参考資料：有限差分法の概要

斉木　功

ばね定数 k のばねおよび質量 m の質点からなる 1 自由度系の運動方程式は

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \tag{1}$$

と表される．ここに， u は質点の変位， f は外力，上付きのドットは時間微分を表す．両辺を m で割り，固有振動数 ω および減衰定数 ξ を用いて表せば

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = a \tag{2}$$

となる．ここに， $a = f/m$ は系に作用する加速度である．運動方程式 (2) を以下に概説する有限差分法により離散化し，表計算ソフトウェア等を用いて，時刻暦応答を解析する．

そもそも微分の定義は

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

である．これに対し，差分は Δt を小さいが有限な大きさにとどめることにより，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \text{差分} \tag{4}$$

と微分の近似値を定義するものである (ただし，差分の定義は他に無数に存在する)． Taylor 展開を用いると，

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Delta t + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}t^4}\frac{\Delta t^4}{4!} + O(\Delta t^5) \tag{5}$$

となり，これより

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{6}$$

となり，式 (4) は Δt に関して 1 次のオーダーの精度を有していることが分かる．少し工夫する（式 (5) から後述の式 (8) を辺々差し引く）と

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \tag{7}$$

のように， 2 次精度を有する差分も導くことができ，中央差分と呼ばれる．

同様に 2 階微分に相当する差分を求めてみる．式 (5) と

$$u(t-\Delta t) = u(t) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Delta t + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}\frac{\Delta t^2}{2} - \frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}t^4}\frac{\Delta t^4}{4!} + O(\Delta t^5) \tag{8}$$

を辺々加えることにより

$$u(t+\Delta t) + u(t-\Delta t) = 2u(t) + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^4) \tag{9}$$

を得る．これより 2 階差分

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{u(t+\Delta t) - 2u(t) + u(t-\Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \tag{10}$$

を得る． Δt に関して 2 次のオーダーの精度を有していることに注意.

表記を簡単にするために $u(t) = u_i$， $u(t+\Delta t) = u_{i+1}$， $u(t-\Delta t) = u_{i-1}$ とおく．式 (7), (10) を運動方程式 (2) に代入し， Δt^2 を掛けると

$$(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \xi\omega(u_{i+1} - u_{i-1})\Delta t + \omega^2 u_i \Delta t^2 = a_i \Delta t^2 \tag{11}$$

となり， u_i と u_{i-1} が分かっていれば， u_{i+1} について逐次解くことができる．このような解法を陽解法と呼ぶ．陽解法は簡便だが，計算を安定に進めるためには，時間刻み Δt がある程度小さくなくてはならない.

振動台実験との比較についての補足

静止した座標系における質点の変位を u，地盤（振動台）の変位を u_g とする．地盤からみた質点の変位は $u_\mathrm{r} = u - u_\mathrm{g}$ である．

質点の運動方程式は，質点の変位 u および相対変位 u_r を用いて

$$m\ddot{u} + c\dot{u}_\mathrm{r} + ku_\mathrm{r} = 0 \tag{12}$$

と表せる． $u = u_\mathrm{r} + u_\mathrm{g}$ を運動方程式に代入すると

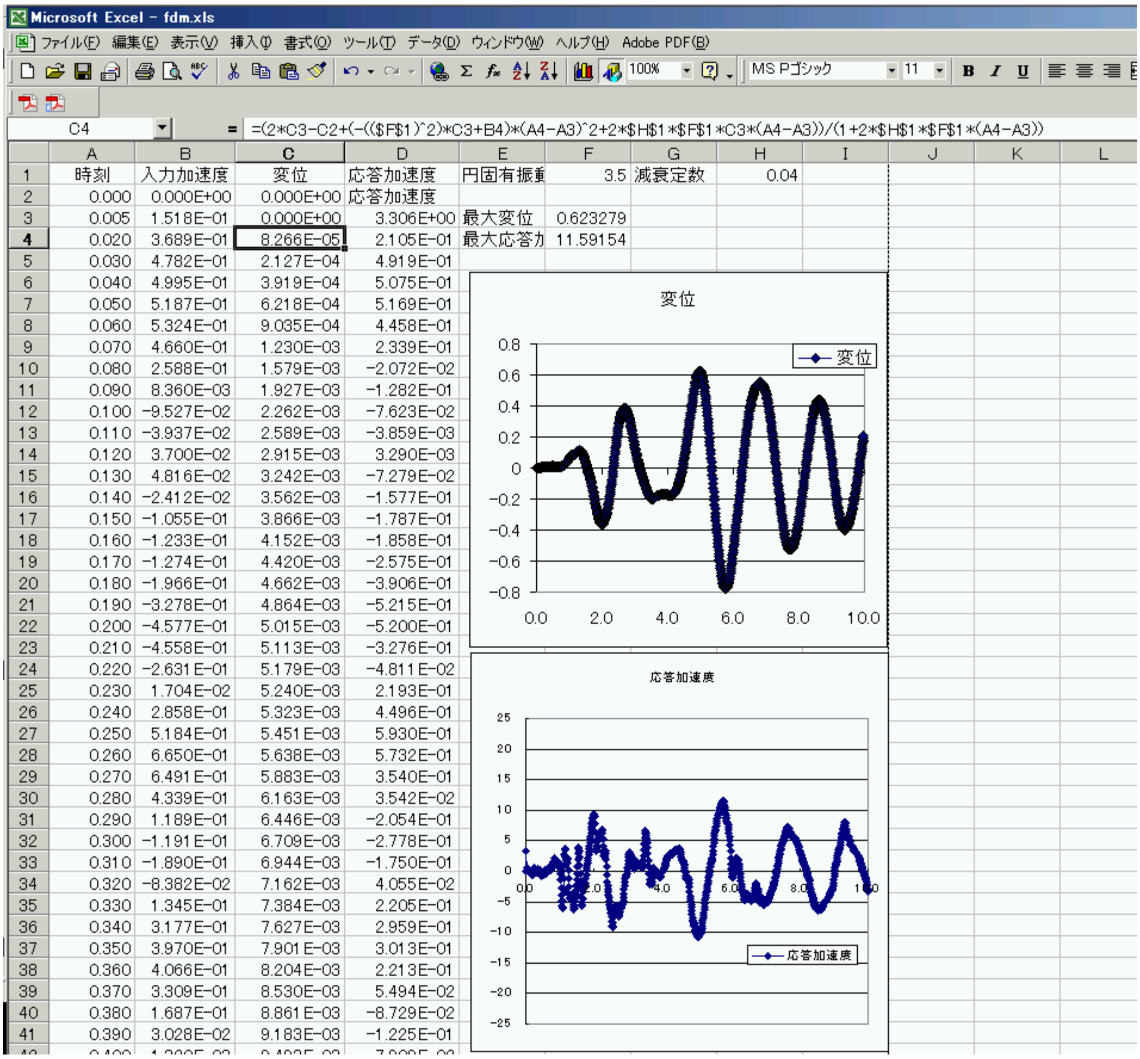
$$m\left(\ddot{u}_\mathrm{r} + \ddot{u}_\mathrm{g}\right) + c\dot{u}_\mathrm{r} + ku_\mathrm{r} = 0 \tag{13}$$

となるので，地盤の加速度の項を移項すると

$$m\ddot{u}_\mathrm{r} + c\dot{u}_\mathrm{r} + ku_\mathrm{r} = -m\ddot{u}_\mathrm{g} \tag{14}$$

となり，地盤の加速度を外力と考えることで，運動方程式を解くことができる．

実験で計測される加速度は，質点の変位に対する加速度であるので，ここでの解析で求めた u_r から， 2 階部分の近似式を用いて加速度を求め，その加速度に地盤の加速度を加えた加速度，すなわち $\ddot{u} = \ddot{u}_\mathrm{r} + \ddot{u}_\mathrm{g}$ と比較しなくてはならないことに注意しよう．



Microsoft Excel - fdm.xls

C4 = =(2*C3-C2+(-((F1)^2)*C3+B4)*(A4-A3)^2+2*H1*F1*C3*(A4-A3))/(1+2*H1*F1*(A4-A3))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	時刻	入力加速度	変位	応答加速度	円固有振動	3.5	減衰定数	0.04
2	0.000	0.000E+00	0.000E+00	応答加速度				
3	0.005	1.518E-01	0.000E+00	3.306E+00	最大変位	0.623279		
4	0.020	3.689E-01	8.266E-05	2.105E-01	最大応答力	11.59154		
5	0.030	4.782E-01	2.127E-04	4.919E-01				
6	0.040	4.995E-01	3.919E-04	5.075E-01				
7	0.050	5.187E-01	6.218E-04	5.169E-01				
8	0.060	5.324E-01	9.035E-04	4.458E-01				
9	0.070	4.660E-01	1.230E-03	2.339E-01				
10	0.080	2.588E-01	1.579E-03	-2.072E-02				
11	0.090	8.360E-03	1.927E-03	-1.282E-01				
12	0.100	-9.527E-02	2.262E-03	-7.623E-02				
13	0.110	-3.937E-02	2.589E-03	-3.859E-03				
14	0.120	3.700E-02	2.915E-03	3.290E-03				
15	0.130	4.816E-02	3.242E-03	-7.279E-02				
16	0.140	-2.412E-02	3.562E-03	-1.577E-01				
17	0.150	-1.055E-01	3.866E-03	-1.787E-01				
18	0.160	-1.233E-01	4.152E-03	-1.858E-01				
19	0.170	-1.274E-01	4.420E-03	-2.575E-01				
20	0.180	-1.966E-01	4.662E-03	-3.906E-01				
21	0.190	-3.278E-01	4.864E-03	-5.215E-01				
22	0.200	-4.577E-01	5.015E-03	-5.200E-01				
23	0.210	-4.558E-01	5.113E-03	-3.276E-01				
24	0.220	-2.631E-01	5.179E-03	-4.811E-02				
25	0.230	1.704E-02	5.240E-03	2.193E-01				
26	0.240	2.858E-01	5.323E-03	4.496E-01				
27	0.250	5.184E-01	5.451E-03	5.930E-01				
28	0.260	6.650E-01	5.638E-03	5.732E-01				
29	0.270	6.491E-01	5.883E-03	3.540E-01				
30	0.280	4.339E-01	6.163E-03	3.542E-02				
31	0.290	1.189E-01	6.446E-03	-2.054E-01				
32	0.300	-1.191E-01	6.709E-03	-2.778E-01				
33	0.310	-1.890E-01	6.944E-03	-1.750E-01				
34	0.320	-8.382E-02	7.162E-03	4.055E-02				
35	0.330	1.345E-01	7.384E-03	2.205E-01				
36	0.340	3.177E-01	7.627E-03	2.959E-01				
37	0.350	3.970E-01	7.901E-03	3.013E-01				
38	0.360	4.066E-01	8.204E-03	2.213E-01				
39	0.370	3.309E-01	8.530E-03	5.494E-02				
40	0.380	1.687E-01	8.861E-03	-8.729E-02				
41	0.390	3.028E-02	9.183E-03	-1.225E-01				

表計算ソフトでの振動解析結果 (例)

式 (11) から， u_{i+1} を求めるために，陽な形に整理すると以下のようになる．

$$u_{i+1} + \xi\omega u_{i+1}\Delta t = a_i \Delta t^2 + 2u_i - u_{i-1} + \xi\omega u_{i-1}\Delta t - \omega^2 u_i \Delta t^2 \tag{15}$$

$$(1 + \xi\omega\Delta t)u_{i+1} = -\ddot{u}_{\mathrm{g}}\Delta t^2 + 2u_i - u_{i-1} + \xi\omega u_{i-1}\Delta t - \omega^2 u_i \Delta t^2 \tag{16}$$

$$(1 + \xi\omega\Delta t)u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} + (-\omega^2 u_i - \ddot{u}_{\mathrm{g}})\Delta t^2 + \xi\omega u_{i-1}\Delta t \tag{17}$$

$$u_{i+1} = \frac{2u_i - u_{i-1} + (-\omega^2 u_i - \ddot{u}_{\mathrm{g}})\Delta t^2 + \xi\omega u_{i-1}\Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t} \tag{18}$$

ここで， $a_i = -\ddot{u}_{\mathrm{g}}$ とした．

この関係より得られる u_i は相対変位のため，それらより 2 階差分 (10) を用いて $\ddot{u}_{\mathrm{r}}$ を求め，これに地盤の加速度 $\ddot{u}_{\mathrm{g}}$ を加えたものが絶対加速度（応答加速度）となる．