{-3}\%$ 、Timoshenko 梁は 0.16% の差となった。ただし、Timoshenko 梁のせん断剛性は著者ら

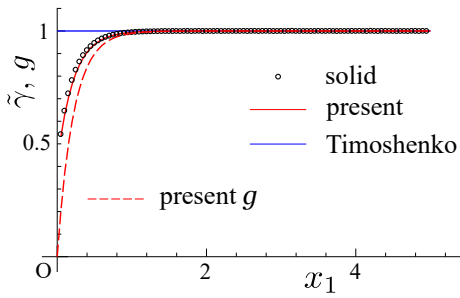


図-14 傾斜機能片持ち梁のせん断変形

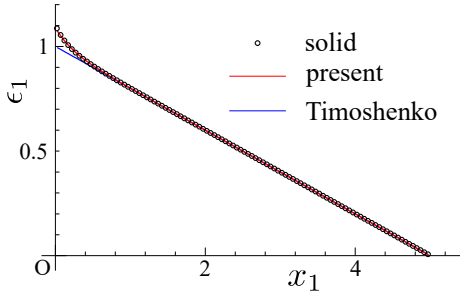


図-15 傾斜機能片持ち梁の軸方向ひずみ

の文献¹⁵⁾によって評価し、せん断補正係数で 0.4112 を用いた。

次に、得られた梁のせん断変形を図-14に示す。せん断変形は Timoshenko 梁のせん断変形で規格化して表示しており、solid は 4 章の均質梁と同様の方法で算出した参照解である。せん断力は一定であるが、固定支点付近では、断面変形の拘束によりせん断変形が小さくなっており、支点到最も近い $x_1 = 0.05$ の位置で参照解は Timoshenko 梁の解の 54% となっている。本手法による解の参照解との差は、同じ位置で -1.8% と小さい。参照解に対する相対差 L_2 ノルムでは、Timoshenko 梁の 7.5% に対し、本手法は 0.44% と全域にわたって参照解の傾向をよく表している。同図には本手法による断面変形の大きさ g も表しているが、固定支点から断面の高さ 1 と同じ距離の $x_1 = 1$ の点において $g = 0.99$ と 1 に近づいている。

断面上縁の軸方向ひずみを図-15に示す。軸方向ひずみは Timoshenko 梁の支点部上縁の値で規格化している。また、均質梁の例と同様に、参照解の最上部要素の中心で評価している。固定支点到最も近い評価点で比較すると、参照解は Timoshenko 梁の解よりも 9.0% 大きく、本手法の解と参照解の差は 0.9% と小さかった。参照解に対する相対差 L_2 ノルムでは、Timoshenko 梁の 5.7% に対し、本手法は 0.36% と全体的な傾向もよく再現している。

7. おわりに

本論文では、梁のせん断変形と、せん断変形による断面変形を独立に考慮した梁理論を構築した。これに付随して必要となる断面特性は、著者らが開発した均質化法を梁に適用した代表体積要素の数値解析結果から数値的に得られることを示した。これにより、本理論は非均質な断面の梁に対しても適用可能である。

最も基本的な均質矩形断面梁に対して本理論を適用し、連続体による計算結果を参照解とし、結果を比較した。その結果、自由端のように断面変形が拘束されない点を除いた集中荷重作用点において、断面変形の拘束の影響によりせん断ひずみ分布が変化すること、および、その影響は断面高さと同程度の領域で生じることが確認された。そのため、古典的梁理論の結果よりもせん断ひずみは小さくなること、および、軸ひずみは大きくなることを明らかにした。軸ひずみ増加の影響は細長比に反比例し、実際の鋼構造においても 10% 程度の増加が生じる可能性を示した。また、古典的な Timoshenko 梁、断面変形を考慮した Reddy 梁と相互比較した結果、本手法はもっともよく参照解を再現できることを確認した。

また、非均質梁の例として傾斜機能梁の解析を行い、連続体による参照解と比較した。その結果、本手法は、非均質梁においても断面変形およびその拘束の影響を再現できることを示した。

謝辞：本研究の一部は JSPS 科研費 15K14017 (代表：齊木 功)、18K04318 (代表：齊木 功) の助成および日本鉄鋼連盟鋼構造研究支援助成を受けたものです。

付録 I Reddy の梁

Reddy 梁では、梁の軸方向の変位を

$$u_1 = x_3 \theta(x_1) - \frac{4(x_3)^3}{3h^2} \tilde{\gamma}(x_1) \quad (\text{I.1})$$

と表す。上式第 2 項の 3 次関数を

$$f(x_3) = -\frac{4(x_3)^3}{3h^2} \quad (\text{I.2})$$

とし、 $g(x_1) = \tilde{\gamma}(x_1)$ と置けば 2 章の本手法の定式化と同様に定式化できる。ただし、上記の f では断面の回転がゼロとはならないが、せん断変形とそれによる断面変形を分離するという観点で断面変形に伴う断面の回転はゼロである方がよい。本手法との比較のためにも、ここでは式 (14) で示される回転がゼロであるとする。

変位場 (I.1) より、軸ひずみ ϵ_1 、面外せん断ひずみ γ_{13} は

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3 \theta' + f \tilde{\gamma}' = x_3 (\tilde{\gamma}' - u_3'') + f \tilde{\gamma}' \quad (\text{I.3})$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \tilde{\gamma} - u_3' + f_{,3} \tilde{\gamma} + u_3' = \tilde{\gamma}(1 + f_{,3}) \quad (\text{I.4})$$

と表される。

以上から、本手法の支配方程式 (18)-(20) は以下の 2 式

$$K_b \theta''' + q = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$-K_b \theta'' - R_2 \tilde{\gamma}'' + (K_s - R_5) \tilde{\gamma} = 0 \quad (\text{I.6})$$

に縮約される。

合応力 (21)-(23) に関しては、曲げモーメント M のみ変わらず、せん断力 Q と断面変形に関する一般化力 D は

$$\begin{aligned} Q &:= \int_A \tau_{13} dA = \int_A G \gamma_{13} dA \\ &= \int_A G \{ \tilde{\gamma} + f_{,3} \tilde{\gamma} \} dA = (K_s + R_4) \tilde{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$\begin{aligned} D &:= \int_A f \sigma_1 dA = \int_A E \epsilon_1 f dA \\ &= \int_A E \{ f x_3 \theta + f^2 \tilde{\gamma}' \} dA = R_2 \tilde{\gamma}' \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

となる。

等分布荷重 q を受ける片持ち梁の境界条件は

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0, & M(\ell) &= 0, \\ u_3(0) &= 0, & Q(\ell) &= 0, \\ \tilde{\gamma}(0) &= 0, & D(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

である。固定端における断面変形がゼロとならなくてはならないので、せん断変形 $\tilde{\gamma}$ がゼロになっている。 M および Q は本手法の解と同じであり、せん断変形の一般解は

$$\tilde{\gamma} = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + \frac{q}{K_s - R_5} (\ell - x) \quad (\text{I.10})$$

である。ただし k は

$$k^2 = \frac{K_s - R_5}{R_2} \quad (\text{I.11})$$

である。境界条件から積分定数 c_1, c_2 は

$$c_1 = \frac{q - qk\ell e^{-k\ell}}{2k \cosh(k\ell) R_5}, \quad c_2 = -c_1 - \frac{q\ell}{K_s - R_5} \quad (\text{I.12})$$

となる。 θ は本手法の解析解 (35) と同じである。 $\theta = \tilde{\gamma} - u_3'$ より、 u_3 に関する微分方程式

$$\begin{aligned} u_3' &= \tilde{\gamma} - \theta \\ &= c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + \frac{q(\ell - x)}{K_s - R_5} + \frac{q}{k_b} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{2} + \frac{\ell^2 x}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

を得る。よって u_3 は

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{q}{k_b} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{\ell x^3}{6} + \frac{\ell^2 x^2}{4} \right) + \frac{q(2\ell x - x^2)}{2(K_s - R_5)} \\ &\quad + \frac{c_1}{k} e^{kx} - \frac{c_2}{k} e^{-kx} + c_4 \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

となる。残りの境界条件 $u_3(0) = 0$ より

$$c_4 = \frac{c_2 - c_1}{k} \quad (\text{I.15})$$

となる。

付録 II 集中荷重を受ける片持ち梁の解析解

自由端に集中荷重 P を受けたわみが \bar{v} となる片持ち梁に対する支配方程式 (18)-(20) の解析解を以下に示す。境界条件は

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 0, & M(\ell) &= 0, \\ u_3(0) &= 0, & Q(\ell) &= P, \\ g(0) &= 0, & D(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

である。

$M(\ell)$ および $Q(\ell)$ に関する境界条件より

$$M(x) = Px - P\ell \quad (\text{II.2})$$

を得る。 $M = K_b \theta'$ を考慮し、上式を式 (19) に代入すると

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{K_s} (P - R_4 g) \quad (\text{II.3})$$

となる。上式を式 (20) に代入すると

$$g'' - k^2 g = \frac{R_4 P}{K_s R_2} \quad (\text{II.4})$$

となる。上式の一般解は

$$g = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} - \frac{PR_4}{k^2 K_s R_2} \quad (\text{II.5})$$

である。 g および D に関する境界条件より、積分定数が

$$c_1 = \frac{PR_4 e^{-k\ell}}{2k^2 K_s R_2 \cosh(k\ell)}, \quad c_2 = \frac{PR_4 e^{k\ell}}{2k^2 K_s R_2 \cosh(k\ell)} \quad (\text{II.6})$$

となる。

式 (21) を積分すると

$$\theta = \frac{1}{K_b} \left(\frac{Px^2}{2} - P\ell x \right) + c_3 \quad (\text{II.7})$$

を得る。 θ に関する境界条件より

$$c_3 = 0 \quad (\text{II.8})$$

となる。式 (II.5) で求められた g を用いると、式 (II.3) により

$$\tilde{\gamma} = \frac{P}{K_s} - \frac{R_4}{K_s} \left(c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} - \frac{PR_4}{k^2 K_s R_2} \right) \quad (\text{II.9})$$

となるので、 $\theta = \tilde{\gamma} - u_3'$ より

$$u_3' = \frac{P}{K_b} \left(-\frac{x^2}{2} + \ell x \right) + \frac{P}{K_{\text{seq}}} - \frac{R_4}{K_s} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) \quad (\text{II.10})$$

を得る。式 (II.10) を積分すると

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{P}{K_b} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{\ell x^2}{2} \right) + \frac{Px}{K_{\text{seq}}} \\ &\quad - \frac{R_4}{k K_s} (c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx}) + c_4 \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

を得る。 u_3 に関する境界条件より、積分定数が

$$c_4 = -\frac{P(R_4)^2 \sinh(k\ell)}{(K_s)^2 R_2 k^3 \cosh(k\ell)} \quad (\text{II.12})$$

となる。

参考文献

- 1) Timoshenko, S. P.: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars: *Phil. Magazine*, Vol.41, pp.744-746, 1921.
- 2) Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, ASCE, Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 3) Renton, J. D.: Generalized beam theory applied to shear stiffness, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.27, pp.1955-1967, 1991.
- 4) Hutchinson, J. R.: Shear coefficients for Timoshenko beam theory, *J. Appl. Mech.* ASCE, Vol.68, pp.87-92, 2001.
- 5) Levinson, M: An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, *Mech. Research Comm.*, Vol.7, pp.343-350, 1980.
- 6) Reddy, J.N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates, *ASCE J. Appl. Mech.*, Vol.51, pp.745-752, 1984.
- 7) Gruttmann, F. and Wagner, W.: Shear correction factors in Timoshenko's beam theory, *Comp. Mech.*, Vol.27, pp.199-207, 2001.
- 8) Dong, S. B., Alpdogan, C. and Taciroglu, E.: Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.47, pp.1651-1665, 2010.
- 9) Steinboeck, A., Kugi, A. and Mang H. A.: Energy-consistent shear coefficients for beams with circular cross sections and radially inhomogeneous materials, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.50, pp.1859-1868, 2013.
- 10) 齊木 功, 鎌 一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫: 非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価, 土木学会論文集 A2, Vol.68, pp.I.161-I.169, 2012.
- 11) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法, 土木学会論文集 A2, Vol.71, No.2, pp.I.11-I.18, 2015.
- 12) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化, 土木学会論文集 A2, Vol.72, No.2, pp.I.53-I.62, 2016.
- 13) 齊木 功, 西井大樹, 山本剛大: 任意断面のせん断遅れを考慮できる梁要素, 日本計算工学会論文集, Vol.2018, No.20180013, 2018.
- 14) 齊木 功, 新井晃朋, 山本剛大, 岩熊哲夫: 非均質断面梁のせん断剛性評価に関する一考察, 土木学会論文集 A2, Vol.73, No.2, pp.I.23-I.31, 2017.
- 15) 齊木 功, 藤本竜太, 山本剛大: 非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察 土木学会論文集 A2, Vol.74, pp.I.3-I.11, 2018.
- 16) Polizzotto, C.: From the Euler-Bernoulli beam to the Timoshenko one through a sequence of Reddy-type shear deformable beam models of increasing order, *European J. Mech. A/Solids*, Vol.53, pp.62-74, 2015.
- 17) 北原武嗣: 継続時間の長い地震動を受ける鋼製橋脚の数十回オーダー繰り返し耐荷性状に関する実験的・解析的検討, J-BEC レポート, 海洋架橋・橋梁調査会, vol.6, pp.12-15, 2011.

(Received July 19, 2019)

(Accepted December 10, 2019)

SHEAR DEFORMABLE BEAM THEORY WITH WARPING INDEPENDENT OF SHEAR DEFORMATION

Isao SAIKI, Xun ZHENG and Takeki YAMAMOTO

Although the Timoshenko beam theory assumes that cross sections remain plane, the shear stress is not constant through the beam thickness. Therefore, the shear stiffness of beams has to be modified by a shear correction factor through taking into account warping of cross sections. In this beam theory, warping is assumed to be proportional to the shear force. Whereas the shear force can be discontinuous, warping must be continuous due to compatibility condition of deformation. Therefore, the warping can not be proportional to the shear deformation. This paper proposes a beam theory taking into account the warping independent of the beam shear deformation. The effect of independently considered warping is evaluated through a series of analyses of simple cantilever beams. As a result, we conclude that the present theory predicts the deformation more accurately compared with other beam theories and that the effect of constraint of the cross-sectional deformation reduces the shear deformation within the length equivalent to the height of the beam.