

参考資料：有限差分法の概要

山本 剛大

ばね定数 k のばね、および、質量 m の質点からなる 1 自由度系の運動方程式は、

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \quad (1)$$

と表される．ここに、 u は質点の変位、 f は外力、 $\dot{\bullet}$ は $\bullet$ の時間微分である．両辺を m で割り、固有振動数 ω および減衰定数 ξ を用いると、

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = a \quad (2)$$

となる．ここに、 $a = f/m$ は系に作用する加速度である．運動方程式 (2) を有限差分法により離散化し、表計算ソフトウェア等を用いて、時刻歴応答を解析する．

差分表現

微分の定義は、

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \quad (3)$$

である．これに対して、差分とは Δt を小さいが有限な大きさにとどめることにより、

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad (4)$$

のように微分の近似値を定義するものである（ただし、差分の定義は他に無数に存在する）．Taylor 展開を用いると、

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{du}{dt}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2u}{dt^2}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3u}{dt^3}(\Delta t)^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4u}{dt^4}(\Delta t)^4 + O((\Delta t)^5) \quad (5)$$

となる．したがって、 u の t に対する 1 階導関数は、

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (6)$$

と表現でき、式 (4) は Δt に関して 1 次のオーダーの精度を有していることがわかる．少し工夫する（式 (5) から式 (8) を辺々差し引く）と、

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O((\Delta t)^2) \quad (7)$$

のように、中央差分と呼ばれる 2 次精度を有する差分が導ける．

同様に、 u の t に対する 2 階導関数に相当する差分表現を導出する．Taylor 展開を用いると、

$$u(t - \Delta t) = u(t) - \frac{du}{dt}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2u}{dt^2}(\Delta t)^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3u}{dt^3}(\Delta t)^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4u}{dt^4}(\Delta t)^4 + O((\Delta t)^5) \quad (8)$$

となり、式 (5) と式 (8) の辺々を加えると、

$$u(t + \Delta t) + u(t - \Delta t) = 2u(t) + \frac{d^2u}{dt^2}(\Delta t)^2 + O((\Delta t)^4) \quad (9)$$

を得る．式 (9) より、

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u(t + \Delta t) - 2u(t) + u(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2) \quad (10)$$

と表現され、 u の t に対する 2 階導関数の差分が導出される．このとき、 Δt に関して 2 次のオーダーの精度を有していることに注意する．

表記を簡単にするために、 $u(t) = u_i$ 、 $u(t + \Delta t) = u_{i+1}$ 、 $u(t - \Delta t) = u_{i-1}$ とおく．式 (7)、(10) を運動方程式 (2) に代入し、両辺に $(\Delta t)^2$ を掛けると、

$$(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \xi\omega(u_{i+1} - u_{i-1})\Delta t + \omega^2 u_i(\Delta t)^2 = a_i(\Delta t)^2 \quad (11)$$

が得られる．式 (11) では、 u_i と u_{i-1} が既知であれば、 u_{i+1} について逐次解くことができ、このような解法を陽解法と呼ぶ．陽解法は簡便であるが、計算を安定に進めるためには、時刻刻み Δt がある程度小さくなくてはならない．

振動台実験との比較についての補足

制止した座標系における質点の変位を u 、地盤（振動台）の変位を u_g とする。このとき、地盤からみた質点の変位（相対変位）は、 $u_r = u - u_g$ である。

質点の運動方程式は、質点の変位 u および相対変位 u_r を用いて、

$$m\ddot{u} + c\dot{u}_r + ku_r = 0 \quad (12)$$

と表せる。ここで、質点の変位は $u = u_r + u_g$ であるので、運動方程式 (12) に代入すると、

$$m(\ddot{u}_r + \ddot{u}_g) + c\dot{u}_r + ku_r = 0 \quad (13)$$

となり、地盤の加速度の項を移項すると、

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = -m\ddot{u}_g \quad (14)$$

と表現され、地盤の加速度を外力とする運動方程式とみなせる。

実験で計測される加速度は、質点の変位に対する加速度であるので、解析で求めた u_r から、2 階導関数の差分表現を用いて加速度 $\ddot{u}_r$ を求め、相対加速度 $\ddot{u}_r$ に地盤の加速度 $\ddot{u}_g$ を加えた加速度 $\ddot{u} = \ddot{u}_r + \ddot{u}_g$ と比較しなくてはならないことに注意しよう。

式 (11) から、 u_{i+1} を求めるために、陽な形に整理すると、

$$u_{i+1} + \xi\omega u_{i+1}\Delta t = a_i(\Delta t)^2 + 2u_i - u_{i-1} + \xi\omega u_{i-1}\Delta t - \omega^2 u_i(\Delta t)^2 \quad (15)$$

$$(1 + \xi\omega\Delta t)u_{i+1} = -\ddot{u}_g(\Delta t)^2 + 2u_i - u_{i-1} + \xi\omega u_{i-1}\Delta t - \omega^2 u_i(\Delta t)^2 \quad (16)$$

$$(1 + \xi\omega\Delta t)u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} + (-\omega^2 u_i - \ddot{u}_g)(\Delta t)^2 + \xi\omega u_{i-1}\Delta t \quad (17)$$

$$u_{i+1} = \frac{2u_i - u_{i-1} + (-\omega^2 u_i - \ddot{u}_g)(\Delta t)^2 + \xi\omega u_{i-1}\Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t} \quad (18)$$

となる。ここで、 $a_i = -\ddot{u}_g$ とした。

式 (18) で得られる変位 u_i は相対変位 u_r を意味するため、2 階導関数の差分表現式 (10) を用いて算出した $\ddot{u}_r$ に地盤の加速度 $\ddot{u}_g$ を加えたものが絶対加速度（応答加速度）となる。