# 報告書　『大学における力学教育』

土木学会　構造工学委員会 — 力学教育研究に関する小委員会

1994 年 10 月

# もくじ

# 第 1 章

# 最終報告

## 1.1　背景と目標

本委員会は第 5 章に示したような趣旨で設立され，比較的若手の大学教官のみを委員として自由に意見交換を行なってきた．そこにも書かれているように，近年，土木分野のカリキュラムが社会的要請に伴い変化し，例えば計画や経済的予測，構造物に関しては景観，建設事業全体のマネージメント等に関する分野の必要性が増大し，大学学部 4 年間のカリキュラムに占めるこのような言わばソフト系科目の割合がかなり大きくなってきている．また学生にも入学前に既に数学・物理離れ現象が蔓延し，ハード的な力学に関する勉強や研究への関心が薄れているこのような状況下での前述のカリキュラムの変貌が，学生をますます力学から離しているのが現実となってきている．

多くの大学で行なわれている力学教育に昔ほどの魅力が無くなってきているこのような状況で，果たして今後ともこのような構造力学教育が必要なのか，何故魅力的ではないのか，ということを検討することが必要となっている．実務レベルではブラックボックス化した汎用パッケージによる設計や照査が当り前となっている現在においても，まだ力学教育が必要であるとすれば，その内容はいかなるものであらねばならず，またどのような方法で教育されるのが最適であるのか，といったことも同時に検討しなければならない．

一方で，老朽橋梁対策や，逆に超長大橋梁架設の可能性検討に見られるように，力学教育には単に問題が解ける能力だけを伸ばす役割があるわけではなく，今は不可能なもの，今まで考えもされなかった形態等の提案・開発が急務となりつつあるのも事実である．すなわち，まず第一の問題点である，「力学教育が必要か」との問に対しては『今まで以上に必要である』というのが答であることは否めないであろう．

昨今大学の改組・改革が盛んになっている．これを力学教育という点から見ると，この時代が力学に求めているものも昔と大きく変わっているということを再認識することを求められているとも考えられないだろうか．土木学会全国大会の共通セッションにも見られるように，旧来の分野を越えた研究が必然的に盛んになってきているが，同様の現象が従来の学科間についても生じてきている．この改組・改革は，そのようなものを再構成・統合・結合する方向で動いているように見えるのは一部の大学だけではないようだ．このような事態も力学教育の将来を検討する上で考慮すべき点ではあろう．

したがってこの委員会では次のような点について検討を試みることにした．

1. 力学教育の必要性を明確にできるか
2. 何を教えるべきか
3. どのような方法で教えるべきか
4. 具体的なカリキュラムの見直し
5. 昨今の分野の融合に伴い，広く力学を教える
6. この時機に多くの人に教育について考え直してもらう

第一の点について，実務での力学の必要性が否定できないのは前述した通りであるが，ここでは構造設計にはあまり興味の無い学生にとっても魅力的あるいは必要な学問として力学の魅力をどのようにして学生に伝えることができるか，という点に絞り，第二の点と同時に検討する．第五の項目についてはこの 2 年間は議論が発散しないようにする時間的な関係上，構造力学を中心にせざるを得なかった．第六点については，九州産業大学を会場にして行なわれた土木学会全国大会の研究討論会で多くの人々と意見交換を行なうことができた．第 4 章にその時の資料を付した．以下，第 2 ～ 4 の項目について概説したい．

## 1.2　どうやって興味を持ってもらうか

具体的に何を教えるかの以前に，まず力学に興味を持ってもらわなければ何もならない．高校のカリキュラムが今年度から大幅に変更された．力学に関連する物理に関して言えば，数字や式の無い感覚的な物理のような科目が新しく設けられ，理科離れを食い止めようとしている．もちろん大学に入学して欲しい人間は，定量的把握や数式によるモデル構築と予測に最終的に興味を持ってもらいたいわけではあるが，その導入部としてのカリキュラムが改善されようとしていると言われている．

現在多くの大学では「構造力学」は普通の黒板を用いた講義の形態で行なわれていると想像される．一部に計算機を用いた CAI 的教育を試みている所もあるが，まだ数少ない．実際に構造物が壊れる映像，景観と力学，地域住民が構造物に期待すること，などを実際に示すことが，力学への興味および力学の理解を助けると考えられないことはない．社会的ニーズを示すことは，真面目な学生にはアッピールになるようだ．つまり，多くの写真やビデオ・スライドの利用，現場の現状を特別講義として聴く，などの方法を用いて更なる工夫が必要であろうが，まず単位取得が最大関心事である学生を引き付けられるか否かは疑問が残る．

「見せること」「実験で触れること」が刺激になることは言うを待たないが，学生がもし受動的であり続けている間は，単に「美しいヴィジュアルな資料を多く配布する」だけの「現実の提示」は正しく機能しない．つまり講義室でいかにして学生に情報を与えればよいか，という点についてはもっと学生気質を考慮して工夫する必要がありそうだ．

力学の本質が，物体に力が作用したときに生ずる現象を数学的に記述する，すなわち物理問題を数理問題に置き換えるところにあるのだとすれば，「感覚的教育」によりこの本質を学生に理解させることには限界がある．やはり数学を適切に用いることが不可欠なのである．もちろん，このことは盲目的に数式を駆使する，あるいは強要する講義を弁護するものでは決してない．

数式を使えるようになるためによく演習という形態を用いることがなされてきた．しかし「学ぶ」ことが「記憶する」ことではないことは，研究討論会でも指摘されたことである．「自分の言葉で咀嚼し直して理解し再利用できる」ことが求められているわけであり，単なる反復・記憶といった形態以外の方法が必要となる．設計製図も現場での作業のシミュレーション的要素はあっても，構造力学・工学の理解の助になっているとは限らないのが現実であろう．

苦行のような演習や製図の代わりに実験はどうかとの意見もあった．実験そのものは簡単なものでよく，それをいかにレポートするかということに重点を置けば，力学の復習と同時に現象を理解する目も養われるのではないだろうか．ただ，教官側にはかなりの負担が避けられず，レポートの数回の再提出を伴う多大な努力が要求される．またたとえ教官の負担については進んで担うとしても，学生にそのような負担を課すことがカリキュラム全体のバランスとして適当か否かの検討は，個々の大学の目標に照らして真剣に検討し直すべき時機に来ている．前述のように社会の変遷に伴い学習するべき内容が増えている中で，力学教育に割きうる時間は限られてきているからである．

一口に大学と言っても，旧帝国大学から地方大学・私立大学に至るまで種々様々な特徴を有しており，その入学者の特質についても千差万別である．したがって，大学による教育内容・教育方法に相違があるので，この委員会でも，あるひとつの結論は得られないのではないか，との意見も度々出てきた．個々の教材や教育方法および最終的にカバーすべきカリキュラム範囲については確かにそうかも知れないが，教育の目的や目標はそれほど違わないのではないだろうか．学生が理解できない講義ほど意味の無いものはない．このあたりの検討は必要であろう．

## 1.3　何を教えるか

全国の土木系学科・専攻は，その分野における構造工学技術者だけを輩出するのが責務であるわけでないのは当然であろう．ただ，工学の中でも最も広範な，言ってみれば総合技術とも言うべき土木工学技術者が，構造力学に関して必要最小限知っておくべきことは何かということを検討し，その内容をカリキュラムに反映させなければならない．その試みとして，本委員会では，研究討論会の資料に含まれているような『一学期で教える構造力学』について，各委員の意見をそのまま列挙してみた．結果的にはここにこそ大学間の相違が如実に出ていると思われる．したがって内容はお互いに非常に異なっている．しかし重要なのは，現在，この程度の内容が理解できれば，今まで必修に近い形で，かつ演習付きで多くの時間を割いていた構造力学という講義も，そのエッセンスを教えるためには一学期分で十分であるということである．

大雑把にこの資料を眺めると，現在初年度に提供されている講義内容がそのまま，あるいはその項目の大半を含んだ形でその『一学期で教える構造力学』に書かれているものもある．そのような従来型とは少し違った観点のカリキュラム案に含まれていると思われる内容は，結局，構造力学で構造のいかなる問題を構造解析法のどの方法を用いて解くかという機能の前に，『ひとつの代表的な自然科学の方法論として，現象をいかにモデル化し，その現象の予測のためにいかに定式化し，どの程度の現象把握が可能となるのか』を紹介する講義案であろう．よく「力学のからくり」ということが必要だと言われるが，それと

も若干違った見方に立つ構造力学教育案である．現象の支配的メカニズムを抽出・モデル化することにより物理問題を数理問題に置き換え，その数理問題を解析することにより現象の予測を行い，その結果を用いて設計等の工学的問題の解決にあたるという，美しい自然科学の流れを学生に教授する上で，構造力学は最適の題材である．この流れの学習と，それを通して行われる数理的素養の修得，論理的思考の訓練は，工学の一般教育としての大きな柱になりうるものである．それは構造工学に限らず，広く工学の様々な局面で問題解決の助けとなるであろう．

さて，昨今の学生側の数学嫌いの影響かもしれないが，図式解法や本質的ではない置き換え手法等が構造力学に相変わらず残存している．いわゆる旧来の教養課程で教えている数学・物理の知識を積極的に用いずに問題を解決する方法を教育しているというのが現実である．これは教え方とも密接な関係があるが，例えば高校の最近の物理カリキュラム変更が参考にならないだろうか．つまり，イントロ部において数式の少ないもので概念を教育し，同じことを次の学年では数学を積極的に使って教育するというものである．カリキュラム表から判断して多くの大学で行なわれている構造力学・材料力学の講義のような「積み重ね方式」に対峙する「反復法」で水理学を教えている大学があると聞く．式が無い方が理解しにくいことも多々あることは周知の事実であるが，学生はまだそのような事実にすら気がついていない．その辺りを合理的に教育できれば最高であろうと考えている．

一番問題になるのは，覚えやすい方法，教えやすい方法での教育の結果，間違ったことを学ばせてしまうことである．やはり構造工学も物理現象をより正確に予測するための学問であるから，間違いの無い正しいことを積極的に数学を用いて教えるべきであろう．それが全員に必須であるとは限らないが，最終的な構造力学教育の目標は，目の前の物理現象をいかに正確に数学的モデルに置き換え，それをいかに正しい方法で解決できるか，ということではなかろうか．有限要素法そのものの持つ高度な問題は理解できなくとも，現場で対象としている構造物の要素メッシュ生成を行なう際に必要な力学的な基礎は，やはり正しい力学教育でしか身に付かない．例として，研究討論会資料には，棒材の支配方程式の誘導や仮想仕事式の教え方についてのほんの一例を示してみた．この委員会で「数学」と称しているのはこの程度のことであり，大学入試の数学と比較してさほど難解なものとも思われない．

委員会活動のなかではカリキュラムに関する議論に多くの時間が割かれた．その全てを記録に残すことが出来ないのが残念ではあるが，その一部は新しいカリキュラム案（研究討論会資料）に紹介されている．これは研究討論会の資料として，各委員の意見をそのまま列挙したものである．本来，理想的なカリキュラムは一つではなく，教育環境と教える側のフィロソフィの調和によって熟成されるべきものであろう．教育は個性があってはじめて息づくものであり，委員会を通して統一化するようのものではないことは当然である．列挙された各委員の意見より，委員会での熱のこもった議論が想像頂ければ幸いである．

最後に，各委員の考える理想的な問題を第 2 章に収録した．例えば講義の最終試験に出す問題は，その講義で何を教えたのか，何を理解して欲しいのかを表している．いわば，講義の最終目標の提示でもある．ここに集められた問題は，その趣旨は様々であるが，各委員の教育に対する考え方を表している．それぞれ，きちんとした目的意識を持った問題であり，極力その出題の意図を明示していただいた．多少委員に問題を提出していただくまでの時間的余裕がなく，必ずしも最適な問題に練り上げられてはいないかもしれないが，

モデル化における観点，境界条件が有する特性を理解する観点，力学を感覚的ではなく正確に理解する観点，実感している概念と数式との関係を理解する観点等からの問題が収集できたと考えている．もちろん個々の問題そのものの難易度はかなりばらついているが，表面的な難易度ではなく，問題の目的の方をご理解願いたい．

### 1.4　今後の課題

2 年間の委員会活動において検討したことを雑多に並べてみた．あいにく，当初目的はほとんど何も達成できていないとの反省がこの報告書の要点になりそうだが，研究討論会では非常に多くの意見交換ができたことから，教育が大切であることは論を待たない．優秀な学生を土木に引き寄せ，土木を好きにして社会に送り出す．不静定ラーメンは解けなくとも，力学の本質に迫る感覚を身に付けた土木技術者を社会に送り出す．このようなことが大学に課せられた大切な使命のひとつである．学生の目が輝いているかどうかが教育の一つのバロメータであり，情報の氾濫した現代社会において学生の興味を大学に引き付けておくためには絶え間ない努力と工夫が必要である．

教育が大切なテーマであるにも関わらず，学会活動の中ではなおざりにされがちである．研究的委員会に比べてインセンティブが無いからであろうか．全体的に土木教育をカバーする委員会があり十二分にその役割を果たしておられる一方で，そうした全体的な検討と並行して，個々の分野において何をどう教えるべきかという具体的な検討も大切である．日々どう教育するべきかに苦悩する教官に手を差し伸べ，一緒に問題に対処すること，これは土木学会の重要な使命であり，その存在意義をさらに高める活動となろう．この委員会の意義はそうした主張の提示にもあった．幸い，新しく発足した応用力学委員会の許に，力学教育の小委員会が設置され，当委員会でできなかったことを引き継いでいただく予定である．

検討できなかったもののうち，重要な課題を列挙すれば，現場側からの意見の反映，教室での教え方であろうか．また，元々この小委員会の委員会名称にあったもので何も検討がなされなかった「研究」について，教育という面から見た力学に関する研究の在り方というものも今後考察し続けていかなければならないと思われる．このことは，単に力学に興味を持ってもらう学生を増やすためだけではなく，後継者を育ててさらに必要とされる構造工学を現在の正常な状態に保つためにも必要であろう．

研究討論会では企業の方のご意見を頂くことができたが，この委員会の立場は，大学側の論理で教育を考え，大学側から官庁・企業にまず球を投げてみるというものであった．官庁・企業から委員に加わって頂いてはという意見もあったが，まず大学としての考えを集約することが先決と判断した．この球を大学以外の立場から新設の小委員会で近いうちに是非投げ返して頂きたい．大学の教育に期待するものは何なのであろうか？この報告書に盛り込まれている新しい考え方には賛同していただけるのであろうか？あるいは大学教育には大した期待を抱いていないのであろうか？是非いろんな変化球を投げ返して頂きたい．

委員会で議論する中で，「入社試験に出るからこれを教えない訳にはいかない」というような意見が出た．このような形で大学教育の足を引っ張ることもあることを改めて多くの人にご理解いただきたい．「・・・の定理を用いて解け．」といった様な問題はいかが

であろうか．その「・・・の定理」が過去の遺物となっていることも多い．入社・国家公務員試験で資格能力を試される際に，何が学生が知っているべき事柄で，学生をどのような能力で判断するべきなのか．大学と官庁・企業との緊密な情報交換が必要である．

大学での期末試験でも，演習で反復練習した問題の応用くらいなら比較的容易に得点できるが，本当は，始めて見る問題を限られた試験時間中に解くのに必要な基礎的な情報，例えば「重ね合わせの原理」等のような項目を教え，かつそれを確認できるような問題を出すべきであろう．過去の問題集を勉強する際，応々に陥る対策は単に解法を覚えることである．覚えた解法で解けるような問題のどこに力学の本質があるのか，教える側，あるいは出題する側は考え直す必要があろう．

教える内容に関する議論に時間を取られ，教え方にまで議論を発展させることが出来なかった．学生の理解や興味は，内容だけでなく教え方にも大きく依存している．教官の熱意が最も重要であることは間違いなかろうが，板書を写すことに追われるばかりの講義では，今の学生はついていけないかも知れない．情報機材をうまく組み合わせることにより，より効果的な教育が可能となることが期待される．現在既に実用化されている World Wide Web の Mosaic による利用に象徴されるインターネットを介した情報伝達手段は，従来の教育の方法を覆す可能性を秘めている．教材の蓄積と共用が容易となり，教官の負担を軽減することも可能と思われる．情報基盤は今後の社会基盤の中心的存在となることが予想される．いろいろな講義でそのような手段を利用することにより，高度情報化社会に適用できる人材を育成することも重要であると考えられる．

個々の教官がそれぞれ教育の問題に対して孤独な努力を重ねているのが現状である．どうしてもっと助け合うことが出来ないのであろうか？委員会の議論では，大学教官に，教え方について研修する機会が全くないことも一つの問題点であるという指摘があった．この委員会を通して，各委員の教育に関する考え方，教育に対する姿勢を互いに知り合っただけでなく，それぞれの教え方の工夫を披露頂いたことも大きな収穫であった．このような機会を拡げ，多くの教官との交流の場が持てれば，大学が抱える制度的弱点を補うことができるのではあるまいか．

最後に，この委員会では新しい試みとして，一部の委員の間で mailing list と呼ばれる電子的な媒体を通した議論および資料交換と回覧とを行った．今後の学会における研究委員会の在り方についても何等かの提案ができたのではないかと思っている．

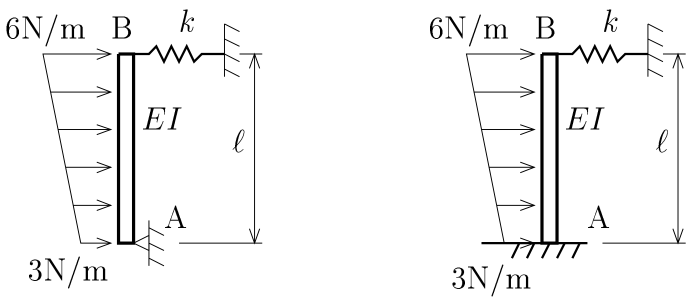
# 第 2 章

# 問題集

## 東京電気大学

### 目的

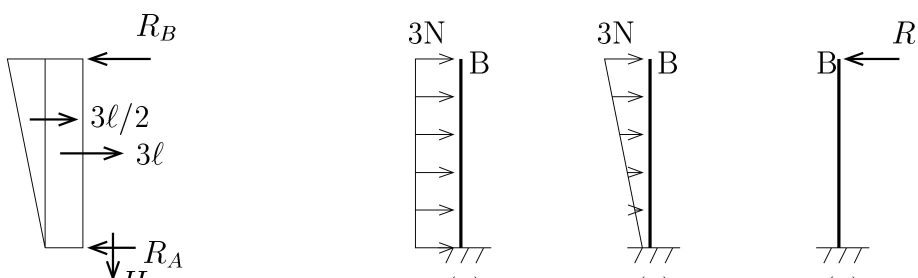
1. 台形の図心を公式無しで求められるか．
2. 三角形の図心を知っているか．
3. 適合条件を正しく理解しているか．
4. はりの変位が求められるか．




(a)　(b)

次の図 (a), (b) のバネの伸縮量を求めよ．

### 解答




(1)　(2)　(3)

**(a)** 上図の左の図より，

$$
\begin{aligned}
\ell\, R_B &- \frac{\ell}{2}\times 3\,\ell - \frac{2}{3}\,\ell \times \frac{3}{2}\,\ell = 0 \\
\therefore \quad R_B &= \frac{5}{2}\,\ell, \qquad \therefore \quad \delta_B = \frac{R_B}{k} = \frac{5}{2}\,\frac{\ell}{k}
\end{aligned}
$$

**(b)** これも上の図右の三つからそれぞれの変位成分が

$$\delta_B^{(1)} = \frac{3\,\ell^4}{8EI}, \quad \delta_B^{(2)} = \frac{11\,\ell^4}{40EI}, \quad \delta_B^{(3)} = -\frac{R\,\ell^3}{3EI}$$

となるから，結局バネの縮みは

$$\delta_B = \delta_B^{(1)} + \delta_B^{(2)} + \delta_B^{(3)} = \frac{R}{k}$$

より，

$$\therefore \quad R = \frac{13\ell^4}{20EI\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{\ell^3}{3EI}\right)}, \qquad \therefore \quad \delta_B = \frac{13\ell^4}{20EI\left(1 + \dfrac{k\,\ell^3}{3EI}\right)}$$

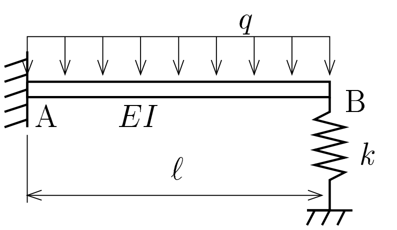
## 防衛大学校

### 目的

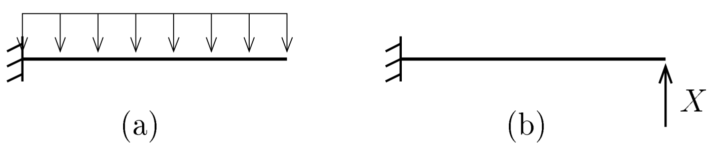
変形の適合条件を用いて不静定力を求める方法を学ぶ．

下図のようなバネ支持された片持ち梁について次の問いに答えよ．

1. バネ力 $X$ を求めよ．
2. $EI$ に比べて $k$ が極端に大きいとき， $X$ の値と梁はどのような状態になるか．
3. $EI$ に比べて $k$ が極端に小さいとき， $X$ の値と梁はどのような状態になるか．




### 解答




(a) (b)

上図のように静定基本系に分解すれば

$$v^{(a)} = \frac{q\,\ell^4}{8EI}, \quad v^{(b)} = -\frac{X\,\ell^3}{3EI}$$

であるから，バネの伸びが $X/k$ であることを考慮すれば，

$$v^{(a)} + v^{(b)} = \frac{q\,\ell^4}{8EI} - \frac{X\,\ell^3}{3EI} = \frac{X}{k}$$

より，

$$\therefore \quad X = \frac{\dfrac{q\,\ell^4}{8}}{\dfrac{\ell^3}{3} + \dfrac{EI}{k}}$$

もし $k$ が極端に大きくなると，上式で $EI/k \to 0$ とすればよく，

$$X \to \frac{3}{8}\,q\,\ell$$

つまり，左端固定・右端単純支持梁になる．

逆の場合には

$$X \to 0$$

つまり，片持ち梁になる．

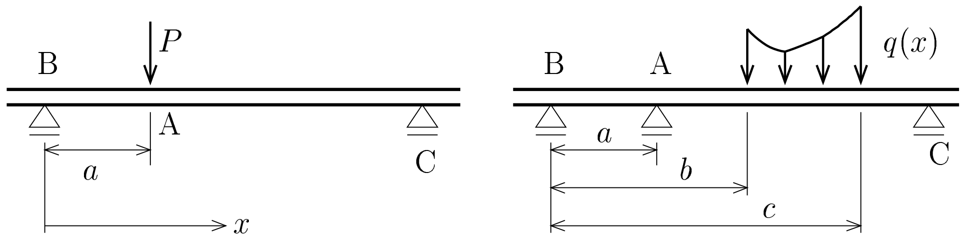
## 東北大学

### 目的

たわみの影響線が相反定理から容易に求まることと，重ね合わせの原理を理解する．

次の図の左のように N 径間 (N> 3) 連続梁のある区間 B–C に着目する．図のように座標 $x$ を定義する．左の支点から $a$ 離れた点 A に集中荷重 $P$ が作用した時のたわみ $v(x)$ が求まっているものとする．

同じ梁で，右図のように点 A より右方の $x=b$ から $x=c$ までの区間に任意の分布荷重 $q(x)$ を載せようとした．しかし，このたわみが思ったより大きくなりそうだったので，右図にも示したようにその点 A に新たに支承を設置することにした．このときの点 A に設置した支点が受け持つ反力を求めよ．ただし，分布荷重は支点 C より左方のみに位置するものとする．




### 解答

相反定理から $v(x)$ は点 A のたわみの影響線でもある．したがって左図の系で点 A に上向きに $X$ の集中力が作用した時のその点のたわみは $-X\times v(a)/P$ であり，左図の系に右図と同じ分布荷重だけが載った時の点 A のたわみは，影響線を用いて

$$\int_b^c q(x)\,\frac{v(x)}{P}\,dx$$

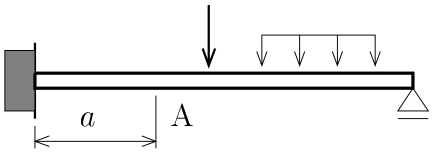
となる．右の系の支点反力を $X$ と考えれば，点 A は変位しないから上のふたつのたわみの重ね合わせは零になるはずであるから

$$X = \int_b^c q(x)\,\frac{v(x)}{v(a)}\,dx$$

## 東北大学

### 目的

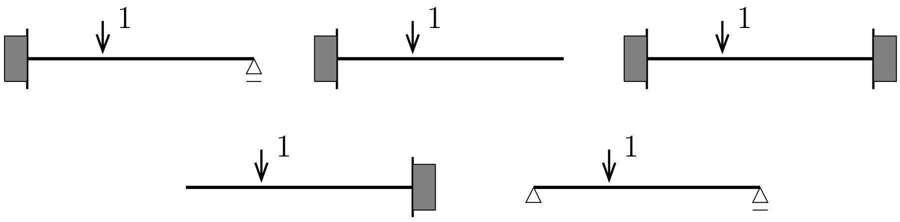
　モーメント図が求まった場合，ある特定の点のたわみを求める方法に「単位荷重法」がある．このときのアクセサリー問題には必ずしも元の問題を選ぶ必要がなく，制約条件さえ満足すれば簡単な静定系を用いればよいため，よく解説されているような「仮想仕事の原理」としての「単位荷重法」より本来パワフルな方法であることを理解させる．




　上図のような不静定梁の曲げモーメント分布 $M(x)$ が求まっている．任意点のたわみは微分方程式を解けば求まるが，ここでは左から $a$ 離れた点 A のたわみを単位荷重法で

$$\text{deflection} = \int_0^\ell \frac{M(x)\,\overline{M}(x)}{EI}\,dx$$

により求めたい．下図の系のうち， $\overline{M}(x)$ に使えない系をすべて選び，その理由を示せ．




### 解答

　オリジナルの問題はつり合い式と次の変位表示境界条件を満足している．

$$v(0)=0, \qquad v'(0)=0, \qquad v(\ell)=0, \qquad v''(\ell)=0$$

これに対し，単位荷重を作用させたアクセサリ系のたわみを $\overline{v_a}(x)$ と書くことにすると，このたわみは適切な境界条件と，次のつり合い式を満足する．

$$-(EI\,\overline{v_a}'')'' + \delta(x-a) = 0$$

この式に元の問題のたわみ $v(x)$ を乗じて全領域積分し，二回部分積分をして上の境界条件を考慮すると，

$$0 = \overline{M}(\ell)\,v'(\ell) - \int_0^\ell \frac{M(x)\,\overline{M}(x)}{EI}\,dx + v(a)$$

を満足する．アクセサリ系は必ずしも元の問題と同じではないので，これを仮想仕事式とは呼ばないことにする．よって， $v'(\ell)$ が既知でない限り， $\overline{M}(\ell)$ が零になるようなアクセサリ系を考えざるを得ない．したがって，右端が固定でない問題ならすべてアクセサリ問題となり，点 A のたわみは，上式から

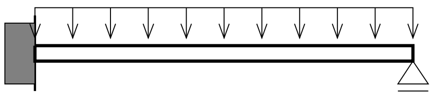
$$v(a) = \int_0^\ell \frac{M(x)\,\overline{M}(x)}{EI}\,dx$$

で求まる．つまり，右端が固定されている系の $\overline{M}(x)$ は使えない．

## 東北大学

### 目的

「単位荷重法」が上の問題のような性質を持っていれば，不静定モーメントを求めるのにも使えることを示す．




上図の不静定梁の曲げモーメント分布は，左端の不静定モーメント $-C_0$ が分かれば求まる．右端のたわみが零である条件と「単位荷重法」を用いてモーメント分布を求めよ．

### 解答

右端のたわみを求めるために左端が埋めこみの片持ち梁の先端に単位荷重を作用させたアクセサリ系を考える．この系のモーメント分布は

$$\overline{M}(x) = x - \ell$$

である．一方，元の系のモーメント分布は静定系との重ね合わせで

$$M(x) = -C_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{q_0}{2}\left(\ell x - x^2\right)$$

と表わせるから右端のたわみは

$$v(\ell) = \int_0^\ell \frac{M(x)\,\overline{M}(x)}{EI}\,dx$$

で求まり，これが零でなければならない条件から

$$\frac{1}{3}\,\ell^2\,C_0 - \frac{q_0\,\ell^4}{24} = 0 \quad\longrightarrow\quad C_0 = \frac{1}{8}\,q_0\,\ell^2$$

と不静定モーメントが求まる．

## 神戸大学

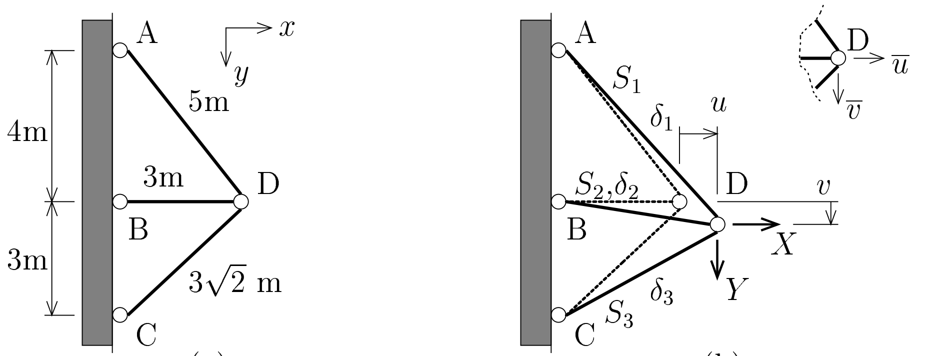
### 目的

適合条件を満足する系の仮想仕事式がつり合い式と等価であることを理解する．さらに，「応力法」と「変形法」の基本的な概念を論述させる．

下の図 (a) に示した不静定トラス構造について以下の問に答えよ．ただし各部材の剛性 $EA$ は同一とする．

1. 図 (b) に示すように点 D に作用する外力 $X, Y$ のもとでつり合い状態にあり，各部材力が $S_1, S_2, S_3$ であるとする．また，点 D で変位が $u, v$ であり，各部材の伸び量が $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ であるとする．いま，点 D において，仮想変位 $\overline{u}, \overline{v}$ を考えたときの仮想仕事式を書き，それから点 D でのつり合い式を求めよ．

2. 不静定構造物を解く方法として，一般に (1) 応力法， (2) 変形法がある．図 (b) に示すように外力を受けた不静定トラスの各部材力と点 D の変位を，この (1) あるいは (2) の方法で解く場合，その (それぞれの方法について，部材力と変位の両方を求めるまでの) 手順を具体的に論ぜよ．また，「最小仕事の原理」は，どこで，どのように用いることができるか．




(a) (b)

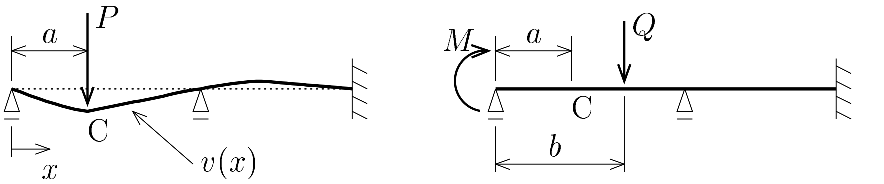
解答

## 神戸大学

目的

力学的許容系と運動学的許容系との間の相反定理を理解する．

下の図 (a) に示すように点 C に集中荷重 $P$ が作用したときの，不静定梁のたわみ曲線 $v(x)$ がわかっている．同じ梁に図 (b) に示す荷重 $M$ と $Q$ とが作用したときの，点 C のたわみ量 $\delta_C$ を求めよ．




(a) (b)

解答

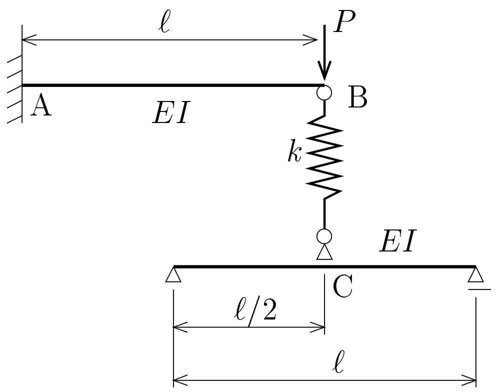
## 山梨大学

目的

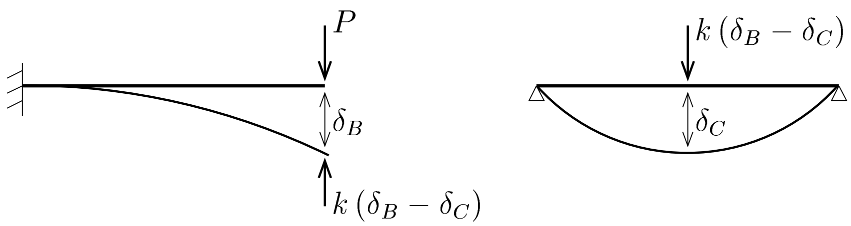
不静定梁の解法のひとつに不静定力法がある．不静定力法は，不静定梁が，静定梁に外力を作用させた構造系と静定梁に未知反力である不静定力を作用させた構造系との重ね合わせで表されることを利用して未知反力を求める方法である．不静定梁を含む複数の構造部材が組み合わされた (連結された) 構造系のつり合い状態を，個々の部材の重ね合わせであるとの観点から，ひとつひとつの部材 (構造系) に分解できるかどうか，また，個々の構造系相互間の変位や断面力等の関係を的確に把握できるかどうか，そして，不静定梁の解法に不静定力法が適用できるかどうかを問うための基本的な問題である．

下図に示す構造系の B 点に荷重 $P$ が作用した場合について，以下の問に答えよ．ただし，バネおよび梁の質量は無視でき， B 点， C 点は荷重作用後も同一直線上にあるものとする．

1. B 点の変位を $\delta_B$ ， C 点の変位を $\delta_C$ としたとき， B 点， C 点のそれぞれにバネによって作用する力を $\delta_B, \delta_C$ および $k$ を用いて表せ．
2. $\delta_B, \delta_C$ を $k, \ell, EI$ を用いて表せ．




解答




$\delta_B, \delta_C$ を下向き正 $(+)$，力の作用方向を下向き正 $(+)$ にとると，

B 点に作用する力 $k\,(\delta_C - \delta_B)$

C 点に作用する力 $k\,(\delta_B - \delta_C)$

片持ち梁の自由端に集中荷重 $P$ が作用したときの自由端の変位 $\delta_1$ が

$$\delta_1 = \frac{P\,\ell^3}{3EI}$$

一方，単純梁のスパン中央に集中荷重 $P$ が作用したときの載荷点の変位 $\delta_2$ が

$$\delta_2 = \frac{P\,\ell^3}{48EI}$$

であることから，上の図のように分解して考えると，それぞれの系に対して，

$$\delta_B = \frac{\{P + k(\delta_C - \delta_B)\}\,\ell^3}{3EI}, \quad \delta_C = \frac{k(\delta_B - \delta_C)\,\ell^3}{48EI}$$

となる．この二式より，

$$\delta_B = \frac{P\,\ell^3(48EI + k\,\ell^3)}{144(EI)^2 + 51\,EI\,k\,\ell^3}, \quad \delta_C = \frac{P\,\ell^3 \times k\,\ell^3}{144(EI)^2 + 51\,EI\,k\,\ell^3}$$

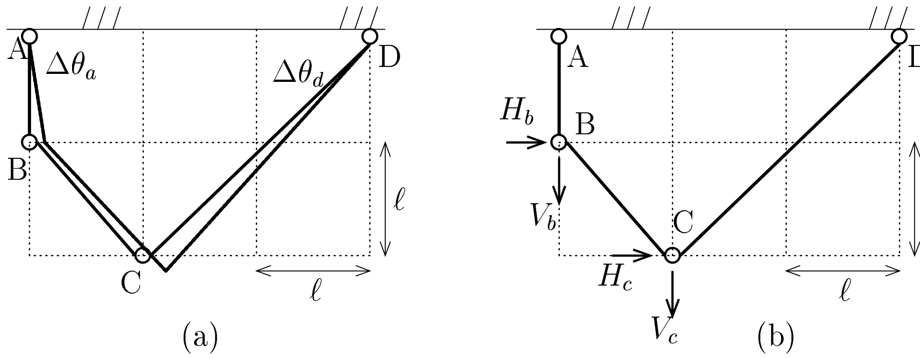
## 京都大学

目的

不安定トラスの変形とつり合い式を考える問題．初等的な方法でも解けるが，仮想仕事の式を用いれば簡単になる例題．

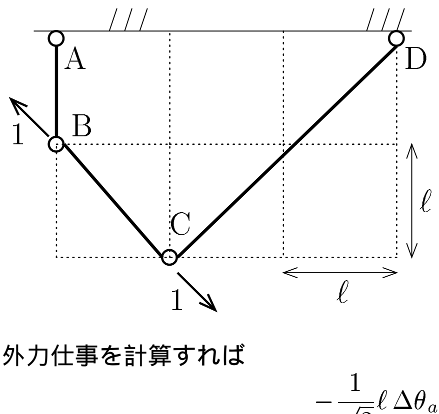
**(a)** 下図 (a) に示す不安定トラスが右方向にわずかにスイングした．支点 A および D における (反) 時計方向の角度の変化をそれぞれ $\Delta\theta_a, \Delta\theta_d$ とするとき，両者にどのような関係があるか．

**(b)** 下図 (b) に示すように不安定トラスの 2 つの節点に 4 つの外力が作用している．トラスが大きく変位することなくつり合うためには，外力にどのような関係が必要か．




解答

適当なつり合い系を考え，外力仕事を零と置く．簡単なつり合い系をみつけるのは容易ではないかもしれないが，例えば下図のように部材 BC の両端にそれに平行な 2 つの外力を作用させたものは，明らかにひとつのつり合い系である．




外力仕事を計算すれば

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ell\,\Delta\theta_a + 2\sqrt{2}\ell\,\Delta\theta_d = 0$$

となり， $\Delta\theta_a = 4\,\Delta\theta_d$ を得る．

次に，適当な変形した系を考え，外力仕事を零と置く．ここでは先の問題の変形した系をとりあげる．外力仕事を計算すれば，

$$H_b\ell\,\Delta\theta_a + 2\sqrt{2}\left(\frac{H_c}{\sqrt{2}} + \frac{V_c}{\sqrt{2}}\right)\ell\,\Delta\theta_d = 0$$

となり，上の結果を利用して，

$$2\,H_b + H_c + V_c = 0$$

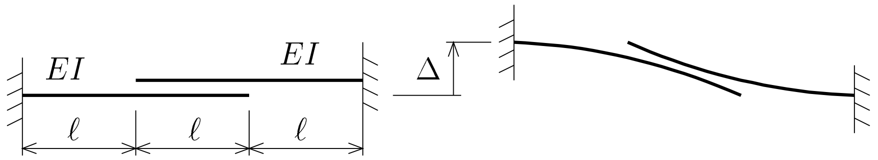
を得る．

## 京都大学

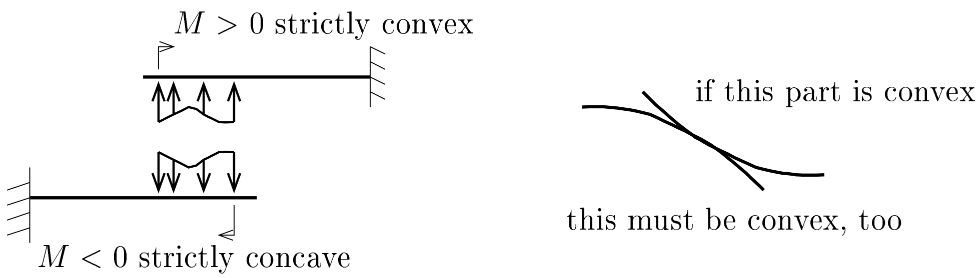
目的

$M = -EI\,v''$ が意味することを理解し，頭の中で変形のパターンを想像できるようにする．接触問題が重要であるとは考えていない．

2 本の片持ち梁を図のように接触させた．左支点が $\Delta$ だけ上昇したときの梁の間に作用する力を求めよ．ただし，梁の間には粘着力 (引っ張り) は働かないものとする．

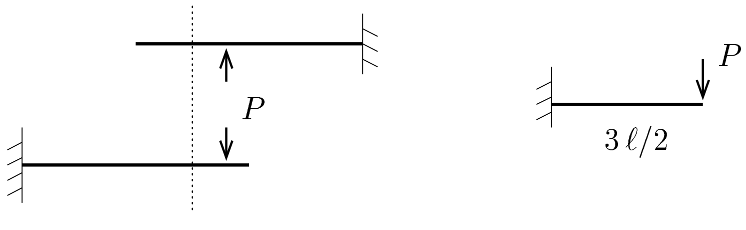



解答




(a) (b)

有限幅で梁が接触すると上図 (a) のようになる．しかし梁同志が接触するのであるから，図 (b) のようなことになり，結局 (a) と矛盾する．したがって梁は一点で接触しなければならない．




(a) (b)

ところが，接触点ではたわみ角がそれぞれの梁で等しくならなければならないので，上図 (a) の接触力 $P$ の作用点は重なっている部分の中央でなければならない．よって，図 (b) を参照して，

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{P\left(\dfrac{3\ell}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{3^2\,P\,\ell^3}{2^3\,EI}$$

となり，これより

$$P = \frac{4\,EI\,\Delta}{9\ell^3}$$

## 京都大学

目的

　梁の境界値問題に対する洞察力を養うことを目的とする．解答を見れば明らかなように，梁の力学の基本さえ理解しておれば，特別な知識を持たなくとも，また，複雑な計算をしなくとも解ける．接触問題が重要であるとは考えていない．

　下図左の梁に等分布荷重 $q$ を作用させ続けるとやがて梁は床に接するであろう． $q$ と反力分布の関係を求めよ．なお，床には粘着性はないものとする．


解答

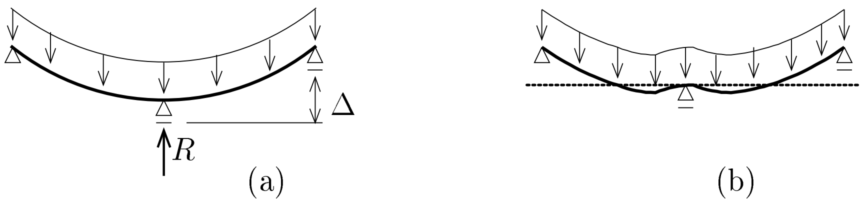
　床に接するのは単純支持梁の中央のたわみが $\Delta$ になる時，つまり，

$$\Delta = \frac{5\,q\,\ell^4}{384\,EI}$$

の時である．この状態から $q$ を増加させていくと，しばらくは節点 (上右図の $R$) で集中反力を生ずる．つまり，分布荷重とこの集中反力によるたわみが $\Delta$ であり続ける間は，

$$\frac{5\,q\,\ell^4}{384\,EI} - \frac{R\,\ell^3}{48\,EI} = \Delta \quad \longrightarrow \quad R = \frac{5\,q\,\ell}{8} - \frac{48\,EI\,\Delta}{\ell^3}$$

ところが，これは要するに下図の (a) の状態であり，さらに $q$ が大きくなり過ぎると図の (b) になってしまう．



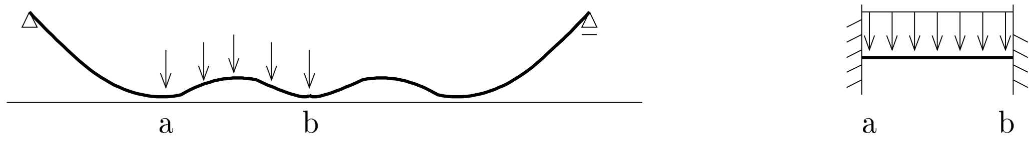

　これでは具合が悪い．つまり図から明らかなように一点で接触して反力が生じている状態の限界は，接点での曲率 $-v''$ の符号が正から負に変化する (つまり $v''=0$ の) 点である．中点でのモーメントは曲率と同じ符号であるから，それより

$$M = -EI\,v'' = \frac{q\,\ell^2}{8} - \frac{\ell\,R}{4} = \frac{12EI\,\Delta}{\ell^2} - \frac{q\,\ell^2}{32} = 0$$

になる場合ということから

$$q = \frac{384\,EI\,\Delta}{\ell^4}$$

までが一点接触をすることになり，これより大きい $q$ では一点での接触は不可能となり，ある幅を持った接触となる．しかし，そのときであっても浮き上がりは有り得ない．もし仮に浮き上がりがあるとすると，次の図の (a) のようになるはずだが，

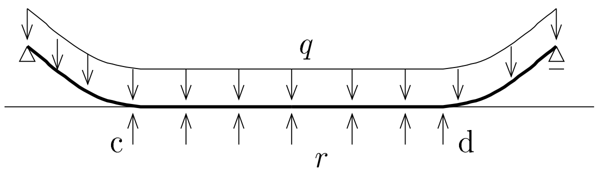



(a) (b)

この図の a, b 間は，剛体変位を除けば図の (b) のように両端固定の状態と同じことになるはずである．境界値問題としては，

$$EI\,v'''' = q, \qquad v(a) = v(b) = \text{const.}, \qquad v'(a) = v'(b) = 0$$

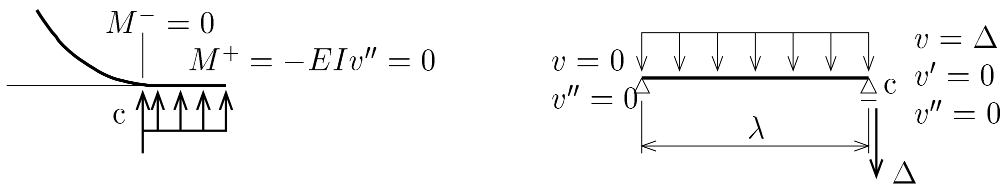
となるが，この問題でたわみが上向きになることは有り得ないので，浮き上がりは不可となる．したがって，梁は中央のある区間で下図のように床に接触する．




この c, d 間での分布反力を $r(x)$ とすると，つり合い方程式は

$$EI\,v'''' = q - r$$

となるが， $v = \Delta$ (一定) なので， $r = q$ (一定) となる．点 c の右側では $v = \Delta$ より，$M^+(a) = 0$ となる．下の図 (a) を参照すれば，




点 c でのモーメントのつり合いより， $M^-(a) = 0$．よって，梁の点 c より左側に注目すれば，図の (b) の境界値問題を得る．これより，

$$\frac{\Delta}{\lambda} - \frac{q\,\lambda^3}{24\,EI} = 0, \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = \sqrt[4]{\frac{24\,EI\,\Delta}{q}}$$

この接触し始める点には集中反力が生じ，その大きさは

$$\frac{q\,\lambda}{2}$$

である．

以上をまとめると次のようになる．

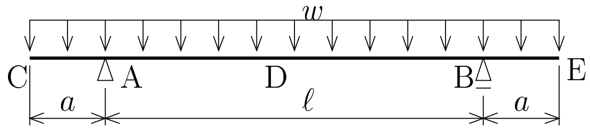
| | |
|---|---|
| if $q < \dfrac{384\,EI\,\Delta}{5\,\ell^4}$ | no contact, no reaction |
| if $\dfrac{384\,EI\,\Delta}{5\,\ell^4} \le q < \dfrac{384\,EI\,\Delta}{\ell^4}$ | reaction of $\dfrac{5\,q\,\ell}{8} - \dfrac{48\,EI\,\Delta}{\ell^3}$ at the center |
| if $\dfrac{384\,EI\,\Delta}{\ell^4} \le q$ | contact at the distance $\lambda \equiv \sqrt[4]{\dfrac{24\,EI\,\Delta}{q}}$ away from the edges |

## 八戸工業大学

### 目的

せん断力図と曲げモーメント図を，荷重，せん断力および曲げモーメントが微積分の関係にあることを利用して，簡単に描く方法を理解する．

次の図のせん断力図と曲げモーメント図を描きなさい．




### 解答

反力は

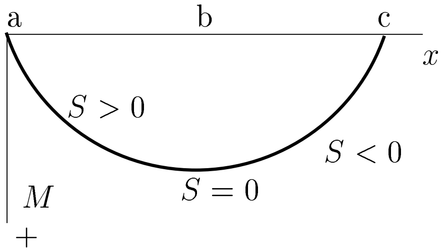
$$V_A = V_B = \frac{w(\ell + 2\,a)}{2}$$

せん断力図の描き方

1. 材端に集中力が作用していないため， $S = 0$ ．
2. $S$ 図の勾配は，荷重の符号を替えたもの．
3. $-w$ の勾配で $a$ だけ進むと $-a\,w$ ．
4. A 点では集中力 (反力) を受けているため， $-a\,w + V_A$ から $w\,\ell/2$ ．
5. $S$ 図の勾配は，荷重の符号を替えたもの．
6. $-w$ の勾配で $\ell$ だけ進むと $-w\,\ell/2$ ．
7. B 点では集中力 (反力) を受けているため， $-w\,\ell/2 + V_B$ から $a\,w$ ．
8. $S$ 図の勾配は，荷重の符号を替えたもの．
9. $-w$ の勾配で $a$ だけ進むと $0$ ．

曲げモーメント図の描き方

荷重が一定値のときは，せん断力図は 1 次関数，曲げモーメント図は 2 次関数であり，せん断力の正負と曲げモーメント図の関係を示すと次のようになる．




1. 材端に集中モーメントが作用していないため， $M = 0$ ．
2. $M$ 図の勾配は $S$． $S = 0$ から $S < 0$ の区間の $M$ 図は，上図の b–c 区間の形があてはまる．

3. A 点の $M$ $(M_A)$ は，$S$ 図の A 点までの面積であるから，$M_A = (-a\,w)\,a/2$．

4. AB 間の $M$ は $S$ 図の符号から，上図の a–c 区間．

5. D 点の $M$ は，AD 区間の $S$ 図の面積を使って $M_A + (w\,\ell/2)\,(\ell/2)\,(1/2)$．

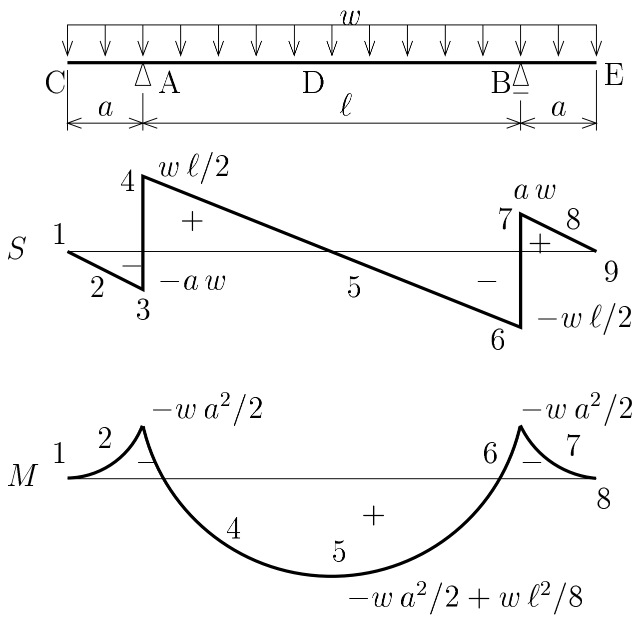
6. B 点の $M$ は，DB 区間の $S$ 図の面積を使って $M_D + (-w\,\ell/2)\,(\ell/2)\,(1/2)$．

7. B 点から右側は，この間の $S$ 図の符号から上図の a–b 区間．

8. E 点の $M$ は，BE 区間の $S$ 図の面積を使って $M_E + (-a\,w)\,a/2$．

以上で必要な知識は

$$
S = -\int w\,dx, \qquad M = \int S\,dx
$$
$$
\frac{dS}{dx} = -w, \qquad \frac{dM}{dx} = S
$$




図中の番号は作業順序と対応している．

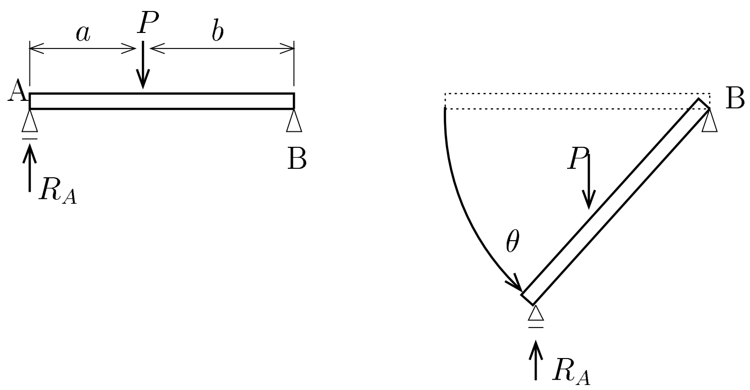
さらに，技報堂出版の「構造工学」(宮本裕　他著) の p.168 および p.172 のたわみ角法によるラーメン解析も挙げられたが，既出版であることを考え省略した．

## 岐阜大学

### 目的

力学における最も重要な原理である『仮想仕事の原理』において，与えるべき仮想の変位は常に『微小』であると信じられている．本当にそうであろうか．

下の図において，左支点 A の鉛直支点反力 $R_A$ を求めるのに，有限な仮想の回転角 $\theta$ を与えても結果は正しく求まる．この場合，『微小』ではない仮想変位を与えても『仮想仕事の原理』が成立するのはなぜか，その理由を考えよ．




解答

ここで $\sin\theta \sim \theta$ と微小近似する必要はない．仮想仕事を計算すると，

$$+P\,b\,\sin\theta - R_A\,(a+b)\,\sin\theta = 0 \quad\longrightarrow\quad R_A = \frac{b}{a+b}$$

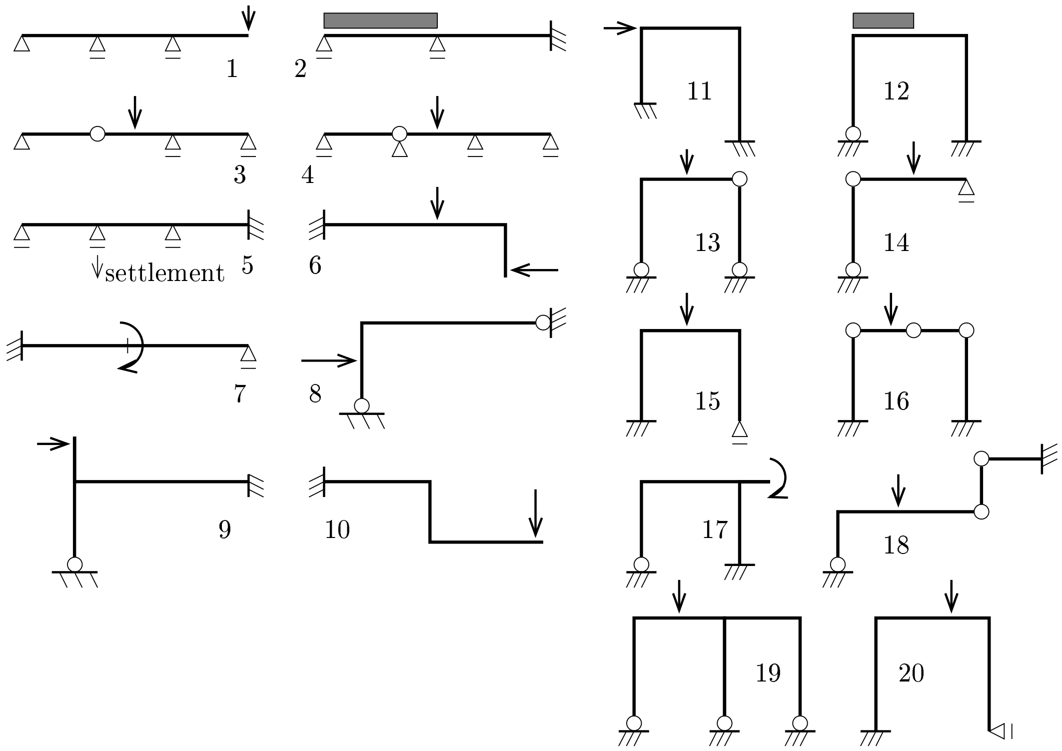
となるが，式中の sin は二項共通である．この荷重条件においては，有限の回転角 $\theta$ を与えても，力のつり合い関係が乱されることがない．与えた仮想変位は明らかに点 B まわりのモーメントのつり合いから $R_A$ を求めることを意図したものである．

## 岐阜大学

目的

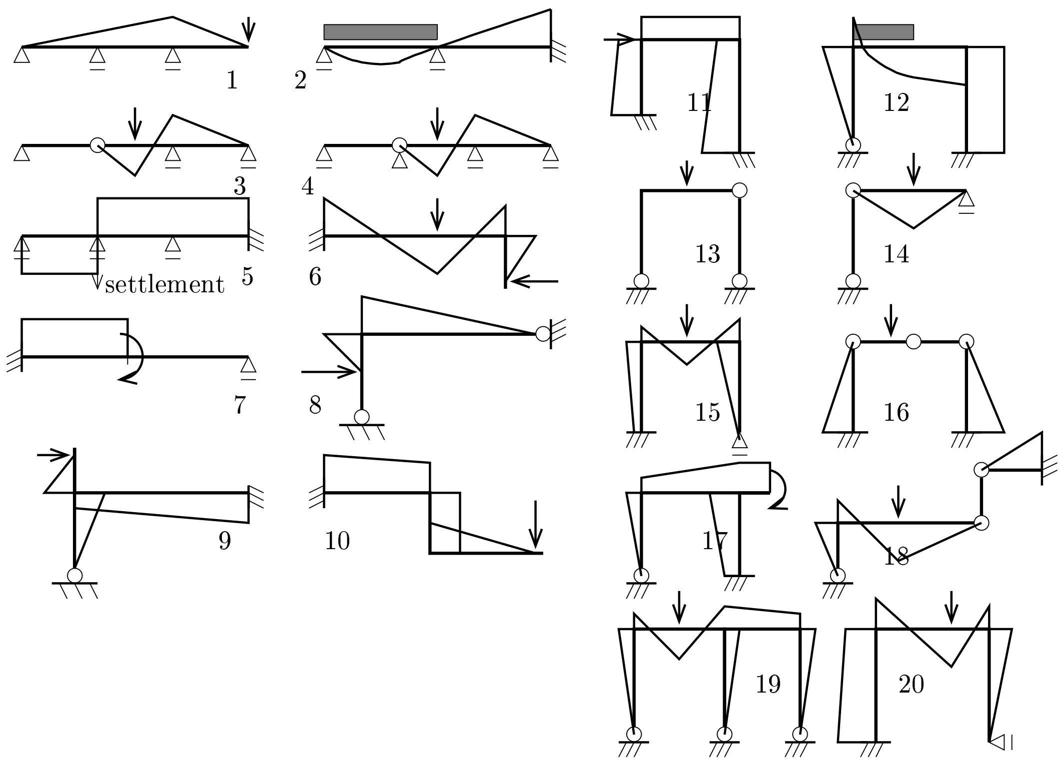
コンピュータ多用の時代においては，計算能力つまり『定量解析』そのものよりも，力学挙動を工学的な良識・常識を用いて『定性解析』する方がより重要になってくる．計算せずとも定性的判断で，ある程度は結果が見えてくるはずである．

図は文献 (Brohn, D. M. and Cowan J. : Teaching towards an improved understanding of Structural Behaviour, Structural Engineer, 55, 1, January pp.9–17, 1977.) より直接引用した例題である．曲げモーメントをフリーハンドで描かせるが，解答時間は一時間．




答案の例

英国で大学院レベルの構造系の学生にやらせて，正解率の平均が 36 から 49% であった．下図は，英国における比較的成績の悪い学生の解答例である．




問題によっては間違いが容易に指摘できるものもあるが， No. 13, 15, 18 の 3 題などは成績の良い院生でさえ共通して間違えたものである．この引用文献で指摘された重要な結

論は，原文ままで紹介すると以下のようであった．

> **General conclusions**
>
> It now only remains to consider the lessons which have been learnt from these extended developments of a test of ability and a learning package, both of which relate to an analytical approach to work which cannot be quantified.
>
> Having studied what has been described as the topic of qualitative analysis, and by considering it as a separate item in a structural engineering curriculum, the writers have reached a number of interim conclusions:
>
> 1. The qualitative analysis of structures is an important topic in a structural engineering curriculum, Neglect of this section of the syllabus will entail the production of graduates whose 'understanding' of structural behaviour in unacceptably weak, when assessed by standards which are generally accepted in the profession.
> 2. Qualitative analysis is unlikely to be learnt as a byproduct of quantitative analysis. It is worthy of consideration and treatment in its own right, and requires special attention in the curriculum.
> 3. The existence of varied personal preferences or inclinations, leading to radically different individual problem-solving methods in qualitative analysis, can greatly complicate the choice of teaching strategies in this field. New and unusual methods of teaching may well prove more effective in teaching qualitative analysis than do conventional approaches.

さらに，土木学会誌 1985 年 12 月号掲載の「Prüfstatik の必要性」における例題もふたつ挙げられたが，既出版であることを考え省略した．

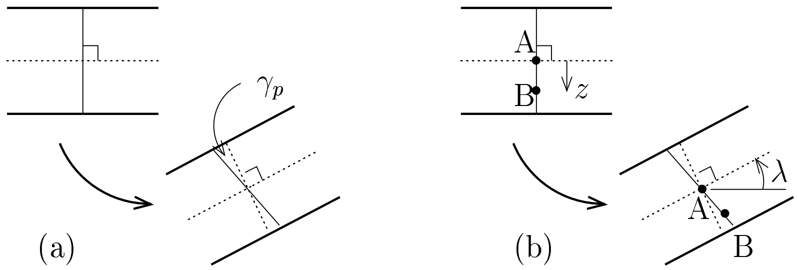
## 東京大学

### 目的

これは 2 年後期から始まる最初の構造力学の講義における学期末試験で出題した問題である．構造力学の本質は例えば棒材に力が加わった時に何が起こるかという物理的問題を境界値問題という数学的問題に置き換えるところにあると考え，棒材の支配方程式の誘導に焦点を当て講義を行っている．この問題では，仮定 = モデル化によって二次元の問題が一次元の問題になるという点を理解しているかを試している．なお，この学期では棒材の境界値問題を設定し，その解を求めるところまでをカバーしている．

1. 棒材の支配方程式においては，(1) 平面直角保持の仮定，(2) 断面形状不変の仮定，(3) 微少変位の仮定が用いられている．それぞれの仮定がどのように使われているかを具体的に，かつ簡潔に説明せよ．

2. 平面直角保持の仮定が成り立たず，下図 (a) のように，変形前に軸線に直行する平面が，変形後は軸線と $\gamma_p$ の角度をなす平面となるものとする．任意の点 $x,\ y$ における変位 $u_z(x,z),\ w_z(w,z)$ を軸線上の点における変位 $u(x),\ w(x)$ と $\gamma_p(x)$ を用いて表せ．ただし，$\gamma_p(x) \ll 1$ とする．



(a) (b)

解答

1. 上図 (b) において，仮定 (1) より線分 AB の回転角は $\lambda$ となり，仮定 (2) より線分 AB の長さは $z$ となる．このことより，棒材の任意点 $(x,z)$ の変位 $u_z(x,z),\ w_z(x,z)$ は，軸線上の点 $(x,0)$ の変位 $u(x),\ w(x)$ を用いて

$$
\begin{aligned}
u_z(x,z) &= u(x) + z\sin\lambda \\
w_z(x,z) &= w(x) + z\cos\lambda - z
\end{aligned}
$$

と表される．さらに，仮定 (3) より

$$
\begin{aligned}
\sin\lambda &\approx \lambda = -\frac{dw}{dx} \\
\cos\lambda &\approx 1
\end{aligned}
$$

となるため，

$$
\begin{aligned}
u_z(x,z) &= u(x) - z\frac{dw(x)}{dx} \\
w_z(x,z) &= w(x)
\end{aligned}
$$

となる．あとはひずみ変位関係式，応力ひずみ関係式，断面力の定義式を用いることにより，断面力と軸線上での変位 $u(x),\ w(x)$ の関係が求まる．その関係を釣合方程式に代入すれば，$u(x),\ w(x)$ に関する常微分方程式が導かれる．

2. 断面の回転角は軸線の回転角 (たわみ角) $\lambda = -\frac{dw}{dx}$ とせん断変形による角度 $\gamma_p(x)$ との和であるから，

$$
\begin{aligned}
u_z(x,z) &= u(x) + z\sin(\lambda + \gamma_p) \\
w_z(x,z) &= w(x) + z\cos(\lambda + \gamma_p) - z
\end{aligned}
$$

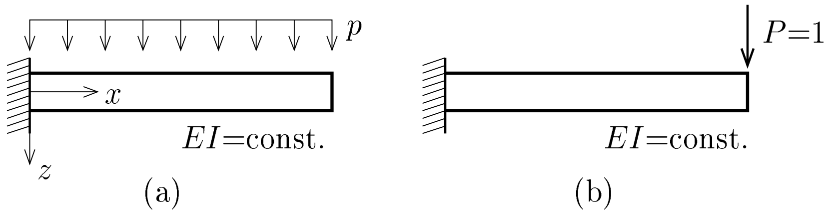
$\gamma_p(x) \ll 1$ であるから，

$$
\begin{aligned}
u_z(x,z) &= u(x) \ - \ z(\frac{dw(x)}{dx} - \gamma_p(x)) \\
w_z(x,z) &= w(x)
\end{aligned}
$$

## 東京大学

### 目的

これは大学院修士課程の入学試験問題に手を加えたものである．3 年前期の構造力学の講義で境界値問題の弱形式の説明をし，弱形式を力学では歴史的に仮想仕事の原理と呼ぶこと，弱形式から単位荷重の定理が導かれることなどを教えている．この問題は，これらのことが理解できるかを試している．




上図 (a) の等分布荷重を受ける片持ち梁（等断面）の右端における鉛直方向変位 $w(\ell)$ は次式で与えられる．

$$w(\ell) = \int_0^\ell \frac{M\overline{M}}{EI} dx \tag{2.1}$$

ここで，$M = M(x)$ は図 (a) の梁における曲げモーメントの分布を表し，$\overline{M} = \overline{M}(x)$ は図 (b) の梁における曲げモーメントの分布を表すものとする．

1. 図 (b) の梁の変位を $\overline{w}(x)$ とする．$\overline{w}(x)$ が満たすべき支配方程式と境界条件を書け．

2. $\overline{w}(x)$ が 上の問題 1. の境界値問題の解であるとき，$w(0) = 0,\ w'(0) = 0$ を満足する任意の関数 $w(x)$ に対して，次式が成り立つことを示せ．

$$w(\ell) = \int_0^\ell EIw''\overline{w}''dx \tag{2.2}$$

任意の関数 $w(x)$ を仮想変位とすれば，式 (2.2) は図 (b) の問題に対する仮想仕事の式となっている．また，$w(x)$ を図 (a) の梁のたわみとすれば，式 (2.2) は図 (a) の問題に対する補仮想仕事の式を表している．

3. 式 (2.1) を導け．

### 解答

1.

$$EI\overline{w}'''' = 0, \qquad 0 < x < \ell$$

$$\overline{w}(0) = 0, \quad \overline{w}'(0) = 0, \quad -EI\overline{w}''(\ell) = 0, \quad -EI\overline{w}'''(\ell) = 1$$

2. 任意の関数 $w(x)$ に対して

$$\int_0^\ell EI\overline{w}''''wdx$$

$$= [EI\overline{w}'''w - EI\overline{w}''w']_0^\ell + \int_0^\ell EI\overline{w}''w''dx = 0$$

$w(0) = 0,\ w'(0) = 0$，及び $\overline{w}$ の境界条件を代入すれば式 (2.2) を得る．

3. $\overline{M} = -EI\overline{w}''$ である．任意関数 $w(x)$ を図 (a) の梁の変位とすれば，$M = -EIw''$ であり，これらを式 (2.2) に用いれば式 (2.1) が得られる．

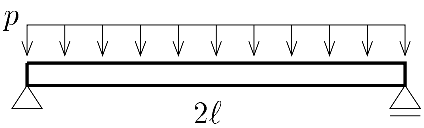
## 東京大学

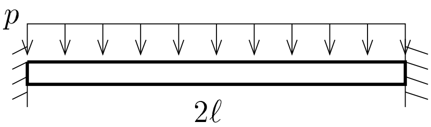
目的

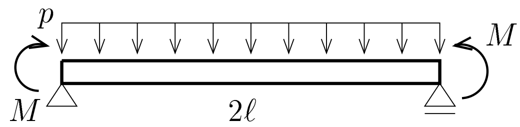
同一の外力が働く際，境界条件の違いによって，外力が梁に加える仕事がどのように変化するのかを調べる．境界条件の違いを端部での反力の違いに置き換えて，境界条件の影響を見る．

スパン $2\ell$，曲げ剛性 $EI$ の梁に一様分布荷重 $q$ が働く場合を考える．

1. 両端が単純支持の場合，分布荷重が梁に与える仕事 $W_1$ を計算せよ．
2. 両端が剛接されている場合，分布荷重が梁に与える仕事 $W_2$ を計算せよ．
3. 単純支持された両端にモーメント $M$ を加える．分布荷重が梁に与える仕事 $W = W(M)$ を計算せよ．
4. $M$ がいくつの時に，$W(M)$ は問題 1. や 2. の場合の仕事，つまり $W_1$ あるいは $W_2$ に一致するか．また単純支持された場合の最大モーメント $M_{\max}$ を計算し，$W_2$ に $W(M)$ が一致する場合の $M$ と大きさを比較せよ．

(1)



(2)



(3)



解答

対称性を利用して，支配方程式を

$$EI\,\frac{d^4 w}{dx^4} = p, \qquad |x| < \ell$$

と書く．一般解は対称性を満たす同次解 $A + B\,x^2$ と特解 $p/(24EI)\,x^4$ との和で与えられる．同次解の未知定数 $A$ と $B$ とは境界条件から決定される．

1. 境界条件は $x = \pm\ell$ で $w = 0$ と $w'' = 0$ である．したがって，$A = p/(24EI)\,5\ell^4$ と $B = -p/(24EI)\,6\ell^2$ を得る．仕事は，$z$ 方向の変位であるたわみと荷重の積の $1/2$ であるから，
$$W_1 = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2}\,p\,w(x)\,dx = \frac{p^2}{24\,EI}\,\frac{16\,\ell^5}{5}$$
を得る．

2. 境界条件は $x = \pm\ell$ で $w = 0$ と $w' = 0$ である．したがって， $A = p/(24EI)\,\ell^4$ と $B = -p/(24EI)\,2\ell^2$ を得る．仕事は

$$W_2 = \frac{p^2}{24\,EI}\frac{8\,\ell^5}{15}$$

を得る．

3. 境界条件は $x = \pm\ell$ で $w = 0$ と $EI\,w'' = M$ である．したがって， $A = p/(24EI)\,(5\ell^4 - 12\,M\,\ell^2/p)$ と $B = p/(24EI)\,(-6\ell^2 + 12\,M/p)$ とを得る．仕事は

$$W(M) = \frac{p^2}{24\,EI}\left(\frac{16\,\ell^5}{5} - \frac{8\,M\,\ell^3}{p}\right)$$

となる．

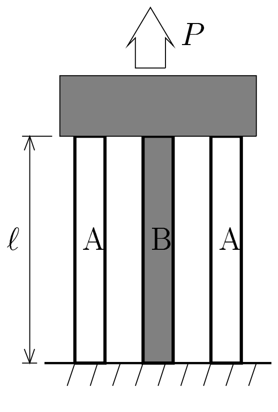
4. $W(M) = W_1$ と $W(M) = W_2$ となるのは， $M = 0$ と $M = 1/3\,p\ell$ の時である．単純支持の場合，モーメントは中央で最大になり， $M_{\max} = 1/2\,p\ell^2$ となる．したがって， $W(M) = W_2$ とする $M$ は $M_{\max}$ の $2/3 = 67\%$ である．なお， $M = 1/3\,p\ell^2$ のモーメントが作用する場合，定数 A と B も問題 2. の場合の定数と一致し，梁のたわみ，曲率，モーメント，せん断力の分布も問題 2. の場合と同じになる．

## 法政大学

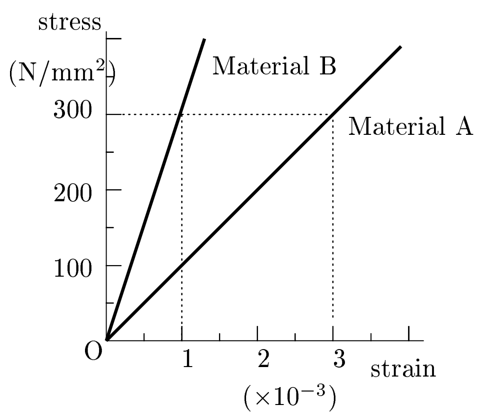
### 目的

学生は梁のたわみや応力の計算は得意である．その際，ヤング率などの応力とひずみの関係に関する情報が必要であるが，その意味を十分には理解せず，機械的に計算することが多いようだ．ここでは応力 – ひずみ関係 (構成則) と部材の変形・応力の関連を理解することを目的とする．

下図 (a) に示すように二種類の材料 (A, B) からできた 3 本の棒が剛体により接合されている．この剛体には荷重 $P$ が作用している．材料 A, B の応力 – ひずみ関係は下図 (b) に示す通りである．また各棒の長さは 1m，断面積はいずれも 100mm$^2$ である．荷重 $P$ が 50kN のときの棒の伸びと各棒に生ずる応力を求めよ．




(a)




(b)

解答

図 (b) より材料 A および B の応力 – ひずみ ($\sigma$-$\epsilon$) 関係は式 (2.3) で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\text{Material A} \quad &: \quad \sigma_A = E_A\,\epsilon_A = (300/3.0\times10^{-3})\cdot\epsilon_A = 1.0\times10^5\ \cdot\epsilon_A \\
\text{Material B} \quad &: \quad \sigma_B = E_B\,\epsilon_B = (300/1.0\times10^{-3})\cdot\epsilon_B = 3.0\times10^5\ \cdot\epsilon_B \qquad (2.3) \\
& \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

力のつり合いより，次式 (2.5) が成り立つ．

$$2\,\sigma_A\,A_A + \sigma_B\,A_B = P \qquad (2.5)$$

この式 (2.5) に式 (2.3) を代入すると，

$$2\,1.0\times10^5\,\epsilon_A\,A_A + 3.0\times10^5\,\epsilon_B\,A_B = P \qquad (2.6)$$

問題の設定より $\epsilon_A = \epsilon_B,\ A_A = A_B = A\ (100\mathrm{mm}^2)$ である．これを式 (2.6) に代入し，整理すると，

$$\epsilon_A = \epsilon_B = P/A(5.0\times10^5) \qquad (2.7)$$

となる．これに所定の数値を代入することにより，

$$\epsilon_A = \epsilon_B = 1.0\times10^{-3}$$

が得られる．したがって，各棒の伸びは，

$$1.0\times10^{-3}\times1000 = 1.0\mathrm{mm}$$

棒 A, B に生じる応力 $\sigma_A, \sigma_B$ は式 (2.3) より以下のようになる．

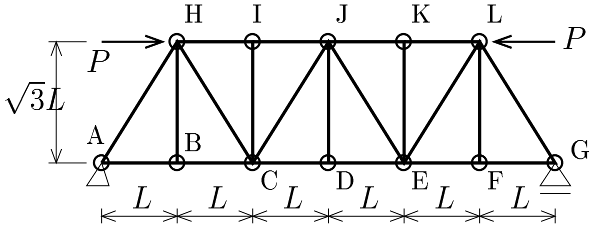
$$
\begin{aligned}
\sigma_A &= 1.0\times10^5\ \cdot 1.0\times10^{-3} = 100\mathrm{N/mm}^2 \\
\sigma_B &= 3.0\times10^5\ \cdot 1.0\times10^{-3} = 300\mathrm{N/mm}^2
\end{aligned}
$$

## 九州工業大学

目的

「仮想仕事の原理」に対する理解を深める．

下図のトラスの節点 C における鉛直変位 $v_C$ を求めよ．ただし，各部材の剛性 $EA$ は等しいものとする．



解答

軸力が作用するのは上弦材だけで，その大きさは $-P$ である．またアクセサリー系として節点 $\mathrm{C}, \mathrm{E}$ に鉛直下向きに単位の大きさの荷重を作用させたものを考える．この系においては，上弦材に $-2/\sqrt{3}$ の軸力が作用している．前者を運動学的許容系，後者を力学的許容系として「仮想仕事の原理」を適用すれば，次式が得られる．

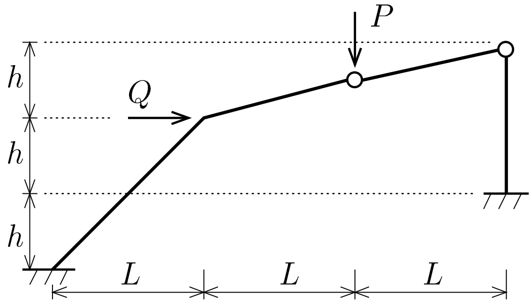
$$v_C + v_E = \frac{L}{EA}\left(\frac{2P}{\sqrt{3}}\right)$$

対称性より $v_C = v_E$ であるから，

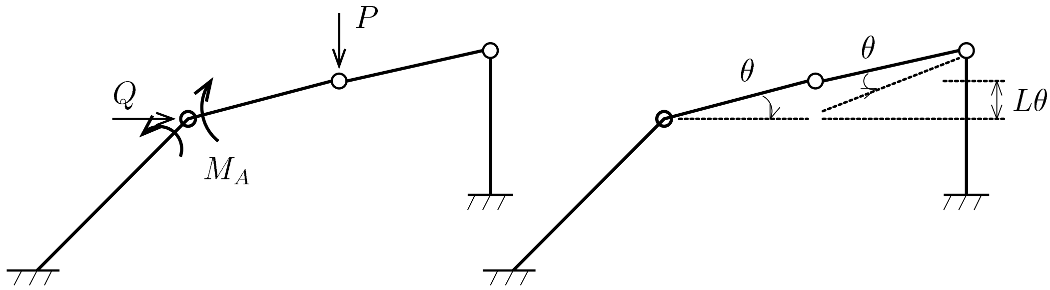
$$v_C = \frac{4PL}{\sqrt{3}EA}$$

と求まる．

下図のラーメンの節点 A における曲げモーメント $M_A$ を求めよ．




解答



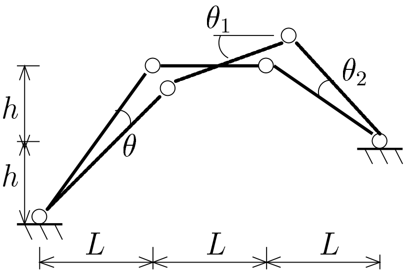

節点 A をヒンジ結合とし，代わりに $M_A$ を作用させた系を考える．次にこの系のメカニズム運動を考え，前者を力学的許容系，後者を運動学的許容系として「仮想仕事の原理」を適用すれば，次式が得られる．

$$PL\theta + M_A\theta = 0$$

これより

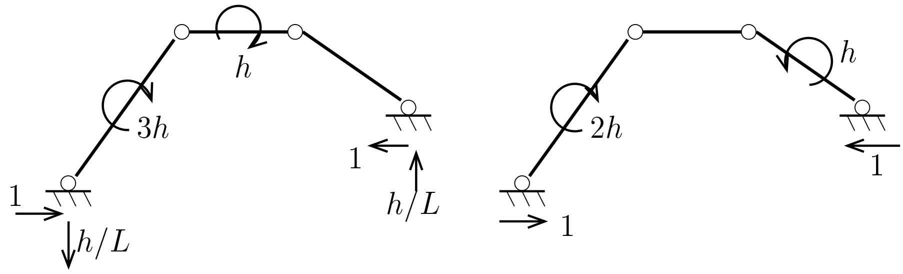
$$M_A = -PL$$

下図のようなメカニズム運動において生じる回転角 $\theta_1, \theta_2$ はそれぞれ $\theta$ の何倍になるか求めよ．




解答

下の 2 つの系を考える．




問題に与えられた系を運動学的許容系，系 1 を力学的許容系として「仮想仕事の原理」を適用すれば，次式が得られる．

$$3h\theta - h\theta_1 = 0$$

よって

$$\theta_1 = 3\theta$$

次に系 2 を用いれば，

$$2h\theta - h\theta_2 = 0$$

これより

$$\theta_2 = 2\theta$$

# 第 3 章

# 現状でのカリキュラム例

研究討論会資料等にあるので省略

# 第 4 章

# 力学教育 —— 大学で何をどう教えるべきか

研究討論会資料等にあるので省略

# 第 5 章

# 構造工学委員会：力学教育研究に関する小委員会

研究討論会資料等にあるので省略