第 12 章

有限変形理論を直感で噛み砕く

12.1　有限変形って?

「有限変形」は英語の ‘finite deformation’ の訳であるが，これは ‘infinitesimal deformation’ つまり「微小変形」に対峙させたものであり，いわゆる「大変形」に相当すると習った。「限りが有る」という意味ではない。多分，「大変形」という日本語にすると ‘large deformation’ と捉えられてしまい，材料の非線形性も必ず伴うような印象を与えてしまうので，それと区別したとも推測される。この章は，材料の抵抗則が線形か非線形かによらず，変位や変形（ひずみ）の大きさに制限を設けない場合[1]の定式化，つまり幾何学的な非線形性を保持した定式化について解説する。ところで，弾性座屈のように変位は大きくても変形（ひずみ）が大きいとは限らない場合もあるし，逆に，変形が大きい（非線形になる）場合に必ずしも変位が大きくなるとは限らない。このようなことから判断して，変位と変形は厳密に区別すべきであることには留意して欲しい。ただし，この章のタイトルを「有限変形」としているが，変位の大きさにも制限を設けないものとする。さて，この章のほとんどの記述では数学的表現の正確さを保持しようとしているため，初学者は特に，京谷孝史先生が述べている [129] ように数学と物理学の区別あるいは対応を常に考えながら勉強する必要がある。著者もこれは苦手なので，苦悩を伴う表現をあちこちに用いざるを得なくなっている。しかし読者は，出てくる式の記号や表現に惑わされず，またその美しさの方に気を引かれることなく，常に物理的な意味を頭の中に思い描き続けることが重要だ。著者の体験からの助言だが，ここを読み進む前に，例えば付録 B の特に Bernoulli-Euler 梁理論の定式化の方を勉強すると，テンソル量の扱いについてちょっとだけ「直感」が冴えるかもしれない。なお記号は，できるだけ標準的なものを用いたが，どうしても変更したいものについては通常とはかなり異なるものを用いている。さらに，二つの異なる階数を持つ異なるテンソル量に対して同じ記号を用いていることがあるが，文脈（式脈）を読み取って区別して欲しい。

ここでは，文献 [26] とそれを用いた西野文雄先生の「応用弾性学」の講義ノート（1975 年頃）が基本にあって，それに加えて Northwestern 大学の Nemat-Nasser 先生の ‘Continuum Mechanics’ の講義ノート（1980 年頃）と文献 [73] を参考にした。実は，このお二人の講義内容は，現在我が国で教えられている有限変形理論とは若干異なる角度からそれを眺めているようなものになっていると感じている。どちらかというと物理的な観点[2]から説明をしていただいた印象が強い。そのため，この章の内容は，既に有限変形理論を習得している読者には違和感を覚えるものになっている可能性が高い。なお簡単のために，極力「テンソル」という言葉を使っていない。また，直角座標系における取り扱いに限定するので共変成分と反変成分の区別をしていない。というよ

[1] ケーブル等は微小ひずみで弾性のまま巨視的には大きく変位・変形する。
[2] 研究発表会の討論や講演会で使える便利な質問に ‘What is the physical meaning?’ というのがある。特に中身がさっぱりわからないときに使えるが，中身がわかっていて暗に批判するときにも使える。呵呵。

りも，適当に使っているので，特に大文字添え字の成分を持つテンソル量についてはその物理的な意味について十分な注意が必要である。正確なテンソル演算については付録 C を参照して欲しい。さらに，時刻（配置）を関数の引数 (argument) に明記する必要が無い箇所ではそれを省略した。

記号: テンソルの積では，外積以外で左辺・右辺共に同じ階数同士の演算では簡単のために

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} \quad \left(A_{ij} = B_{ik}\,C_{kj}\right), \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}:\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{Q} \quad \left(D_{ijkl} = S_{ijmn}\,Q_{mnkl}\right)$$

のように積の記号は省略し，そうでない場合には以下のような積の記号を用いる。

$$s = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \quad \left(s = u_j\,v_j\right), \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{B} \quad \left(u_i = A_{ij}\,v_j = w_j\,B_{ji}\right), \qquad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} \quad \left(w_i = e_{ijk}\,u_j\,v_k\right),$$
$$t = \boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} \quad \left(t = A_{ij}\,B_{ij}\right), \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}:\boldsymbol{B} \quad \left(A_{ij} = D_{ijkl}\,B_{kl}\right),$$
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} \quad \left(A_{ij} = v_i\,w_j\right), \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} \quad \left(Q_{ijkl} = A_{ij}\,B_{kl}\right)$$

また，行列として扱う場合には括弧を用いる。

$$\left(A\right) = \left(B\right)\left(C\right) \quad \left(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C},\ A_{ij} = B_{ik}\,C_{kj}\right)$$

12.2 ひずみとひずみ速度

12.2.1 変形とひずみ

(1) 運動と変形勾配

第 11 章の塑性論で用いたのと同様に時刻のような単調増加する履歴パラメータ t を定義する。実際の運動や粘性等を対象とする場合を除けば，t を時刻と捉える必要は無い。その $t = 0$ を初期状態，その状態における物体の状況を**初期配置**と呼ぶ[3]ことにし，その物体が移動し変形して観察している状態の $t = t$ に至った状況を**現配置**と呼ぶ。物体の状況とは関係無く，空間に固定した直角座標を定義し，その単位の基底ベクトルを $\boldsymbol{g}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とする。その基底ベクトルを初期配置において物体に貼り付けた座標を**埋め込み座標**と呼ぶことにし，その基底を埋め込み基底ベクトルと呼ぶが，そのベクトルは物体に糊付けされているため，その変形に追随して変化する。現配置におけるその基底ベクトルを $\boldsymbol{G}_I(t)$ $(I = 1, 2, 3)$ とする。$\boldsymbol{G}_I(0) = \boldsymbol{g}_i$ $(I = i)$ である。もちろん，図 12.1 でも誇張したように，埋め込み座標は一般には曲線座標であり直交系でもなく，現配置の基底ベクトル $\boldsymbol{G}_I$ は単位直交基底にならないことには十分注意する必要がある。したがって埋め込み基底で定義されるテンソルの場合は，その成分の扱いにおいて共変・反変成分の区別を正確に実施することや，テンソル成分そのものは必ずしも物理的な量になっているとは限らない[4]ことにも注意をして欲しい。この $\boldsymbol{G}_I$ の定義が曖昧なまま以下に読み進むことはやめておいた方がいい。怪我をします。極座標系

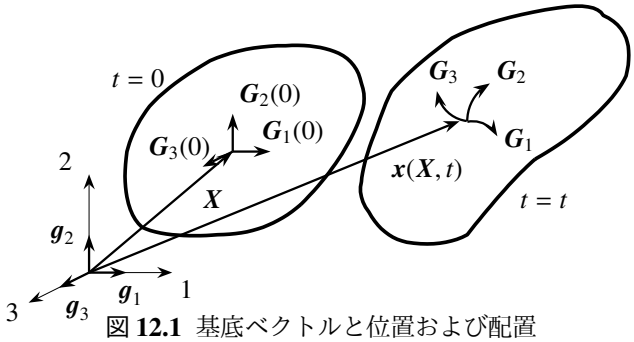


図 12.1 基底ベクトルと位置および配置

[3] 本当はこの配置を基準配置と呼ぶことが多いのかもしれないが，この文書で最も重要な updated Lagrange 的アプローチ (p.621) を説明するために，常に初期配置と称することにした。多くの読者はこれを基準配置と呼ぶ方がいいかもしれない。またその ‘updated’ に対応させて一般には，初期配置を基準配置とした普通の Lagrange 的アプローチを ‘total Lagrange’ 的と称するが，この文書では簡単のために ‘total’ を付けていない。Euler 的アプローチは現配置の観測点で諸量を定義して記述する手法なので，**便宜的な表現**をすると，現配置を基準配置としたようなものに相当する。

[4] 例えば，ひずみ尺度のテンソル成分が無次元ではなかったり，応力のテンソル成分が非対称でかつ成分同士が直交しなかったりする。

の例を付録 C に示しておいた。一般的な定義とは異なりこの文書では，あるテンソル量が定義される（測定され「始めた」）配置を**基準配置**と呼ぶことにする。

初期配置 $t = 0$ における物体中の個々の点の位置 $\boldsymbol{X} = X_I\,\boldsymbol{g}_I$ でその点（**物質点**）に「名前」を付けることにする。ここで大文字の下添え字は，初期配置における点の関数，つまり $\boldsymbol{X}$ の関数として取り扱う場合に必要に応じて用いることにするが，その定義は $\boldsymbol{g}_I = \boldsymbol{g}_i$, $\boldsymbol{X}_I = \boldsymbol{X}_i$ $(I = i)$ である。さてその点が現配置 $t = t$ において位置 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) = x_i(\boldsymbol{X}, t)\,\boldsymbol{g}_i$ にあるものとする。初期配置で名前を付けた点の現在の位置なので $\boldsymbol{X}$ と t の関数とみなしてある。以下しばらく時刻（履歴）変数 t を省略するが，最後まで勉強して復習するときには適宜自分で補ってみること。逆に言えば，現配置に位置 $\boldsymbol{x}$ にある点の初期配置における位置は，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ のように現配置における位置の関数とみなすこともできる。少々わかり難いとは思うが，単なる逆関係である。また，この現配置の「位置ベクトル」を空間固定座標と同じ記号の $\boldsymbol{x}$ で表すことには，最初はとまどいがあると思うが慣れて欲しい。頭の中で「現時点の位置ベクトル」だと思っている内に慣れると思う。さて，いま着目した点の変位 $\boldsymbol{u}$ はこの二つの位置の差で定義できるので

$$\boldsymbol{u} = U_I(\boldsymbol{X})\,\boldsymbol{g}_I = u_i(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}, \quad U_I(\boldsymbol{X}) \equiv x_i(\boldsymbol{X}) - X_I, \quad u_i(\boldsymbol{x}) \equiv x_i - X_I(\boldsymbol{x}), \quad (I = i) \tag{12.1a, b, c}$$

と書く[5]ことができる。最後の表現は，後述の式 (12.15) のような逆関係が唯一に存在する[6]ことから用いることができる。この変位で物体の**運動**[7]を表現することができる。

(2) 変形とひずみの定義

では変形はどのように定義しようか。例えば任意の微分線要素の長さや角度の変化等でそれは定義できそうだ。そこでまず各配置における微分線要素ベクトルを成分で表すと

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}X_I\,\boldsymbol{g}_I, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_i\,\boldsymbol{g}_i$$

となる。この第 2 式に偏微分の連鎖律を用いると

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = F_{iJ}(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}X_J\,\boldsymbol{g}_i, \quad F_{iJ}(\boldsymbol{X}) \equiv \frac{\partial x_i(\boldsymbol{X})}{\partial X_J} = x_{i,J} \tag{12.2a, b}$$

という量を定義できる。ここに $\boldsymbol{F}$ は，その物理的な意味はともかく，**変形勾配**と呼ばれる。また添え字のコンマはそれに続く添え字に対応する変数による（共変）微分を表す。式 (12.1) の変位をこれに代入すると，この変形勾配は

$$F_{iJ} = (X_I + U_I)_{,J} = \delta_{IJ} + U_{I,J}, \quad (I = i) \tag{12.3}$$

と書くこともできる。ここに δ_{IJ} は Kronecker のデルタである。ちなみに，上述の埋め込み座標の現配置の基底ベクトル $\boldsymbol{G}_I$ は初期配置の $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ に貼り付けたベクトルだから，空間固定の基底ベクトルと

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_j\,\boldsymbol{g}_j = x_{j,I}\,\mathrm{d}X_I\,\boldsymbol{g}_j = F_{jI}\,\boldsymbol{g}_j\,\mathrm{d}X_I = \boldsymbol{G}_I\,\mathrm{d}X_I \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{G}_I = F_{jI}\,\boldsymbol{g}_j \tag{12.4}$$

という関係にある。あるいはこの式が埋め込み基底ベクトル $\boldsymbol{G}_I$ の定義だと考えてもいい。

さて変形を表すために，現配置におけるこの微分線要素の長さ $\mathrm{d}s$ を求めておこう。すなわち

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (F_{iJ}\,\mathrm{d}X_J\boldsymbol{g}_i)\cdot(F_{iK}\,\mathrm{d}X_K\boldsymbol{g}_i) = F_{iJ}\,F_{iK}\,\mathrm{d}X_J\,\mathrm{d}X_K \tag{12.5}$$

[5] 直角座標でない場合は $\boldsymbol{u} = U^I(\boldsymbol{X})\,\boldsymbol{g}_I = U_I(\boldsymbol{X})\,\boldsymbol{g}^I$ のように，共変・反変成分を区別する必要がある。付録 C を参照のこと。

[6] 塑性のような履歴依存の変形がある場合でもそうなんだろうか。

[7] 「運動」は ‘kinematics’ の直訳であり，動的な要素を重視した概念ではない。またその運動の原因や力のつり合いとも無関係の概念である。これに対して ‘dynamics’ は動力学のことであり，静的つり合い ‘statics’ を含んでいる。

となることから，新しい量 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ を

$$(\mathrm{d}s)^2 = C_{IJ}\,\mathrm{d}X_I\,\mathrm{d}X_J, \quad C_{IJ}(\boldsymbol{X}) \equiv F_{kI}\,F_{kJ} = x_{k,I}\,x_{k,J}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{F}, \quad \Big(C\Big) \equiv \Big(F\Big)^{\mathrm{T}}\Big(F\Big), \quad C_{IJ} = C_{JI} \tag{12.6a, b, c, d, e}$$

と定義する。この $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ は**右 Cauchy-Green 変形テンソル**と呼ばれている。これに対し，上式 (12.5) の微分要素が初期配置において持っていた長さも同様に

$$(\mathrm{d}S)^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \delta_{JK}\,\mathrm{d}X_J\,\mathrm{d}X_K \tag{12.7}$$

と表すことができるので，その長さ（の 2 乗）の変化で変形を定義することが可能である。そのような変形の尺度として，**Green のひずみ** $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$ を

$$2\,E_{IJ}\,\mathrm{d}X_I\,\mathrm{d}X_J \equiv (\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}S)^2 \tag{12.8}$$

と定義することにすると，これに式 (12.5) を代入して式 (12.6) を使えば

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) \equiv \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}), \quad E_{IJ}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}\,(C_{IJ}-\delta_{IJ}) = \frac{1}{2}\,(F_{kI}\,F_{kJ}-\delta_{IJ}), \quad E_{IJ} = E_{JI} \tag{12.9a, b, c}$$

という関係が成立する。ただし，$\boldsymbol{I}$ は 2 階の**単位テンソル**（成分が Kronecker のデルタに[8]なる）である。あるいは式 (12.4) を用いて

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{G}_I\cdot\boldsymbol{G}_J - \boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j\Big) \tag{12.10}$$

と定義[9]しておくと，物理的な意味が少しは明らかになるかもしれない。つまり，以上の誘導では微分線要素の長さ（ノルム）のみの変化に着目しているように見えるが，この式 (12.10) から Green のひずみ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$ は，物体に糊付けされた基底ベクトル同士の「内積」を通して変形前後の「角度変形」特性も表現できていることを示している。さらに式 (12.3) の変位表示の変形勾配を代入すれば

$$\begin{aligned} E_{IJ} &= \frac{1}{2}\left\{(\delta_{KI}+U_{K,I})\,(\delta_{KJ}+U_{K,J})-\delta_{IJ}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\delta_{IJ}+U_{I,J}+U_{J,I}+U_{K,I}\,U_{K,J}-\delta_{IJ}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\,(U_{I,J}+U_{J,I}+U_{K,I}\,U_{K,J}) \end{aligned} \tag{12.11}$$

という関係[10]になる。有限変形を追跡しているので変位勾配の 2 次項が存在する。この非線形項を無視すれば，微小変形理論のひずみの式 (3.6) を得る。このひずみは，初期配置において物体に名前を付けた点を追跡するという考え方，つまり初期に $\boldsymbol{X}$ にあった物質点が移動した $\boldsymbol{x}$ の位置で幾何学的・力学的にどういう特性を持っているのかを記述する，いわゆる **Lagrange 的定式化**で表現したひずみである。ちょうど，ひずみゲージを物体に貼り付けてそれを追跡した場合に得られるひずみに相当する。ただし，例えば $E_{11} = {}^1\!/_2\Big(|\boldsymbol{G}_1|^2 - \big|\boldsymbol{g}_1\big|^2\Big)$ 等は長さの 2 乗を用いた尺度になっているから，一般的なひずみゲージの測定値がこの Green のひずみ成分であるわけではない。

ときどき使われるらしいが，変形の尺度にはならない ‘elongation’ という量がある。

$$\text{elongation} \equiv \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\mathrm{d}\boldsymbol{X})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$$

と定義されるので，簡単に書くと

$$(\text{elongation})_{i,J} = F_{iJ} - \delta_{iJ} = u_{i,J} = U_{I,J} \tag{12.12}$$

[8] 直角座標でない場合は計量テンソルでなければならず，本来は Kronecker のデルタ（テンソル成分ではなく単なる記号である）を成分とするものをテンソルと呼ぶのはあまりよろしくない。しかし，直感で噛み砕くためにとりあえず直角座標でアプローチしている。

[9] これは任意の座標系で成立する。

[10] 直角座標でない場合は $E_{IJ} = \frac{1}{2}\Big(U_I|_J + U_J|_I + U^K\big|_I\,U_K|_J\Big)$ のように，共変・反変成分を区別する必要がある。コンマの代わりにこの脚注で用いた ‘|’ も共変微分を表す。付録 C を参照して欲しい。

つまり**変位勾配**である。これはもちろん剛体的な回転も含んでしまうので，変形の正確な尺度にはならない。

最後に，現配置における微分体積要素 $\mathrm{d}v$ は，埋め込んだ基底ベクトルを用いれば

$$\mathrm{d}v \equiv \boldsymbol{G}_1 \cdot (\boldsymbol{G}_2 \times \boldsymbol{G}_3)\,\mathrm{d}V, \quad \mathrm{d}V \equiv \mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2\,\mathrm{d}X_3$$

で定義できるから，式 (12.4) を代入して整理すると

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} \equiv F_{j1}F_{k2}F_{l3}\,\boldsymbol{g}_j \cdot (\boldsymbol{g}_k \times \boldsymbol{g}_l) = F_{j1}F_{k2}F_{l3}\,\boldsymbol{g}_j \cdot e_{ikl}\,\boldsymbol{g}_i = F_{j1}F_{k2}F_{l3}\,\delta_{ji}\,e_{ikl} = F_{j1}F_{k2}F_{l3}\,e_{jkl} = \det(F_{iJ})$$

となる。ここに e_{ijk} は式 (C.15) で定義した交代記号（テンソル成分ではない）である。つまり

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = J \equiv \det(F_{iJ}) = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J}\right) = \frac{1}{6}\,e_{ijk}\,e_{IJK}\,F_{iI}\,F_{jJ}\,F_{kK} \tag{12.13}$$

と表すこともできる。この J は **Jacobian** と呼ばれている。初期配置と現配置における**密度**をそれぞれ ρ_0, ρ とすると，**質量保存則**から

$$\rho_0\,\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}v \quad \rightarrow \quad J = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{12.14}$$

という関係も成立する。したがって，普通の力学を対象とする限りは J は正定値の非零で有界であることから，変形勾配を行列にした場合にはその逆行列が唯一に存在する。したがって，これもわかり難いとは思うが，現配置の位置が関数として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, t), \quad F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

と関係付けられる場合に，唯一にその逆の

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}, t), \quad \left(F^{-1}\right)_{Ij} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} \tag{12.15a, b}$$

という関係が定義できる[11]ことになる。$\left(F\right)$ は 3×3 の行列なので，その逆行列は

$$\left(F^{-1}\right)_{Ij} = \frac{1}{2J}\,e_{IMN}\,e_{jmn}\,F_{Mm}\,F_{Nn}$$

のようにして求めることができる。この $\left(\frac{1}{2}\,e_{IMN}\,e_{jmn}\,F_{Mm}\,F_{Nn}\right)$ は行列 $\left(F\right)$ の**余因子行列**である。

(3) 実質的な変形成分と回転成分

前節で求めた変形勾配や変位勾配には，実際に物体が歪(ゆが)んでいる成分のみならず，単に回転した成分も含まれていることには注意しなければいけない。一方，変形テンソル $\boldsymbol{C}$ やひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ には，材料の抵抗に深く関係する「歪(ゆが)み」そのものがきちんと定義されていることが期待される。そこで，変形勾配に含まれるかもしれない回転成分 $\boldsymbol{R}$ 等を定義してみたい。一般的な回転を行列 $\left(R\right)$ で表現したときに

$$\left(R\right)^{-1} = \left(R\right)^{\mathrm{T}}, \quad \det(R) = +1 \tag{12.16a, b}$$

のような特性で定義したとしても特に違和感は無いと思う。ちょうど座標変換行列（正規直交行列）のようなものだ。そこで，変形勾配を

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{U}, \quad F_{iJ} = R_{iK}\,U_{KJ}, \quad R_{iK}\,R_{jK} = \delta_{ij}, \quad R_{iM}\,R_{iN} = \delta_{MN}, \quad U_{KJ} = U_{JK} \tag{12.17a, b, c, d, e}$$

[11] 本当かな? 変形履歴に依存する非可逆な塑性変形があったら?

のように分解することを試みよう。このような分解が可能なことを**極分解の定理**と呼び，テンソル $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$ は対称テンソルであることがわかっている。つまり $\boldsymbol{F}$ から $\boldsymbol{R}$ を取り除いた成分の $\boldsymbol{U}$ がいわゆる「歪(ゆが)み」つまり実質的な変形成分だと期待できる。これを式 (12.6) の変形テンソル $\boldsymbol{C}$ に代入すると

$$C_{IJ} = F_{kI}\,F_{kJ} = (R_{kM}\,U_{MI})\,(R_{kL}\,U_{LJ}) = U_{MI}\,U_{LJ}\,R_{kM}\,R_{kL} = U_{MI}\,U_{LJ}\,\delta_{ML} = U_{LI}\,U_{LJ}, \tag{12.18a}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{U}, \quad \left(C\right) = \left(F\right)^{\mathrm{T}}\left(F\right) = \left(U\right)^{\mathrm{T}}\left(U\right) \tag{12.18b, c}$$

という関係が得られる。すなわち変形テンソル $\boldsymbol{C}$ には回転成分は含まれていないことが明らかだ。したがって，式 (12.9) の Green のひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ にも回転成分は含まれていない。この $\boldsymbol{U}$ は**右ストレッチテンソル**と呼ばれる。その主値がいわゆる伸びである。二つの重要なテンソル $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{U}$ の具体的な求め方は後述する。

そこで，微小変形理論の枠組の中でひずみに主方向があったように，この伸び $\boldsymbol{U}$ にも主方向 $\boldsymbol{N}^{(I)}$ と主**ストレッチ** $\Lambda_{(I)}$ があって，行列表示したときに

$$\left(U\right) = \left(N\right)\left[\Lambda\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}}, \quad \left[\Lambda\right] \equiv \begin{pmatrix} \Lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{(3)} \end{pmatrix}, \tag{12.19a, b}$$

$$\left(N\right) \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}^{(1)} & \boldsymbol{N}^{(2)} & \boldsymbol{N}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \left(N\right)^{-1} = \left(N\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.19c, d}$$

と表現できるはずだ。この $\boldsymbol{N}^{(I)}$ は単位ベクトルにすることができる。また鉤括弧の $\left[\,\cdot\,\right]$ は対角行列であることを示す。行列 $\left(U\right)$ は正定値実対称行列であることから，主値は正の実数であり，主方向はお互いに直交するように選ぶことができる。これを式 (12.18) に代入すれば，行列表示で

$$\left(C\right) = \left(F\right)^{\mathrm{T}}\left(F\right) = \left(U\right)^{\mathrm{T}}\left(U\right) = \left\{\left(N\right)\left[\Lambda\right]^{\mathrm{T}}\left(N\right)^{\mathrm{T}}\right\}\left\{\left(N\right)\left[\Lambda\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}}\right\} = \left(N\right)\left[\Lambda^2\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.20}$$

となる。$\left[\Lambda\right]$ は対角行列なので $\left[\Lambda^2\right]$ は対角成分が $\Lambda_{(I)}^2$ の行列である。このことから

- 変形テンソル $\boldsymbol{C}$ の主方向を $\boldsymbol{N}^{(N)}$ とし
- 変形テンソル $\boldsymbol{C}$ の主値を $\Lambda_{(N)}^2$ としたとき

右ストレッチテンソル $\boldsymbol{U}$ はそれと同じ主方向を持ち，その主値は $\Lambda_{(N)}$ になる。行列で書くと

$$\left(U\right) = \left(C\right)^{1/2}, \quad \left(C\right) = \left(U\right)^2 \tag{12.21a, b}$$

となり，直接表記および行列表示にすると

$$\boldsymbol{U} = \sum_{N=1}^{3} \Lambda_{(N)}\,\boldsymbol{N}^{(N)} \otimes \boldsymbol{N}^{(N)}, \quad \left(U\right) = \left(N\right)\left[\Lambda\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}}, \tag{12.22a, b}$$

$$\boldsymbol{C} = \sum_{N=1}^{3} \Lambda_{(N)}^2\,\boldsymbol{N}^{(N)} \otimes \boldsymbol{N}^{(N)}, \quad \left(C\right) = \left(N\right)\left[\Lambda^2\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.22c, d}$$

という**スペクトル表示**が可能になる。式 (12.21) のような，テンソルおよび行列の平方根や 2 乗というのは，式 (12.22) のような関係にあるテンソルおよび行列であることを意味する。実際にストレッチテンソルと回転成分を計算するには

1. 変形テンソルで構成した行列 $\left(C\right)$ の固有値解析をしてその主方向と主値を求め
2. その主値の平方根と主方向を用いて式 (12.22b) から $\left(U\right)$ を求め

3. 最後に式 (12.17) から

$$\left(F\right)=\left(R\right)\left(U\right) \quad \rightarrow \quad \left(R\right)=\left(F\right)\left(U\right)^{-1}$$

のようにして回転成分を求める

ことになる。ちなみに，Green のひずみもスペクトル表示すると

$$\boldsymbol{E}=\sum_{N=1}^{3}\frac{1}{2}\left(\Lambda_{(N)}^{2}-1\right)\boldsymbol{N}^{(N)}\otimes\boldsymbol{N}^{(N)}, \quad \left(E\right)=\left(N\right)\left[\frac{1}{2}\left(\Lambda^{2}-1\right)\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.23a, b}$$

となる。右ストレッチテンソル $\boldsymbol{U}$ に比べると，変形テンソル $\boldsymbol{C}$ や Green のひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ には伸び Λ の 2 乗が含まれることから，その物理的な意味はあまり明確ではなかったのだ。特に式 (12.10) を見ると，例えば E_{11} と E_{22} は必ずしも直交していない 2 方向の伸びの 2 乗になっているし，E_{12} は $\boldsymbol{G}_1$ と $\boldsymbol{G}_2$ の長さの伸びも含んでしまっている。これでは，この $\boldsymbol{E}$ をそのまま構成則に用いることには大きな抵抗を感じざるを得ない。つまり何らかの物理成分，例えば

$$\sqrt{1+2\,E_{11}}-1, \quad \frac{E_{12}}{\sqrt{1+2\,E_{11}}\,\sqrt{1+2\,E_{22}}} \tag{12.24a, b}$$

のような成分の方がいいように感じるがどうだろう。この考察の意味が理解できない読者には，ここでちょっと立ち止まってもう一度最初から復習することを強く勧めたい。

(4) Euler 的な諸量

回転を定義するときに，式 (12.17) とは逆の順序にしてもいいだろう。つまり

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{R}, \quad F_{iJ}=v_{ik}\,R_{kJ}, \quad v_{ik}=v_{ki} \tag{12.25a, b, c}$$

のようにも極分解できる。これを式 (12.6) の変形テンソル $\boldsymbol{C}$ に代入すると

$$C_{IJ}=F_{kI}\,F_{kJ}=(v_{kl}\,R_{lI})\,(v_{km}\,R_{mJ})=R_{lI}\,v_{kl}\,v_{km}\,R_{mJ}=R_{lI}\,b_{lm}\,R_{mJ}, \quad b_{lm}\equiv v_{kl}\,v_{km}=v_{lk}\,v_{mk} \tag{12.26a, b}$$

という関係が得られる。あるいは上式に左右から回転を乗ずると

$$R_{iI}\,C_{IJ}\,R_{jJ}=R_{iI}\,R_{lI}\,b_{lm}\,R_{mJ}\,R_{jJ}=\delta_{il}\,b_{lm}\,\delta_{mj}=b_{ij}$$

となることから，$\boldsymbol{b}$ も実質的な変形成分である可能性がある。

そこで，式 (12.7) の $\mathrm{d}S$ を式 (12.15) の逆関係を用いて表すと

$$(\mathrm{d}S)^{2}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=X_{I,j}\,\mathrm{d}x_j\,\boldsymbol{g}_I\cdot X_{J,k}\,\mathrm{d}x_k\,\boldsymbol{g}_J=X_{I,j}\,X_{I,k}\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_k=\left(F_{jI}\,F_{kI}\right)^{-1}\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_k \tag{12.27}$$

となるので，この $F_{jI}\,F_{kI}$ の部分に極分解式 (12.25) を代入すると

$$F_{jI}\,F_{kI}=\left(v_{jl}\,R_{lI}\right)(v_{km}\,R_{mI})=R_{lI}\,v_{jl}\,v_{km}\,R_{mI}=v_{jl}\,v_{km}\,\delta_{lm}=v_{jl}\,v_{kl}=b_{jk}$$

のように，式 (12.26) で定義した b_{jk} になっていることがわかる。すなわち

$$\boldsymbol{b}\equiv\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}, \quad b_{jk}\equiv F_{jI}\,F_{kI}=v_{jl}\,v_{kl}, \quad (\mathrm{d}S)^{2}=\left(b_{jk}\right)^{-1}\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_k, \quad b_{jk}=b_{kj} \tag{12.28a, b, c, d}$$

という関係が求められる。この $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})$ と対峙させて**左 Cauchy-Green 変形テンソル**と呼ばれ，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ も $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$ に対峙させて**左ストレッチテンソル**と呼ばれている。面白いことに，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{U}$ の主値（固有値）同士は同

じになるので，式 (12.22) と同様，次のようなスペクトル表示[12]ができる。

$$\boldsymbol{v} = \sum_{n=1}^{3} \Lambda_{(n)}\, \boldsymbol{n}^{(n)} \otimes \boldsymbol{n}^{(n)}, \quad \left(v\right) = \left(n\right)\left[\,\Lambda\,\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}}, \tag{12.29a, b}$$

$$\boldsymbol{b} = \sum_{n=1}^{3} \Lambda_{(n)}^{2}\, \boldsymbol{n}^{(n)} \otimes \boldsymbol{n}^{(n)}, \quad \left(b\right) = \left(n\right)\left[\,\Lambda^{2}\,\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.29c, d}$$

ただし

$$\Lambda_{(n)} = \Lambda_{(N)}, \quad \left(n\right) \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}^{(1)} & \boldsymbol{n}^{(2)} & \boldsymbol{n}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \left(n\right)^{-1} = \left(n\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.30a, b, c}$$

であり，主方向の $\boldsymbol{n}^{(n)}$ と $\boldsymbol{N}^{(N)}$ の間には

$$\boldsymbol{n}^{(n)} = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{N}^{(N)}, \quad n_i^{(n)} = R_{iJ}\, N_J^{(N)}, \quad \left(n\right) = \left(R\right)\left(N\right) \tag{12.31a, b, c}$$

という関係が成立する。つまり，**主方向 $\boldsymbol{n}^{(n)}$ は，現配置において空間固定座標のどの方向に主に伸びているのかを表すベクトルであり，これに対して主方向 $\boldsymbol{N}^{(N)}$ は，その現配置で主に伸びている方向が初期配置にどちらを向いていたか（材料に貼り付けた埋め込み座標で表現した主に伸びている方向）を示している。**ところで，その定義から $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{U}$ の間には

$$\left(F\right) = \left(R\right)\left(U\right) = \left(v\right)\left(R\right) \quad \rightarrow \quad \left(v\right) = \left(R\right)\left(U\right)\left(R\right)^{\mathrm{T}}, \quad v_{ij} = R_{iK}\, U_{KL}\, R_{jL} \tag{12.32a, b}$$

という関係が成り立つ。

最後に式 (12.8) の Green のひずみに対峙させたひずみ $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x})$ を

$$2\, e_{ij}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j \equiv (\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}S)^2$$

と定義すると，これに式 (12.27) を代入して，さらに変位を用いた関係

$$X_{J,k} = \delta_{Jk} - u_{j,k}(\boldsymbol{x})$$

を代入して整理すると

$$e_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - b_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}\, u_{k,j}\right) \tag{12.33}$$

という関係を得る。このひずみ $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x})$ を **Almansi のひずみ**と呼ぶ。注意しないといけないのは，変位を現配置の「位置」 $\boldsymbol{x}$ の関数として取り扱っていることと，空間固定座標で微分をしている（添え字のコンマの次の文字が小文字になっている）ことの二つだ。これは，初期配置で名前を付けた点を追跡するという記述ではなく，空間のある場所を観察しているときに，その観察点で何が起こっているかということを観察する手法，いわゆる **Euler 的定式化**による記述になっている。例えば透明な壁を持つ水路の中の流体の運動を，その水槽の壁面に付けた印の場所で定点カメラによって観察する場合のように，モニターしている観察点で起こっている現象を対象とする場合には，この Euler 的定式化の方が便利である。固体の場合も，非接触型の変位計やひずみ計を用いて現象を観測するなら Euler 的な観察をしていることになるが，たいていの固体は履歴依存の変形をするので一般的には Euler 的な手法はあまり馴染まない。流体の場合も，流体と一緒に運動するマーカーを投げ入れてそれ（流跡線）を追跡する場合には Lagrange 的な方法を用いて何かを測定していることになる。

最も簡単な例で物理的な意味を確かめておこう。図 12.2 の左に示した運動は 3 軸方向へのストレッチ Λ_i と x_1-x_2 面内の回転のみの簡単な運動なので，少し考えれば

$$\left(F\right) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J}\right) = \left(x_{i,J}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos\alpha & -\Lambda_2 \sin\alpha & 0 \\ \Lambda_1 \sin\alpha & \Lambda_2 \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} \tag{12.34}$$

[12] $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{v}$ は回転との関係をどう捉えるかが $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{U}$ と異なるだけなので一般には大文字 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{V}$ で表されるが，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{v}$ は空間固定座標の関数であり，現配置で定義される主方向 $\boldsymbol{n}^{(n)}$ でスペクトル分解されるので，この文書では小文字で表記した上でこの節で説明した。

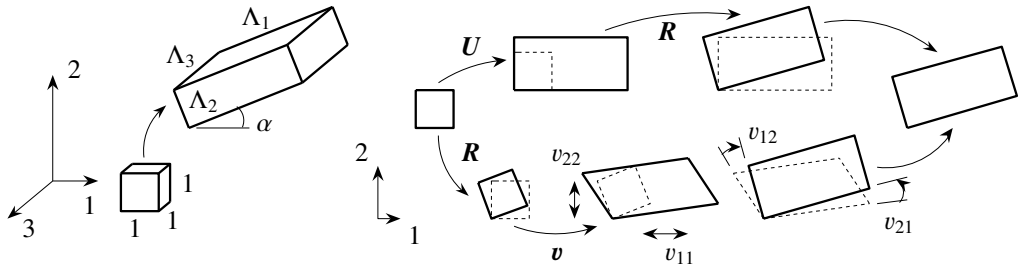


図 12.2 簡単な例で比べるストレッチテンソル

となることがわかる。つまり

$$\left(R\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(U\right) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} \tag{12.35a, b}$$

という極分解ができることを示している。$\left(U\right)$ は対角行列であるから，特に固有値解析をするまでもなく，主値は $\Lambda_{(N)} = \Lambda_N$ であり，それぞれの主方向は

$$\boldsymbol{N}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{12.36a, b, c}$$

と求められる。つまり，初期配置における材料の x_i 方向に主ストレッチが生じている，あるいは材料に埋め込んだ座標の $\dfrac{\boldsymbol{G}_I}{|\boldsymbol{G}_I|}$ 方向に（この例では直交基底になるので）主に伸びていると考えればいい。これを式 (12.31) に代入すれば

$$\boldsymbol{n}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{n}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{n}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{12.37a, b, c}$$

を得る。これは図からも明らかように，三つの伸び Λ_I が現配置で生じている方向を空間固定座標系から見たのが $\boldsymbol{n}^{(n)}$ であるということがわかる。この主方向と三つの主値を式 (12.29) に代入するか，あるいは二つのストレッチ間の関係式 (12.32) を用いれば，左ストレッチテンソルが

$$\left(v\right) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos^2\alpha + \Lambda_2 \sin^2\alpha & (\Lambda_1 - \Lambda_2)\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)\sin\alpha\cos\alpha & \Lambda_1 \sin^2\alpha + \Lambda_2 \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix}$$

と求められる。この 2 種類のストレッチテンソルの物理的な意味を図 12.2 の右に示しておいた。先に回転させるか，あとで回転させるかの違いで，2 種類のストレッチテンソルが定義されていることがわかる。つまり，先に回転させた物体の基底 $\boldsymbol{g}_i$ の系の「方向」の成分を持つ実質的な変形が $\boldsymbol{v}$ になっている。

ついでに Green のひずみを求めておこう。式 (12.34) から変位勾配は

$$\left(U_{I,J}\right) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos\alpha - 1 & -\Lambda_2 \sin\alpha & 0 \\ \Lambda_1 \sin\alpha & \Lambda_2 \cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 - 1 \end{pmatrix}$$

となるので，式 (12.11) に代入すれば，せん断ひずみ成分は零になり

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_1^2 - 1\right), \quad E_{22} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_2^2 - 1\right), \quad E_{33} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_3^2 - 1\right) \tag{12.38a, b, c}$$

と求めることができる。もちろん，式 (12.23) のスペクトル表示に式 (12.35b) の主ストレッチと式 (12.36) の Lagrange 的主方向を代入しても，同じ表現を得る。式 (12.23) のスペクトル表示からもわかるように，伸びの 2 乗に関係付けられているので物理的な意味はわかり難い。ただし，どちらの向きあるいはどの座標軸における変形であるかについては，この例はわかり易い。つまり，式 (12.23) に用いた基底 $\boldsymbol{N}$ の通り，材料に貼り付けた x_i 方向の伸び，すなわち埋め込み基底を単位量にした $\dfrac{\boldsymbol{G}_I}{|\boldsymbol{G}_I|}$ 方向の伸びに関係した量になっている。ちょうど物体に貼り付けたひずみゲージの測定値のように，物体の上で測定しているひずみになっている。したがって，特に内部に微視構造を持つ異方性材料の構成則には，このような Lagrange 的な尺度の方が適していることがわかる。実は，第 B.2 節で定式化した Bernoulli-Euler 梁の定式化では， Green のひずみを用いて非常に美しい理論が構築できているのだが，それは， Green のひずみテンソルの成分そのものではなく，それに対応した物理的な成分が用いられているからなのだ。さらに仮想仕事の原理を通して，数学的にも物理的にも説得力のある理論になっている。これについては，後述の応力の物理成分の節でも簡単に解説しよう。

(5) ひずみの物理的な意味 — ひずみって何だ?

前節では単なる幾何学的な考察を通して理論的な変形の尺度とひずみや回転を定義した。しかし，実際に材料そのものが直(じか)に感じる（材料はしゃべらないので，我々が直感的・物理的[13]に合理的だと感ずる）実質的な「歪み」，つまり「ひずみ」はどう定義するのがいいのだろう。少なくともそれは，変形テンソル $\boldsymbol{C}$ でも Green のひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ でもなさそうだ。そこで図 12.3 にあるように， 1×1 の正方形が回転成分を持たないまま， γ の角度変化と 2 辺が同じ比率で伸びて a になっている状態を対象として，いくつか歪みを定義してみよう。まず，この変形状態は

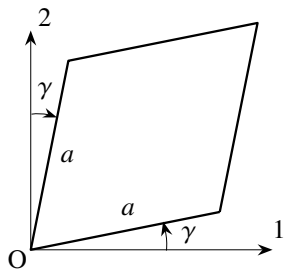


図 12.3 純せん断と 2 軸方向への等引張

$$\left(F_{iJ}\right) = \left(U_{IJ}\right) = \left(v_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a\cos\gamma & a\sin\gamma & 0 \\ a\sin\gamma & a\cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} \tag{12.39}$$

となることは容易にわかると思う。 a と γ を独立した変形指標とした純せん断状態なので，かなり限定的な純せん断状態になっていることには注意が必要だ。ただし， Λ_3 は図には無いが， x_3 方向の伸びである。回転成分を除去した変形状態なので， $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ であり，変形勾配と二つのストレッチテンソルには違いが無い。このとき主値と主方向を求めるために $\boldsymbol{U}$ の固有値解析をすると

$$\det\begin{pmatrix} a\cos\gamma - \Lambda & a\sin\gamma & 0 \\ a\sin\gamma & a\cos\gamma - \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 - \Lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{(a\cos\gamma - \Lambda)^2 - a^2\sin^2\gamma\right\}(\Lambda_3 - \Lambda) = 0$$

となるので，これを解くと，主ストレッチが

$$\Lambda_{(1)} = a\,(\cos\gamma + \sin\gamma), \quad \Lambda_{(2)} = a\,(\cos\gamma - \sin\gamma), \quad \Lambda_{(3)} = \Lambda_3 \tag{12.40a, b, c}$$

と求められ，対応する主方向は

$$\boldsymbol{N}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{n}^{(n)} = \boldsymbol{N}^{(N)} \tag{12.41a, b, c, d}$$

[13] 数学的には，お互いの関係がわかっている量ならどれでも構わないのだが，材料の抵抗を表す構成則に用いる変形の尺度は物理的な観点からしか定義できないでしょ。

である。すなわち，x_1 軸から反時計回りの 45 度方向に伸び $\Lambda_{(1)}$ が生じ，時計回りの 45 度方向に伸び $\Lambda_{(2)}$ が生じている。そしてこの二つの長さ $\Lambda_{(1)}, \Lambda_{(2)}$ は，取りも直さずこのひし形の対角線の長さに等しい。このようにストレッチ Λ と角度変化 γ は幾何学的・物理的に非常にわかり易い変形量なので，右ストレッチテンソル $\boldsymbol{U}$ は物理的なひずみを表現していると考えられる。

伸び: まず伸びについては，よく引張試験の標点間距離で定義される $\left(\dfrac{\text{今の長さ} - \text{元の長さ}}{\text{元の長さ}}\right)$ という定義は，誰にでも受け入れられるのではないだろうか。つまり，その伸びひずみ ϵ^E を，この図の例では

$$\epsilon^E \equiv a - 1 \tag{12.42}$$

と定義すれば，これが辺の伸びになるだろう。この定義は $\gamma = 0$ のときの主ストレッチから元の長さ 1 を引いた，いわゆる伸びになっている。ただこれを用いると，引張の 100% の伸びは長さが元の 2 倍 $a = 2$ なので $\epsilon^E = 1$ になる一方で，半分の長さに縮む $a = 1/2$ のときは $\epsilon^E = -0.5$ になって少しわかり難い。そこで，構成則の研究でよく使われる対数ひずみ ϵ^L を

$$\epsilon^L \equiv \ln(a) \tag{12.43}$$

のように定義してみよう。こうすると，伸びの $\epsilon^L = 1$ が $a = e \simeq 2.72$ で, 縮みの $\epsilon^L = -1$ が $a = 1/e \simeq 1/2.72 = 0.368$ となる。対数に自然対数を用いているので数字の上では，長さが 2.72 倍で 100% の伸びになり，$1/2.72$ に縮んだときに 100% の縮みになっているが ϵ^E よりはわかり易い。逆に考えると，長さが倍か半分になったときの対数ひずみは $\pm \ln 2 = \pm 63.3\%$ である。もし底が 2 の対数 $\log_2(a)$ を用いれば，長さが倍になるのが伸びの 100% のひずみであり，長さが半分になるのが縮みの 100% の変形なので，直感的に受け入れられるような気もするが，縮みはちょっとだけ気になるかなぁ。

さて近年の多くの研究で，テンソルとしては Green のひずみがよく用いられているひずみの尺度の一つのようであるが，その物理的な意味はよくわからない。これに対して，ここで導入した伸びひずみや対数ひずみはわかり易い変形の尺度ではないだろうか。そこで，上述のように $\boldsymbol{U}$ が物理的にはわかり易いので，式 (12.42) (12.43) を見ながら

$$\boldsymbol{E}^E(\boldsymbol{X}) \equiv \boldsymbol{U} - \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{E}^L(\boldsymbol{X}) \equiv \ln(\boldsymbol{U}) \tag{12.44a, b}$$

で，**伸びひずみテンソル**と**対数ひずみテンソル**を定義しておこう。この伸びひずみ $\boldsymbol{E}^E(\boldsymbol{X})$ は，変形の尺度には相応しくないとした変位勾配 (‘elongation’) の式 (12.12) に似ているが，$\boldsymbol{U}$ で定義することによって回転成分は除去されている。スペクトル表示すると

$$\boldsymbol{E}^E(\boldsymbol{X}) = \sum_{N=1}^{3} (\Lambda_{(N)} - 1)\ \boldsymbol{N}^{(N)} \otimes \boldsymbol{N}^{(N)}, \quad \left(E^E\right) = \left(N\right)\left[\ \Lambda - 1\ \right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.45a, b}$$

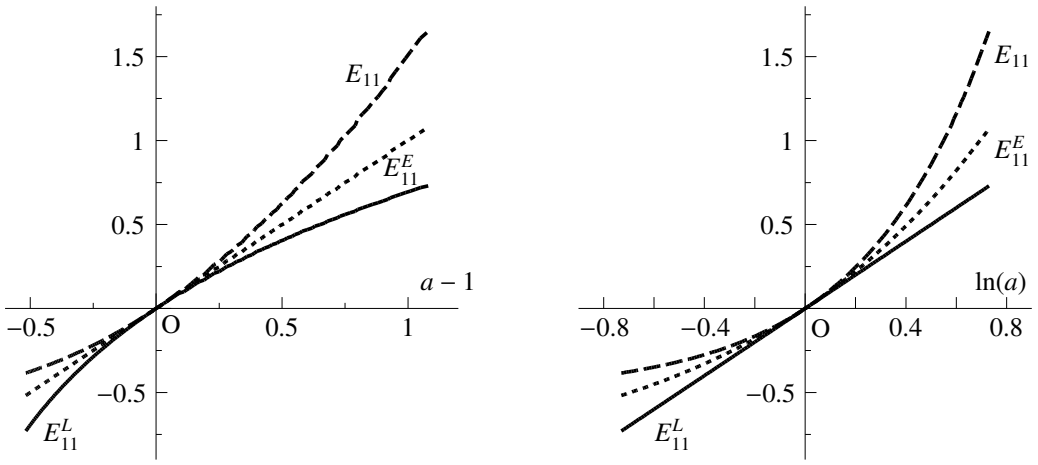
と書くことができる。このひずみは **Biot のひずみテンソル**と呼ばれることもある。また，**対数ひずみテンソル** $\boldsymbol{E}^L(\boldsymbol{X})$ はスペクトル表示を用いて

$$\boldsymbol{E}^L(\boldsymbol{X}) = \sum_{N=1}^{3} \ln(\Lambda_{(N)})\ \boldsymbol{N}^{(N)} \otimes \boldsymbol{N}^{(N)}, \quad \left(E^L\right) = \left(N\right)\left[\ \ln \Lambda\ \right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.46a, b}$$

で定義できる。式 (12.39) (12.40) (12.41) を用いて，この二つのひずみを x_1-x_2 面内成分だけを求めておくと

$$E^E_{11} = E^E_{22} = a\ \cos\gamma - 1, \quad E^E_{12} = a\ \sin\gamma, \tag{12.47a, b}$$

$$E^L_{11} = E^L_{22} = \frac{1}{2}\ \ln\left\{a^2\left(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\right)\right\} = \frac{1}{2}\ \ln\left(\Lambda_{(1)}\Lambda_{(2)}\right), \quad E^L_{12} = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{\cos\gamma + \sin\gamma}{\cos\gamma - \sin\gamma}\right) \tag{12.47c, d}$$



(a) 伸びひずみと各量の関係　　(b) 対数ひずみと各量の関係

図 12.4 伸びについてのひずみは何がいいか?

となる。伸びひずみのせん断成分 E_{12}^E には伸び a が含まれ，軸方向の伸び成分 E_{11}^E 等には逆に角度変化 γ も含まれてしまっている。これに対し対数ひずみの場合は，まずせん断成分 E_{12}^L は角度変化のみで表され，軸方向の伸び成分 E_{11}^L 等もストレッチのみで表されている。一方，前節の Lagrange 的定式化で定義した式 (12.9) の Green のひずみ $\boldsymbol{E}$ は

$$E_{11} = E_{22} = \frac{1}{2}\left(a^2 - 1\right), \quad E_{12} = a^2 \sin\gamma \cos\gamma \tag{12.48a, b}$$

となる。 Lagrange 的定式化では最もよく用いられると思われるひずみだが，伸びの $E_{11} = 1$ は $a = \sqrt{3} \simeq 1.73$ になり，半分の長さに縮む $a = 1/2$ は $E_{11} = -3/8 = -0.375$ である。また元々変形前後の長さの 2 乗の変化で定義したひずみであることから，伸び a の 2 乗が含まれる上に，上記の伸びひずみと同様に，純せん断状態でもせん断ひずみ成分 E_{12} に伸び a が含まれてしまっている。

前節の例も含め，図 12.2, 12.3 の例で実際に求めたひずみの成分式 (12.35) (12.38) (12.39) (12.47) (12.48) を幾何学的に解釈してみると

ストレッチ $\boldsymbol{U}$: 空間固定基底 $\boldsymbol{g}_i$ を回転させた $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{g}_i$ を直交基底とする座標系で計測した「伸び」と角度変化に相当する。

伸びひずみ $\boldsymbol{E}^E$: 空間固定基底 $\boldsymbol{g}_i$ を回転させた $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{g}_i$ を直交基底とする座標系で計測した「伸びひずみ」と角度変化に相当する。

対数ひずみ $\boldsymbol{E}^L$: 簡単な変形状態の表現を見る限り，伸びと角度変化を別々に表すことができそうな尺度であり，いわゆる材料の要素試験結果を反映させて構成モデルを構築する場合に使い易い尺度だと考えられる。また後述するが，この変化率もとても重要な尺度である。

Green のひずみ $\boldsymbol{E}$: 埋め込み基底を単位量にした $\dfrac{\boldsymbol{G}_I}{|\boldsymbol{G}_I|}$ を基底とする曲線座標系で計測した，「何らか」の「伸びひずみ」と角度変化に相当する。「何らか」と書いたのは，実は一番わかり難い量だからだ。具体的な物理的な意味についてはここの例で得られる次の二つの図で各自考えて欲しいが，次の節で示すようにある種の変化率はとても重要な概念である。

と考えればいいだろう。すべて数学的に誘導されたひずみであり，必ずしも材料試験で測定できるひずみになっているとは限らないことには注意すべきだ。前述のように，特に固体を対象とする場合には，その物体にひずみゲージを貼り付けて測定することがある。これはまさに Lagrange 的な量を測定していることから，この四つ

すべてが変形の尺度としては相応しいものと考えて問題は無さそうだ。ただし Green のひずみの場合は，ここの例からもわかるように，その成分の物理的な意味は非常にわかり難い。

図 12.4 には，横軸に辺の伸びひずみ $(a-1)$ を用いた場合と，対数ひずみ $\ln(a)$ を用いた場合の，3 種類のひずみテンソルの 11 成分を比較した。ただし，E^E_{11} と E^L_{11} は式 (12.47) で $\gamma = 0$ のときの値を用いている。横軸はどちらも長さが倍か半分になるまでの範囲で描いてみた。もちろん図 12.4 (a) では，定義が横軸と同じ $\boldsymbol{E}^E$ が直線関係にあり，図 12.4 (b) でも，定義が横軸と同じ $\boldsymbol{E}^L$ が直線関係になっている。当然ではあるが，ひずみが微小でありさえすれば，どの尺度を用いても，少なくとも工学的には差異は生じない。実際に 2 倍の伸びを超えるような弾性変形問題を対象とする場合にどの尺度が望ましいかについての判断はかなり難しい。

角度変化: 図 12.5 には，横軸には角度変化 γ を π で割ったものを用いて，3 種類のせん断ひずみテンソル成分を比較した。ただし，E^E_{12} と E_{12} は式 (12.47) (12.48) で $a = 1$ のときの値を用いている。これも当然ではあるが，ひずみが微小でありさえすれば，どの尺度を用いても，少なくとも工学的には差異は生じない。しかし，対数ひずみ E^L_{12} だけが角度の増加に伴って急速に無限大に近づくような挙動をしており，奇妙に思える。しかし本当にそうだろうか。この横軸は実は $|\gamma| < \pi/4$ の範囲で描いてあるのだが，γ が $\pm\pi/4$ に近づくということは物体が消滅することを意味する。それは質量保存則からは許容できる状態ではない。したがって，$\gamma \to \pm\pi/4$ でせん断ひずみの尺度そのものが無限大になるのは都合がいい。またこの対数ひずみは式 (12.47) でも示したように，せん断を純粋に角度変化 γ のみで表現できているので優れた尺度の一つだと考えていいだろう。これに対し伸びひずみ E^E_{12} と Green のひずみ E_{12} は，$\gamma \simeq \pm\pi/4$ の状態で有界な値を保持している。だからこの二つは有限変形を記述するのには相応しくない！と言えるだろうか。上述のようにこの 2 種類のせん断ひずみ成分には辺の伸び a が含まれており，実はこの図では $a = 1$ と固定していることから不適切とも思える結果が図示されたに過ぎないのだ。実際には**構成則を介して**，γ の増大に伴って a や Λ_3 も無限大にならざるを得ず，このせん断ひずみ成分も無限大になることになる。つまり逆に言うと，もし構成則に使いたいなら，伸びひずみと Green のひずみのせん断成分には伸び a が含まれているのが当たり前だったということを意味するのだ。これは，式 (12.23) のすぐ下に書いたコメントとは矛盾しているので注意が必要である。

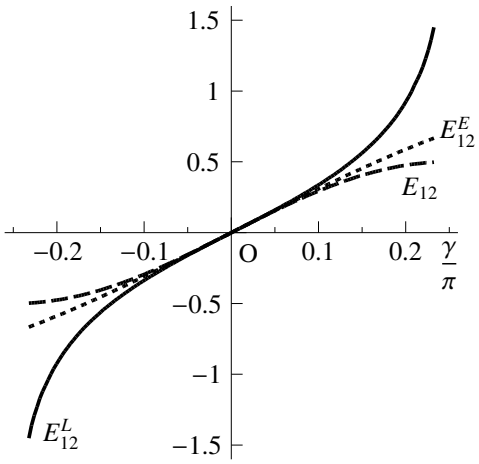


図 12.5 せん断についてのひずみは何がいいか?

ひずみの変化率あるいは速度: では伸びの対数ひずみの考察に戻ろう。式 (12.43) のスカラーで定義した対数ひずみを一般化した対数ひずみの定義式 (12.46) を見ながら，この変化率を計算してみよう。次の節で議論する「ひずみ速度」を少しここで求めてみようというのだ。簡単のために x_1 方向にのみ Λ_1 が生じている状況を対象としてみると，対数ひずみは $\ln\Lambda_1$ でいい。この変化率は

$$\dot{E}^L_{11} = \frac{\partial(\ln\Lambda_1)}{\partial t} = \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \tag{$*$}$$

と書くことができる。簡単のために時間微分を上付きドットで表した。この Λ_1 は初期配置の長さに対する現配置の長さの比だから，初期配置の長さを L_0 として現配置の長さを L と置くと

$$\dot{E}^L_{11} = \frac{\dot{L}}{L_0}\frac{L_0}{L} = \frac{\dot{L}}{L}$$

となる。つまり対数ひずみの変化率は，**現配置を基準配置としたときの瞬間的な** Lagrange 的な長さの変化率を示していることになる。これはちょうど，現配置を時々刻々初期配置と捉えて定式化する updated Lagrange 的定式化 (p.621) において最も使い易い変形の尺度になりそうだ。また，変形が大きくなった場合に多くの材料が示す塑性の基本的なモデルでは，流れ則という発展則で材料特性を表すことになっているが，この流れ則は現配置の応力状態で瞬間的にのみ定義されている。また発展則は増分式あるいは全微分表現で定義され，一般には積分不可能である。この 2 点を踏まえると，塑性の発展則では updated Lagrange 的な増分を規定していて，それが望ましいのだ。このような観点でひずみの定義を考察すると，ここで定義した対数ひずみは，特に，塑性を伴う有限変形問題では最も相応しい尺度の代表だとも考えられる。また実験実測の観点から見ても，初期配置を覚えておかなくてもいいので測定し易い指標になっているが，残念ながら，ひずみゲージが測定している量と一対一に対応しているわけではない。また，瞬間的にはいつも空間固定座標方向の成分で表現しようとすることから，材料の内部微視構造が幾何学的に変化するような材料では，逆に使い難い尺度になる可能性もある。いいものはなかなか簡単には手に入らないということだ。

さて， Green のひずみの場合はどうだろう。同じように 1 軸方向の変形しか無い状態における Green のひずみの変化率を求めてみよう。式 (12.2) (12.6) (12.9) を用いると

$$\dot{E}_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\dot{F}_{kI}\,F_{kJ} + F_{kI}\,\dot{F}_{kJ}\right)$$

となるが，速度 $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}_i\,\boldsymbol{g}_i = V_I(\boldsymbol{X})\,\boldsymbol{g}_I = v_i(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}_i$$

と成分表示をすると

$$\dot{F}_{kI} = \dot{x}_{k,I} = V_{K,I} = v_{k,I} = v_{k,j}\,F_{jI}$$

と書くことができる。これを上式に代入して整理すると

$$\dot{E}_{IJ} = d_{ij}\,F_{iI}\,F_{jJ}, \quad d_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)$$

という関係を得る。この $\boldsymbol{d}$ は次の節で定義する**変形速度**である。この式に， 1 方向にのみ伸びている状況では $F_{11} = \Lambda_1$ となっていることを代入し，式 (12.38) の Green のひずみ成分 E_{11} が $E_{11} = {}^1\!/_2\left(\Lambda_1^2 - 1\right)$ であることを用いてその変化率をとると

$$\dot{E}_{IJ} = d_{ij}\,F_{iI}\,F_{jJ} \quad \rightarrow \quad \dot{E}_{11} = \Lambda_1\,\dot{\Lambda}_1 = d_{11}\,\Lambda_1\,\Lambda_1$$

という関係が求められる。つまり，概念的には上式 (∗) と比較すれば

$$\frac{\dot{E}_{11}}{\Lambda_1^2} \sim d_{11} = \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \Rightarrow \dot{E}_{11}^L$$

のように，変形速度つまり Green のひずみの変化率は対数ひずみの時間変化率と同じような尺度であることがわかる。構成則で対数ひずみを直接扱うには，変位との関係で常に極分解を介さなければならない難点があるが，増分で構成則を表さざるを得ない塑性を含めた構成則においては，この変形速度を用いて増分理論を定式化しておけば，それは結局，対数ひずみで物体の変形を表現しようとしていることになることが，この簡単な例からわかる。そのため，塑性を含む構成則の研究においては updated Lagrange 的定式化が必然であり，かつ構成則を増分で表すというのは，有限変形におけるひずみの物理的な定義の観点からも必然なのだろう。ただし，もしどうしても Lagrange 的定式化で構成則を表現する必要があるとすれば，著者の気持ちとしては，ある適切に定義された応力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})$ を用いて（$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})$ は後述の Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ とは限らない）

$$\sigma_{IJ}(\boldsymbol{X}) = C_{IJKL}\,E_{KL}^L(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}^L(\boldsymbol{X})$$

が望ましいような気がする。ここに $\boldsymbol{C}$ は何らかの材料の抵抗を定義する 4 階の材料パラメータテンソルであるが，一般には定数とは限らない。定数パラメータの場合のいくつかの例は第 12.5.3 節に示す。

演習問題 12-1

1. Nemat-Nasser 先生の連続体力学の講義ノートには多くの楽しい演習問題が並んでいるが，多分それをここにコピーするわけにはいかないと思われる。残念である。ただその中から中間試験にも出された興味深い問題を一つだけ紹介しておく。それは theorem of Kelvin and Tait の証明問題: 「任意の変形状態には向きの変わらない軸が少なくとも一つ存在する」ことを示せであった。証明の一例を下に示す。

証明: ある点 $\boldsymbol{X}$ にあるベクトル $\mathrm{d}X^K$ が点 $\boldsymbol{x}$ に移動して変形し $\mathrm{d}x^k$ になったとする。この変形した微分要素を $\boldsymbol{X}$ の位置に剛体併進移動させるとそれは $g^K_k\,\mathrm{d}x^k$ になる。これが元のベクトル $\mathrm{d}X^K$ と平行であるためには

$$g^K_k\,\mathrm{d}x^k = g^K_k\;x^k\big|_L\;\mathrm{d}X^L = (A+1)\;\mathrm{d}X^K \tag{a}$$

であればいいはずだ。ここに $(A+1)$ は実数であって欲しい比例定数である。 $g^K_k \equiv \boldsymbol{g}^K\cdot\boldsymbol{G}_k$ 等は計量テンソルであり， $x^k\big|_L$ は共変微係数である。そこで

$$x^k\big|_L = g^{kl}\,g^M_l\,(g_{ML} + U_{M|L})$$

という関係を式 (a) の左辺に代入すると

$$g^K_k\;x^k\big|_L = g^K_k\,g^{kl}\,g^M_l\,(g_{ML} + U_{M|L}) = g^{KM}\,(g_{ML} + U_{M|L}) = g^K_L + U^K\big|_L$$

となる。 $g_{ML} \equiv \boldsymbol{g}_M\cdot\boldsymbol{g}_L$ 等も計量テンソルである。したがって式 (a) は

$$\left(g^K_L + U^K\big|_L\right)\mathrm{d}X^L = \mathrm{d}X^K + U^K\big|_L\;\mathrm{d}X^L = (A+1)\;\mathrm{d}X^K$$

となるので，これから

$$\left(U^K\big|_L - A\,\delta^K_L\right)\mathrm{d}X^L = 0 \tag{b}$$

を得る。 δ^K_L は Kronecker のデルタである。この式 (b) が成立するためには，ある実数 A に対して括弧の係数が零になればいいので

$$\det\left(U^K\big|_L - A\,\delta^K_L\right) = 0$$

が成立すればいいことになり，つまり変位勾配 $\left(U^K\big|_L\right)$ の固有値の少なくとも一つが実数になるのであれば証明できたことになる。対象は 3 次元問題なのでこの式は A の 3 次方程式になり，それは必ず少なくとも一つの実根を持つことから，この証明が終わる。さて，正しいかな?

12.2.2 変形と運動の変化率

(1) ひずみ速度

有限変形する材料のほとんどが示すだろう塑性の流れ則は，第 11 節で説明したようにひずみの増分あるいは変化率・速度で定義されている。したがって，有限変形の枠組の中でもひずみ増分を適切に定義する必要がある。しかもそのひずみ増分は，ある現配置における瞬間的な増分で表されることから，まず Euler 的な変化率[14]をここでは求めておこう。ある物質点 $\boldsymbol{X}$ が現配置 $\boldsymbol{x}$ で持っている**速度** $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t) = V_I(\boldsymbol{X},t)\,\boldsymbol{g}_I \equiv \frac{\partial x_i(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\,\boldsymbol{g}_I = \dot{x}_i(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{g}_I = \dot{x}_i(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{g}_i = v_i(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \tag{12.49}$$

[14] 実は変形の変化率のほとんどは updated Lagrange 的な量であるような気がする。

で定義できる。上付きドットは時間（配置あるいは変形履歴）による微分を表す。したがって変形勾配の変化率は

$$\dot{F}_{iJ} = \dot{x}_{i,J} = v_{i,J} = v_{i,k}\, x_{k,J}, \quad \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{l}\,\boldsymbol{F}, \quad l_{ik} \equiv v_{i,k} \tag{12.50a, b, c}$$

と書くことができる。ここに $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})$ は**速度勾配**と呼ばれ

$$\boldsymbol{l} = \dot{\boldsymbol{F}}\,\boldsymbol{F}^{-1}, \quad \left(l\right) = \left(\dot{F}\right)\left(F\right)^{-1} = \left(\partial v\right) \tag{12.51a, b}$$

という関係がある。

次に，式 (12.9) の Green のひずみの変化率は

$$\begin{aligned}\dot{E}_{IJ} &= \frac{1}{2}\left(\dot{F}_{kI}\,F_{kJ} + F_{kI}\,\dot{F}_{kJ}\right) = \frac{1}{2}\left(l_{km}\,F_{mI}\,F_{kJ} + F_{kI}\,l_{km}\,F_{mJ}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(l_{km}\,F_{mI}\,F_{kJ} + l_{mk}\,F_{mI}\,F_{kJ}\right) = \frac{1}{2}\left(l_{mk} + l_{km}\right)\,F_{mI}\,F_{kJ}\end{aligned}$$

となることから

$$\dot{E}_{IJ} = d_{mk}\,F_{mI}\,F_{kJ}, \quad d_{mk} \equiv \frac{1}{2}\left(l_{mk} + l_{km}\right) = \frac{1}{2}\left(v_{m,k} + v_{k,m}\right), \tag{12.52a, b}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{F}, \quad \left(\dot{E}\right) = \left(F\right)^{\mathrm{T}}\left(d\right)\left(F\right), \quad \boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right), \quad \left(d\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(l\right) + \left(l\right)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{12.52c, d, e, f}$$

と表すことができる。この $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$ は**変形速度**と呼ばれ，ひずみ速度の代表的な量である。これはちょうど式 (3.6) で定義した微小変形理論のひずみの速度版のように見えることから，この増分で表した定式化を微小変形理論のものだと誤解する人もいるので注意しなければならない。上式の各量は現配置 $\boldsymbol{x}$ で定義されている上に，微分も空間固定座標あるいは現位置でとられている（添え字のコンマの次の文字が小文字である）ことに注意すべきである。詳細は後述するが，少し乱暴に，例えば d_{11} を具体的に書くと

$$d_{11} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} \simeq \frac{\Delta \dot{x}_1}{\Delta x_1} = \frac{(\Delta x_1)^{\cdot}}{\Delta x_1} = \{\ln(\Delta x_1)\}^{\cdot}$$

と解釈できることから，前節の最後に解説したように，変形速度は対数ひずみの変化率に相当していることがわかる。正確な対数ひずみ速度はあとで定義する。

(2) 回転速度（スピン）

これに対しスピンを定義する。まず前節の極分解の定理式 (12.17) で定義した回転 $\boldsymbol{R}$ が運動に含まれる回転成分を表しているので，その時間変化率でスピンを定義することができる。つまり

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega}^R\,\boldsymbol{R}, \quad \dot{R}_{iJ} = \omega^R_{ik}\,R_{kJ}, \quad \left(\dot{R}\right) = \left(\omega^R\right)\left(R\right) \tag{12.53a, b, c}$$

のような $\boldsymbol{\omega}^R(\boldsymbol{x})$ はスピンの尺度の代表である。あるいは変形の主方向の変化，つまり $\boldsymbol{U}$ や $\boldsymbol{v}$ の主方向の $\boldsymbol{N}^{(I)}$ や $\boldsymbol{n}^{(i)}$ の変化率で

$$\dot{\boldsymbol{N}}^{(I)} = \boldsymbol{\Omega}^L\,\boldsymbol{N}^{(I)}, \quad \dot{N}^{(I)}_J = \Omega^L_{JK}\,N^{(I)}_K, \quad \left(\dot{N}\right) = \left(\Omega^L\right)\left(N\right), \tag{12.54a, b, c}$$

$$\dot{\boldsymbol{n}}^{(i)} = \boldsymbol{\omega}^E\,\boldsymbol{n}^{(i)}, \quad \dot{n}^{(i)}_j = \omega^E_{jk}\,n^{(i)}_k, \quad \left(\dot{n}\right) = \left(\omega^E\right)\left(n\right) \tag{12.54d, e, f}$$

のような $\boldsymbol{\Omega}^L(\boldsymbol{X})$ や $\boldsymbol{\omega}^E(\boldsymbol{x})$ でスピン[15]を定義 [73] することもできる。このように定義すると，式 (12.31) から

$$\left(\dot{n}\right) = \left(\dot{R}\right)\left(N\right) + \left(R\right)\left(\dot{N}\right) = \left(\omega^R\right)\left(R\right)\left(N\right) + \left(R\right)\left(\Omega^L\right)\left(N\right) = \left(\omega^E\right)\left(n\right) = \left(\omega^E\right)\left(R\right)\left(N\right)$$

[15] $N^{(I)}_K\,N^{(J)}_K = \delta^{IJ}$, $n^{(i)}_k\,n^{(j)}_k = \delta^{ij}$ と定義している（δ^{IJ} と δ^{ij} も Kronechker のデルタ）ことからスピンの反対称性 $\Omega^L_{MN} = -\Omega^L_{NM}$, $\omega^E_{mn} = -\omega^E_{nm}$ を示すことができる。

となることから，右から $\left(N\right)^{\mathrm{T}}\left(R\right)^{\mathrm{T}}$ を乗じて

$$\left(\omega^E\right) = \left(\omega^R\right) + \left(R\right)\left(\Omega^L\right)\left(R\right)^{\mathrm{T}}, \quad \omega^E_{ij} = \omega^R_{ij} + R_{iM}\,R_{jN}\,\Omega^L_{MN} \tag{12.55a, b}$$

というお互いの間の関係を得る。

しかしここでは，上式 (12.52) の変形速度に対応したスピンも定義しておこう。つまり現配置で考えることに限定すれば，それは通常の回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の成分[16]として考えればいいので，交代記号を用いて

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\partial}\times\boldsymbol{v} \quad \rightarrow \quad \omega_i \equiv \frac{1}{2}\,e_{ijk}\,\partial_j\,v_k = \frac{1}{2}\,e_{ijk}\,v_{k,j} = -e_{i\underline{jk}}\,\frac{1}{2}\left(v_{\underline{j},\underline{k}} - v_{\underline{k},\underline{j}}\right)$$

でも回転が定義できる。ただし，この式中の下線の付いた指標には総和規約を適用しない。この回転ベクトルの成分から類推して

$$w_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(l_{ij} - l_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right), \quad \left(w\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(l\right) - \left(l\right)^{\mathrm{T}}\right\} \quad \rightarrow \quad \omega_i = -\frac{1}{2}\,e_{ijk}\,w_{jk} \tag{12.56a, b, c}$$

によって最も基本的な**スピン**を定義することができる。このスピン $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ の定義については，添え字の順番が逆になっている文献もあるので注意すること。このように定義しておけば，速度勾配との間には

$$l_{ij} = d_{ij} + w_{ij}, \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w}, \quad \left(l\right) = \left(d\right) + \left(w\right) \tag{12.57a, b, c}$$

という関係が成り立つので，変形速度 $\boldsymbol{d}$ とスピン $\boldsymbol{w}$ はそれぞれ速度勾配 $\boldsymbol{l}$ の対称成分と**反対称成分**である。他のスピンとの関係は後述する。

(3) 体積変化率

さて，式 (12.13) の体積変化の変化率も求めておこう。単に時間微分をとることによって

$$\begin{aligned}
\dot{J} &= \frac{\partial\left(1/6\,e_{ijk}\,e_{IJK}\,F_{iI}\,F_{jJ}\,F_{kK}\right)}{\partial t} = \frac{1}{6}\,e_{ijk}\,e_{IJK}\left(\dot{F}_{iI}\,F_{jJ}\,F_{kK} + F_{iI}\,\dot{F}_{jJ}\,F_{kK} + F_{iI}\,F_{jJ}\,\dot{F}_{kK}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(e_{ijk}\,e_{IJK}\,v_{i,m}\,F_{mI}\,F_{jJ}\,F_{kK} + \cdots\right) = \frac{1}{6}\left(v_{i,m}\,e_{ijk}\,e_{mjk}\,J + \cdots\right) = \frac{1}{6}\left(v_{i,m}\,2\delta_{im}\,J + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(2v_{i,i}\,J + 2v_{i,i}\,J + 2v_{i,i}\,J\right) = J\,v_{i,i}
\end{aligned}$$

となるので

$$\dot{J} = J\,d_{kk} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V}\right)^{\cdot} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V}\,d_{kk} \tag{12.58}$$

という関係がある。これから密度の変化則を求めるために，質量保存則の式 (12.14) の時間微分をとり，上式 (12.58) を代入すると

$$\dot{\rho}_0 = 0 = \dot{\rho}\,J + \rho\,\dot{J} = \dot{\rho}\,J + \rho\,d_{kk}\,J \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} + \rho\,d_{kk} = 0 \tag{12.59}$$

となる。質量保存則のもう一つの表現である。ちなみにこのことから，完全流体のように体積が変化できない材料の**非圧縮性**の条件は

$$\dot{J} = 0 \quad \rightarrow \quad d_{kk} = 0 \tag{12.60}$$

となり，流体力学の世界では**なぜか**これが**連続の式**と呼ばれている。

[16] あるいは角速度とか渦度と呼ばれる。

(4) 加速度と物質微分

最後に，運動方程式に現れる慣性項の**加速度**を定義しておこう。加速度 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t)$ は速度の変化率だから単純に

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t) \equiv \dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t) = a_i(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{g}_i \tag{12.61}$$

であることには間違い無いが，慣性項に使われる加速度は物体のある「物質点」 $\boldsymbol{X}$ が持っている加速度でなければならない。つまり $\boldsymbol{X}$ の関数として定義された速度の変化率でなければならないのだ。上の式に書いたように， $\boldsymbol{a}$ は「場所」 $\boldsymbol{x}$ の関数として取り扱うものの，この位置 $\boldsymbol{x}$ そのものも，ある物体の「物質点」と時間の関数つまり $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ になるため，いわゆる**連鎖律**によって，次のような演算が必要になる。

$$a_i(\boldsymbol{x},t) = \dot{v}_i(\boldsymbol{x},t) = \dot{v}_i\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t\right) = \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + v_{i,j}(\boldsymbol{x},t)\,v_j(\boldsymbol{x},t) \tag{12.62}$$

つまり上付きのドットは，実はある物体の「物質点」を追跡した場合の時間変化率の算定になっており

$$\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathscr{D}v_i}{\mathscr{D}t} = \dot{v}_i \equiv \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{12.63}$$

の微分操作を**物質微分**と呼び，その変化率を**物質導関数**と呼んでいる。この第 2 項は流体力学（水理学）で習う Navier-Stokes の式にも現れる重要な項で**移流項**と呼ばれている。このように， Euler 的な量の Lagrange 的な時間変化率を算定する場合には注意が必要である。この節の始めに Euler 的な定式化と書いたが，確かに「場所」 $\boldsymbol{x}$ の関数としての量を取り扱ってはいるものの，実際には連続体の力学なので，実は物体の「物質点」 $\boldsymbol{X}$ を追跡していることには常に注意が必要だ。だから Lagrange 的な加速度 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},t)$ は単純に

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},t) \equiv \frac{\partial^2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t^2} = \frac{\partial\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{X},t) \tag{12.64}$$

で定義される。具体的な例でわかり易いのは向心力である。 Euler 的な場合はコップの中にある水の回転で求めた式 (3.164a) のように移流項から向心力が求められていたのに対し， Lagrange 的な場合は式 (9.14) のように物体に貼り付けた基底ベクトルの変化が向心力を生んでいるように見える。

(5) 例で確かめる変形と運動の変化率の定義間の違い

直交伸び運動の例: 最初は図 12.2 の例で変化率を求めてみよう。式 (12.35a) の $\boldsymbol{R}$ の時間微分と式 (12.37) の $\boldsymbol{n}^{(n)}$ の時間微分とから

$$\left(\omega^R\right) = \dot{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\omega^E\right) = \dot{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と両方が一致する。したがって式 (12.55) に代入すれば $\boldsymbol{\Omega}^L = 0$ を得るが，それは式 (12.36) の $\boldsymbol{N}^{(N)}$ が定数であることからも求められる。この例は，例えば初期配置において x_1, x_2 方向に直交する繊維の向きを合わせた布だと想定すると，変形して全体は α だけ回転しているが，布にとってはそれぞれの繊維がお互いに直交したまま，その繊維方向にだけ伸び縮みさせられているだけだ。つまり，材料そのものは変形の向きが変わったようには感じないのである。このように，この $\boldsymbol{\Omega}^L$ は物体と一緒に回転している立場から見た変形状態のスピンだから，この例では零になっているのだ。

次に式 (12.34) の変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を時間微分することによって，速度勾配が

$$\left(l\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1}\cos^2\alpha + \dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2}\sin^2\alpha & -\dot{\alpha} + \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1}\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2}\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \dot{\alpha} + \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1}\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2}\sin\alpha\cos\alpha & \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1}\sin^2\alpha + \dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2}\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix}$$

と求められる。これを式 (12.52) に代入すれば変形速度は

$$\left(d\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1}\cos^2\alpha+\dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2}\sin^2\alpha & \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1}\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2}\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1}\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2}\sin\alpha\cos\alpha & \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1}\sin^2\alpha+\dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2}\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix}$$

となるが，実はこれを眺め直すと

$$\left(d\right)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left(n\right)\left[\left(\ln\Lambda\right)^{\cdot}\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}}$$

という関係にあることがわかる。つまり Euler 的（否，後述の updated Lagrange 的）に見た，ある場所の**対数ひずみ速度**に相当するのだ。つまり， Euler 的な主方向（図 12.2 の変形後の直方体の各辺の方向）に対数ひずみ速度で単純に伸び変形しつつある状態であることがわかる。一方，式 (12.56) に速度勾配を代入すれば

$$\left(w\right)=\dot{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と求められる。これは先に求めた $\boldsymbol{\omega}^R, \boldsymbol{\omega}^E$ に一致する。どちらに近いスピンなのかについては後述する。物理的には $\dot{\alpha}$ の速度で回転していることが明らかである。

非回転運動の例: 次に図 12.3 の例で計算しておこう。まず，これは非回転運動であることは明らかだから

$$\boldsymbol{\omega}^R=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\omega}^E=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\Omega}^L=\mathbf{0}$$

となる。次に式 (12.34) の変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を時間微分することによって速度勾配が求められ，それを式 (12.52) に代入すれば変形速度が求められる。この例では回転していないので，それは一致し

$$\left(l\right)=\left(d\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{a}}{a}-\dot{\gamma}\tan 2\gamma & \dfrac{\dot{\gamma}}{\cos 2\gamma} & 0 \\ \dfrac{\dot{\gamma}}{\cos 2\gamma} & \dfrac{\dot{a}}{a}-\dot{\gamma}\tan 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix}$$

と求められる。伸び縮みを主に表す対角項にも角度の変化速度 $\dot{\gamma}$ が含まれるので，物理的にはわかり難く見えるが，実はこの場合も式 (12.40) の主ストレッチと式 (12.41) の主方向を用いると，前例と同様

$$\left(d\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left(n\right)\left[\left(\ln\Lambda\right)^{\cdot}\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}}$$

という関係を得ることができる。やはり変形速度は対数ひずみ速度に相当している。

一般的な運動の例: 以上の 2 例では，材料が感じる変形の主方向に変化が無い ($\boldsymbol{\Omega}^L = 0$) 特殊な例だったので，もう少し一般化して

$$\left(R\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(N\right) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\Lambda\right] = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix}$$

という変形を考えてみよう。これは，材料にとっての変形の主方向が時々刻々変化 (γ) しながら，伸び縮み (Λ_I) と剛体的な回転 (α) を伴う一般的な運動である。簡単のために x_3 軸に関する項をすべて省略する。前節までの各関係式や定義に代入していくと，以下のような結果が得られる。

$$\left(U\right) = \begin{pmatrix} \Lambda_1\cos^2\gamma + \Lambda_2\sin^2\gamma & (\Lambda_1 - \Lambda_2)\sin\gamma\cos\gamma \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)\sin\gamma\cos\gamma & \Lambda_1\sin^2\gamma + \Lambda_2\cos^2\gamma \end{pmatrix}, \quad \left(n\right) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma+\alpha) & -\sin(\gamma+\alpha) \\ \sin(\gamma+\alpha) & \cos(\gamma+\alpha) \end{pmatrix}$$

であり，スピンはそれぞれ

$$\left(\omega^R\right) = \dot{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\omega^E\right) = (\dot{\gamma} + \dot{\alpha})\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\Omega^L\right) = \dot{\gamma}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。材料が感じる歪みの向きが変化する回転成分が $\boldsymbol{\Omega}^L$ であり，歪みとは関係無く剛体的に回転する成分が $\boldsymbol{\omega}^R$ になっている。これを用いて

$$\left(F\right) = \begin{pmatrix} \Lambda_1\cos\gamma\cos(\gamma+\alpha) + \Lambda_2\sin\gamma\sin(\gamma+\alpha) & \Lambda_1\sin\gamma\cos(\gamma+\alpha) - \Lambda_2\cos\gamma\sin(\gamma+\alpha) \\ \Lambda_1\cos\gamma\sin(\gamma+\alpha) - \Lambda_2\sin\gamma\cos(\gamma+\alpha) & \Lambda_1\sin\gamma\sin(\gamma+\alpha) + \Lambda_2\cos\gamma\cos(\gamma+\alpha) \end{pmatrix}$$

を得る。この時間微分等を用いれば

$$\begin{aligned} \left(d\right) &= \left(n\right)\left[(\ln\Lambda)^{\cdot}\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}} - \frac{\dot{\gamma}\left(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2\right)}{2\Lambda_1\Lambda_2}\begin{pmatrix} \sin 2(\gamma+\alpha) & -\cos 2(\gamma+\alpha) \\ -\cos 2(\gamma+\alpha) & -\sin 2(\gamma+\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \left(n\right)\left[(\ln\Lambda)^{\cdot}\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}} - \frac{\dot{\gamma}\left(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2\right)}{2\Lambda_1\Lambda_2}\left(n\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(n\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(w\right) &= \left(\omega^R\right) - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2\Lambda_1\Lambda_2}\left(\Omega^L\right) \end{aligned}$$

と求められる。いずれも第 2 項が $\dot{\gamma}$，つまり材料にとっての力の主方向の変化率に関連した項である。これは，大きなせん断変形 $(\Lambda_1 - \Lambda_2)$ が存在する場の，それぞれせん断変形の変化率とスピン成分なのだ。特に変形速度の第 2 項は跡が零になるので体積変化を伴わない成分である。また非対角項しか存在せず，$(\Lambda_1 - \Lambda_2)$ のせん断変形に変化率 $\dot{\gamma}$ が乗算されていることから，せん断変形速度成分になっていることもわかる。ただし，スピンの第 2 項は比較的変形が小さい段階，つまり $\Lambda_1 \to 1 + \epsilon_1, \Lambda_2 \to 1 + \epsilon_2$ の近似をすると

$$\frac{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2\Lambda_1\Lambda_2} \to \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{2}$$

のように，第 1 項に比べて無視できる 2 次項になる。したがって，スピンの場合は第 1 項が物理的には主要な意味を与えてくれると考えていいだろう。結局，極分解したときの回転 $\boldsymbol{R}$ の変化率 $\boldsymbol{\omega}^R$ が主なスピンであると考えられる。

(6) 変形と運動の変化率の物理的な意味 — 変形速度って何だ?

少しわかり難いかもしれないが，厳密に物理的な意味を明らかにしてみよう。スペクトル表示を用いると便利なので行列計算を行う。式 (12.17) の変形勾配を時間微分すると

$$\left(\dot{F}\right) = \left(\dot{R}\right)\left(U\right) + \left(R\right)\left(\dot{U}\right) = \left(\omega^R\right)\left(F\right) + \left(R\right)\left(\dot{U}\right)$$

となる。これを式 (12.51) に代入して式 (12.17) を用いて整理すると

$$\left(l\right) = \left(\omega^R\right) + \left(R\right)\left(\dot{U}\right)\left(U\right)^{-1}\left(R\right)^{\mathrm{T}} \tag{$*$}$$

を得る。一方，式 (12.22b) の $\boldsymbol{U}$ のスペクトル表示を用いて整理すると

$$\begin{aligned}\left(\dot{U}\right)\left(U\right)^{-1} &= \left(\left(\Omega^L\right)\left(N\right)\left[\Lambda\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} + \left(N\right)\left[\dot{\Lambda}\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} + \left(N\right)\left[\Lambda\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}}\left(\Omega^L\right)^{\mathrm{T}}\right)\left(N\right)\left[\frac{1}{\Lambda}\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\Omega^L\right) + \left(N\right)\left[\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} + \left(U\right)\left(\Omega^L\right)^{\mathrm{T}}\left(U\right)^{-1}\end{aligned}$$

となるので，これを上式 ($*$) に代入して式 (12.17) (12.31) を考慮すると

$$\left(l\right) = \left(\omega^R\right) + \left(R\right)\left(\Omega^L\right)\left(R\right)^{\mathrm{T}} + \left(n\right)\left[\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}} - \left(F\right)\left(\Omega^L\right)\left(F\right)^{-1}$$

と表現できることがわかる。速度勾配の表現のままでは，特に最後の項はまだ少しわかり難い。

最終的に，これを式 (12.52) に代入すれば，変形速度は

$$\left(d\right) = \left(d^L\right) + \left(d^{EV}\right), \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^L + \boldsymbol{d}^{EV} \tag{12.65a, b}$$

と分解して表すことができる。この第 1 項の $\boldsymbol{d}^L$ は

$$\left(d^L\right) \equiv \left(n\right)\left[\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}} = \left(n\right)\left[\,(\ln\Lambda)^{\cdot}\,\right]\left(n\right)^{\mathrm{T}} \tag{12.66}$$

で定義される，**対数ひずみ速度** $\boldsymbol{d}^L$ である。また第 2 項の $\boldsymbol{d}^{EV}$ は

$$\left(d^{EV}\right) \equiv -\frac{1}{2}\left[\left(F\right)\left(\Omega^L\right)\left(F\right)^{-1} + \left(\left(F\right)\left(\Omega^L\right)\left(F\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{12.67}$$

となるが，さらに式 (12.25) を用いて Euler 的表現にして式 (12.55) を用いると

$$\left(d^{EV}\right) \equiv -\frac{1}{2}\left[\left(v\right)\left(\left(\omega^E\right) - \left(\omega^R\right)\right)\left(v\right)^{-1} + \left(\left(v\right)\left(\left(\omega^E\right) - \left(\omega^R\right)\right)\left(v\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{12.68}$$

のように対称テンソルとして定義されるが，これが，前節の最後の例で現れた主軸の回転に伴って大きなせん断ひずみが生み出すせん断変形速度である。

ところで，この式 (12.65) の跡を求めると，式 (12.58) の体積変化の表現から

$$\mathrm{tr}\left(\text{左辺}\right) = d_{kk} = \frac{\dot{J}}{J}, \quad \mathrm{tr}\left(\text{右辺第 1 項}\right) = \mathrm{tr}\left(d^L\right) = \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} + \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} + \frac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} = \frac{(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)^{\cdot}}{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3} = \frac{\dot{J}}{J}$$

であることから，第 2 項の跡は零

$$\mathrm{tr}\left(\text{右辺第 2 項}\right) = \mathrm{tr}\left(d^{EV}\right) = 0$$

になる。つまり，第 1 項の対数ひずみ速度 $\boldsymbol{d}^L$ は**非回転変形速度成分**（体積変化速度）であり，第 2 項 $\boldsymbol{d}^{EV}$ は**等体積変形速度成分**（せん断変形速度）になっていて，物理的にはとてもわかり易い。ただ注意して欲しいのは，対数ひずみ速度は対数ひずみ $\boldsymbol{E}^L$ の変化率ではないことだ。つまり，式 (12.46) の変化率を求めたとき

$$\left(\dot{E}^L\right) = \left(\Omega^L\right)\left(E^L\right) + \left(N\right)\left[\,(\ln\Lambda)^{\cdot}\,\right]\left(N\right)^{\mathrm{T}} + \left(E^L\right)\left(\Omega^L\right)^{\mathrm{T}} \neq \left(d^L\right) \tag{12.69}$$

になっていることには十分注意する必要がある。

一方スピンは，式 (12.56) に式 ($*$) を代入すれば

$$\left(w\right) = \left(\omega^R\right) + \left\{\left(R\right)\left(\Omega^L\right)\left(R\right)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\left[\left(F\right)\left(\Omega^L\right)\left(F\right)^{-1} + \left(\left(F\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\Omega^L\right)\left(F\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\} \tag{12.70}$$

と求められる。前節の最後の例でもわかるように，中括弧でくくった第 2 項が主軸のスピン $\boldsymbol{\Omega}^L$ に伴って大きなせん断ひずみが生み出すスピンに相当する。ちなみに，スピンの右辺の最初の 2 項は式 (12.55) の関係を用いればまとめることができ

$$\left(w\right) = \left(\omega^E\right) - \frac{1}{2}\left[\left(F\right)\left(\Omega^L\right)\left(F\right)^{-1} - \left(\left(F\right)\left(\Omega^L\right)\left(F\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{12.71}$$

あるいは，式 (12.68) の誘導と同様

$$\left(w\right) = \left(\omega^E\right) - \frac{1}{2}\left[\left(v\right)\left(\left(\omega^E\right) - \left(\omega^R\right)\right)\left(v\right)^{-1} - \left(\left(v\right)\left(\left(\omega^E\right) - \left(\omega^R\right)\right)\left(v\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{12.72}$$

のような反対称テンソルとして表されるが，前節の例からもわかるように，比較的変形が小さい場合の主要項は $\boldsymbol{\omega}^R$ になるので，式 (12.70) の表現に留めておいた（$\boldsymbol{\omega}^E$ は用いない）方がいいだろう。

演習問題 12-2

2. 第 12.2.2 (5) 節で用いた三つの例のひずみとその変化率を自ら求めてみよ。手を動かさないままこれ以下を読むと怪我をしますよ。

12.2.3 弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度

(1) 加算則と乗算則

さて異なるメカニズムの変形が，例えば塑性変形が生じたあと弾性変形が生じるような 2 段階の変形が初期配置から追跡できたとして，よく

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$$

という記述がなされる。ここに，上添え字の ‘e’ は弾性変形による成分を，‘p’ は塑性変形の成分を示している。つまり，ある仮想的な中間配置を定義して全体の変形勾配を，塑性変形が発生したあとにその非適合変形を補うために弾性変形が発生すると考えているのである。これはよく乗算則（乗算分解）[17] と呼ばれている。しかし，これは単なる偏微分の連鎖律に過ぎない。物理的に例えば流れ則は積分できないこと等を考えると

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x}^{(0)} \equiv \boldsymbol{X}(t=0), \quad \boldsymbol{x}^{(n)} \equiv \boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_m\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_j \cdots \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_4\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_3\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_2\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_1, \\
\boldsymbol{x}^{(0)}(t=0) \xrightarrow{\text{弾性}} \boldsymbol{x}^{(1)}(t=\Delta t) \xrightarrow{\text{弾性}} \cdots \boldsymbol{x}^{(k)}(t=k\Delta t) \xrightarrow{\text{塑性}} \boldsymbol{x}^{(k+1)}(t=(k+1)\Delta t) \xrightarrow{\text{弾性}} \cdots \\
\cdots \boldsymbol{x}^{(n-1)}(t=(n-1)\Delta t) \xrightarrow{\text{塑性}} \boldsymbol{x}^{(n)}(t=n\Delta t) \xrightarrow{\text{弾性}} \boldsymbol{\xi}(t+\Delta t)
\end{gathered}$$

のように位置が時々刻々更新したと考える方が一般的で素直だろう。したがって変形勾配は，連鎖律により

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial X_N} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial X_N}, \quad \frac{\partial x_m}{\partial X_N} = \prod_{k=n}^{1}{}' \frac{\partial x^{(k)}_{i_k}}{\partial x^{(k-1)}_{j_k}}, \qquad i_n = m, \quad j_1 = N, \quad j_k = i_{k-1}$$

のように，時々刻々の乗算則になる。$\prod'$ にプライムを付けたのは，k を n から 1 ずつ**減ずる**ことを意味している。このような順番で変形が起きたとすれば

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) = \boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), t+\Delta t\right)$$

のように考えればいいので，最終的な変形勾配は単純な連鎖律で

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial X_J} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_J}, \quad \xi_{\alpha,J} = \xi_{\alpha,k}\,x_{k,J}$$

[17] Asaro [4] の論文を元にしたようで，Asaro は結晶金属の弾塑性変形の概念について乗算則で説明しているが，実際にはこの節のような加算則の説明をしているだけだと思うのだが。

のような乗算で表現できる。

この変化率を，最終的な現配置 $t = t + \Delta t$ でとると

$$\dot{\xi}_{\alpha,J} = \dot{\xi}_{\alpha,\beta}\,\xi_{\beta,k}\,x_{k,J} + \xi_{\alpha,l}\,\dot{x}_{l,k}\,x_{k,J}$$

となる[18]ので，これを用いて最終的な速度勾配 $l_{\alpha\eta}(t + \Delta t)$ を算定すると

$$l_{\alpha\eta} \equiv \dot{\xi}_{\alpha,J}\,X_{J,\eta} = \dot{\xi}_{\alpha,\beta}\,\xi_{\beta,k}\,x_{k,J}\,X_{J,\eta} + \xi_{\alpha,l}\,\dot{x}_{l,k}\,x_{k,J}\,X_{J,\eta} = \dot{\xi}_{\alpha,\eta} + \xi_{\alpha,k}\,\dot{x}_{k,l}\,\xi^{-1}_{\eta,l}$$

という関係を得る。現配置の瞬間的な変形率（後述第 12.4 節の updated Lagrange 的な量）を考えているので，添え字には大文字が現れていないことに注意して欲しい。第 2 項の $\dot{x}_{k,l}$ が配置 $t = t$ で定義されているのに対し，左辺の速度勾配は現配置の $t = t + \Delta t$ で定義されているので，第 2 項にはその補正 $\xi_{\alpha,k}$ と $\xi^{-1}_{\eta,l}$ が必要になる。ただ塑性論の特性により，変形履歴ステップ Δt は十分小さくとらざるを得ないことから，そのステップが弾性変形であろうと塑性変形であろうと，この補正の $\xi_{\alpha,k}$ と $\xi^{-1}_{\eta,l}$ はほとんど Kronecker のデルタになり，$\xi_{\alpha,k} \simeq \delta_{\alpha k}, \xi^{-1}_{\eta,l} \simeq \delta_{\eta l}$ と考えてよく，したがって近似的に加算則（加算分解）の

$$l_{\alpha\eta} \simeq \dot{\xi}_{\alpha,\eta} + \dot{x}_{\alpha,\eta}$$

ができると考え [127] てもいい。これが加算則が近似であるという立場からの解釈である。

あるいは上式の第 2 項を第 1 項と同じ配置 $t = t + \Delta t$ で

$$\dot{x}^M_{\alpha,\eta} \equiv \xi_{\alpha,k}\,\dot{x}_{k,l}\,\xi^{-1}_{\eta,l} \quad \rightarrow \quad l_{\alpha\eta} = \dot{\xi}_{\alpha,\eta} + \dot{x}^M_{\alpha,\eta}$$

と定義し直した上で，加算則が厳密に成立する [4, 72] と考えるのも素直だろう。というのも，加算される二つの量はいずれも同じ配置で定義されていなければならないからだ。したがって，弾塑性理論では変形速度もスピンも弾性成分と塑性成分の加算で

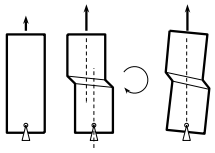


図 12.6 塑性と弾性

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}) \tag{12.73a, b}$$

が成立するとしている。実際，材料試験の様子を考えてみると，［弾性｜塑性］変形だけを測定したあとに，別の変形として［塑性｜弾性］変形成分を測定しているわけではない。ある荷重増分に対して $\boldsymbol{d}$ がどのように変化するのか測定しつつ，右辺のどちらかの量を例えば除荷のような手段で弾性成分を測定するといった，**同じ配置からの観察で同時に測定（発生）して**いる。つまり，上の式に現れる量のうち試験で測定しているのは $\dot{\xi}_{\alpha,\eta}$ と $\dot{x}^M_{\alpha,\eta}$ だと考えるのは素直だろう。だから加算則も厳密に成立すると理解しても構わない。材料の身になって考えてみると，例えば図 12.6 のように，転位が試験片の表面に出た瞬間，中央の図に示したように引張試験の載荷軸にずれ（非適合）が生じようとする。そのとき前節最後の例の記号と使うと，この塑性的なずれを，さらなる塑性的な回転と弾性的な回転を合わせた $\dot{\alpha}$ で回転させ，また材料中の主軸も $\dot{\gamma}$ で回転させると同時にそれに見合う弾塑性的なせん断変形も生じさせた上で，載荷軸のずれを解消して一番右の状態（適合な変形状態）に落ち着く。そしてこの二つのメカニズムが，転位が表面および結晶粒子界面に達する度に**時々刻々**生じている。そして通常，この弾性的な変形と塑性的な変形の $\dot{\xi}_{\alpha,\eta}$ と $\dot{x}^M_{\alpha,\eta}$ は同時に起き，測定される。ただもちろん第 11.2.3 節や第 11.3.3 節で示したように流れ則は積分不可能であることから，有限変形の場合はどのようなひずみ尺度 $\boldsymbol{\epsilon}$ を用いたとしても

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{X}) \neq \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{X}) \tag{12.74a, b}$$

であることには十分注意する必要がある。構成則が増分理論で定義されている場合には，実際の数値解析でも，求められた速度 $\boldsymbol{v}$ から現配置の位置ベクトルを求めるだけで十分であり，何らかのひずみ尺度そのものを求める必要は生じない。

[18] 流れ則が積分できないことは，ここでは知らなかったことにする。

(2)　極端な比較

一例として第 3.4.4 節で検討した熱ひずみを対象にしてみよう。無限体の中の半径 a_0 の球領域の温度を 0℃から T℃ に変化させたとき，球と周りの無限体の間の圧力が 0 から p になって半径が a になったとする。このとき，自由空間に球を置いて温度を変化させて半径が a_T^s になったとすると，それに対する変形勾配は

$$F_T^s \equiv \frac{a_T^s}{a_0} = 1 + \alpha T$$

となる。ここに α は**線膨張係数**である。次に，この球に圧力 p を作用させて変形を小さくして半径が最終的な a になったとすると，これに対する変形勾配は

$$F_p^s \equiv \frac{a}{a_T^s} = 1 + \frac{p}{\bar{K}^s}$$

である。ここに $\bar{K}^s$ は圧力 p に対する見かけの剛性である。したがって乗算則を用いて総変形勾配は

$$F^s \equiv \frac{a}{a_0} = F_p^s \times F_T^s = \left(1 + \frac{p}{\bar{K}^s}\right)(1 + \alpha T)$$

と求められる。一方，周りの無限体に作用させた p による変形勾配は

$$F \equiv \frac{a}{a_0} = 1 + \frac{p}{\bar{K}}$$

となる。ここに $\bar{K}$ も見かけの剛性である。球と周りの物体が元の連続体に戻る（整合する）ためには

$$F = F^s$$

を満足しなければならないので，上の 3 式をこれに代入して整理すると

$$\frac{p}{\bar{K}} = \frac{\alpha T}{1 - \dfrac{\bar{K}}{\bar{K}^s}(1 + \alpha T)}$$

が必要な反力になる。したがって最終的な半径は

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1 + \alpha T}{1 - \dfrac{\bar{K}}{\bar{K}^s - \bar{K}}\alpha T} \tag{12.75}$$

と求められる。

これに対し，前節でも説明したように弾性変形と非弾性変形はお互いを補償しながら同時に生じていると考えるのが素直だと考えれば，結局加算則でモデル化すればいい。つまりこの問題の場合は，微小な増分の $\dot{T}$ と $\dot{p}$ に対して接線的なモデルを考えればいい。まず温度変化に対する非弾性ひずみ速度 $\dot{e}_T^s$ は

$$\dot{e}_T^s = \alpha \dot{T}$$

である。一方，圧力による弾性ひずみ速度 $\dot{e}_p^s$ は

$$\dot{e}_p^s = \frac{\dot{p}}{\bar{K}^s}$$

となる。したがって，加算則を用いて総ひずみ速度 $\dot{e}^s$ は

$$\dot{e}^s \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \dot{e}_T^s + \dot{e}_p^s = \alpha \dot{T} + \frac{\dot{p}}{\bar{K}^s}$$

と求められる。一方，周りの無限体が圧力で変化するひずみ速度 $\dot{e}$ は弾性ひずみなので

$$\dot{e} \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{p}}{\bar{K}}$$

である。したがって，無限体が時々刻々連続体であり続ける（整合）条件は

$$\dot{e} = \dot{e}^s$$

と表されるので，これから

$$\dot{p} = \frac{\bar{K}\,\bar{K}^s}{\bar{K}^s - \bar{K}}\,\alpha\,\dot{T}$$

という関係が成り立たなければならない。以上を連立させれば，半径の変化率は温度変化だけで表されて

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\bar{K}^s}{\bar{K}^s - \bar{K}}\,\alpha\,\dot{T}$$

となるから，これを積分して

$$\frac{a}{a_0} = \exp\left(\frac{\bar{K}^s}{\bar{K}^s - \bar{K}}\,\alpha\,T\right) \tag{12.76}$$

が球の半径である。もちろん，式 (12.75) (12.76) を Taylor 展開すると第 1 次項はどちらも同じ

$$\frac{a}{a_0} = 1 + \frac{\bar{K}^s}{\bar{K}^s - \bar{K}}\,\alpha\,T$$

になって一致する。

図 12.7 には，式 (3.221) が成立すると考えたときの平面ひずみ状態の解をプロットした。線膨張係数 α はせいぜい 10^{-5} 程度なので， 10,000℃ の温度変化があったとしても，それはこの横軸で $\alpha T \sim 0.1$ 程度に留まるので両モデル間には工学的な差異は無い。また有限変形の枠組で扱う場合，乗算則の場合の力学的モデルは本来非線形になるべきところをここでは単純な線形理論でモデル化しているし，加算則の場合も材料パラメータが定数とは限らないので，以上はかなり乱暴で極端な比較であることは否めない。しかし二つのモデルの具体的な比較としてはわかり易いのではないだろうか。特徴の解析的な比較のために $T \to +\infty$ の極限をとると，線形理論の外挿モデルである加算則は半径は無限大になる。これは直感的にも容認できそうだ。一方，乗算則の場合は有界な極限

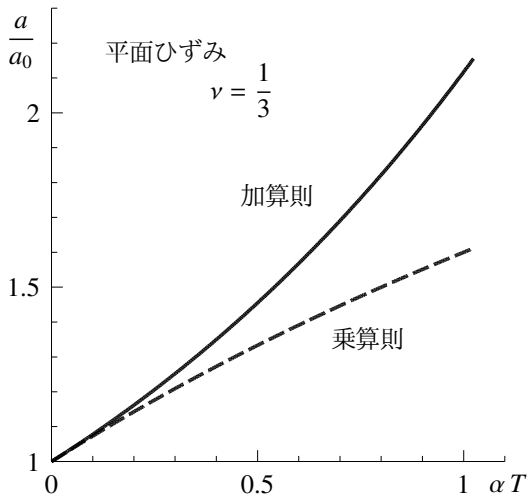


図 12.7 乗算則と加算則

$$\frac{a}{a_0} \to \frac{\bar{K} - \bar{K}^s}{\bar{K}} < \infty$$

を持つことになる。ただし，平面ひずみ状態で $\nu = 1/3$ の場合は

$$\frac{a}{a_0} \to 4, \quad p \to 3\mu$$

となるので工学的には全く意味は無いが，ある特性が有界か否かという特徴の違いは，工学的な観点からであっても非常に興味深い差異である。有限変形の枠組の中の材料モデルの構築ではとても慎重な態度が必要なことを，この極端な例は物語っているのかもしれない。

12.3 応力とつり合い式および応力速度

12.3.1 基本的な応力とつり合い式

(1) Cauchy 応力と nominal 応力

前節で扱った種々の変形は幾何学的に明確に定義できる量ではあったが，材料の抵抗という物理的特性をわかり易く表す適切な尺度を有限変形の枠組で選ぶことがかなり難しいこともわかった。実は応力の定義にも同様の困難が伴う。そもそも応力が必要になる一つの理由は， Newton の法則つまりつり合い式を力で書いた方がわかり易いからだ。材料は本質的には「変形して」抵抗するのだが，その「変形」を使って「つり合い」を考えるよりも，それに対応した「抵抗力」でつり合いを考えた方がわかり易いというわけだ。もう一つの理由は，材料の抵抗の仕方つまり構成則を「抵抗力」と「変形」の間の関係で定義するという手法が，ちょうどバネの抵抗則と同じようになってわかり易くなるからだ。いずれにしても応力は外乱と変形の間を取り持つ数学的な量・概念[19]だから，使い易いように好きに自由に定義すればいいのだが，作用外力に対して材料は変形した現配置において抵抗しているのだから， Euler 的な応力でつり合いを表すのが素直だと思われる。しかし構成則の方は，ある物質点がどのような履歴を経て抵抗してきたかということをも表せないといけないから，逆に Lagrange 的な応力を定義しておいた方がいいようにも感じられる。どっちがいいだろうか。そこでここではまず代表的な二つの応力を定義し，その間の関係を求めておこう。

応力は，物体内に仮想的に定義した面に生じている抵抗力を，その面の面積で割った圧力のような量だ。しかし問題は，どの配置でその面と面積を定義するのか，さらにどの物質点に着目しているのか，そしてどの座標系でその成分を捉えようとしているのか，という点でそれぞれ複数の選択が可能になることだ。そこでまず，現配置において単位面積を定義して，その面に生じている抵抗力を，空間固定座標方向の応力として定義しよう。これは Euler 的な応力の定義になり，これはちょうど微小変形理論の式 (3.19) と図 3.9 で定義した応力と同じ定義になる。つまり図 12.8 の上に示したような配置 $t = t$ の微分面積 $\mathrm{d}a$ に発生した抵抗力ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ で表面力ベクトル $\boldsymbol{t}$ を

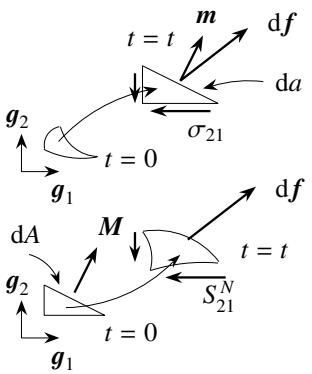


図 12.8 応力の定義

$$\boldsymbol{t} = t_i\,\boldsymbol{g}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}a} \tag{12.77}$$

と定義する。そして，この表面力ベクトルの空間固定基底ベクトル方向成分を，その抵抗力が発生している面の法線ベクトル $\boldsymbol{m}$ を用いて

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad t_i = m_j\,\sigma_{ji} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}f_i = m_j\,\sigma_{ji}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}a \tag{12.78}$$

のように **Cauchy 応力（真応力）** $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ を定義する。実はこの定義はとてもわかり難いはずだ。法線方向から力への射影が応力になっているからだ。幾何学的・物理的に理解するためには，微小変形理論の図 3.9 の方がいい。それをカッコよく式にしたのが上の定義だと考えておいた方が健康的だ。なお，添え字の定義は図 3.10 および式 (3.19) と同じ[20]である。

一方，鋼の引張試験で応力ひずみ曲線を描くときのように，試験機で測定した荷重を初期配置で測定した断面積で割って定義した応力も便利かつ必要かもしれない。そういった Lagrange 的な応力は，図 12.8 の下に示したように，初期配置で $\mathrm{d}A$ だった面が現配置の位置に移動して，そこに $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ が発生して抵抗しているとみなせ

[19] だって応力を直接は測定できないでしょ。応力って数学的概念に過ぎないわけだし。
[20] 特に有限変形の教科書では，これが逆のものの方が多いような印象を持っているので十分注意すること。

ばいい。 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ が発生している「物質点」は上の Cauchy 応力を定義した「場所」と同じにしたが，面積を初期配置に戻って定義し直したと考えればいい。つまり式 (12.78) に対応させて

$$\mathrm{d}f_i = M_J\, S^N_{Ji}(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}A \tag{12.79}$$

のように **nominal 応力** $\boldsymbol{S}^N(\boldsymbol{X})$ が定義[21]できる。ここに $\boldsymbol{M}$ は，初期配置における面 $\mathrm{d}A$ の法線ベクトルである。つまり現配置で生じている表面力を初期配置の単位面積で定義した空間固定座標方向の応力になっている。もう少し詳しい物理的な意味はあとでまとめて説明する。

さてここで，初期配置の面積と現配置の面積との対応を求めておこう。初期配置の微分面積 $\mathrm{d}A$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{X} \times \Delta\boldsymbol{X} = e_{IJK}\,\mathrm{d}X_J\,\Delta X_K\,\boldsymbol{g}_I = \mathrm{d}A\,M_I\,\boldsymbol{g}_I \tag{12.80}$$

と定義できる。ここに e_{IJK} は式 (C.15) で定義した交代記号である。一方，現配置の微分面積 $\mathrm{d}a$ も同様に

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{x} \times \Delta\boldsymbol{x} = e_{ijk}\,\mathrm{d}x_j\,\Delta x_k\,\boldsymbol{g}_i = \mathrm{d}a\,m_i\,\boldsymbol{g}_i \tag{12.81}$$

と定義できるが，この二つは同じ物質点近傍の面積だとしたので，変形勾配を用いると

$$\mathrm{d}a\,m_i\,\boldsymbol{g}_i = e_{ijk}\,x_{j,J}\,x_{k,K}\,\mathrm{d}X_J\,\Delta X_K\,\boldsymbol{g}_i = e_{ijk}\,x_{j,J}\,x_{k,K}\,\mathrm{d}X_J\,\Delta X_K\,(\delta_{im}\,\boldsymbol{g}_m) = e_{ijk}\,x_{j,J}\,x_{k,K}\,\mathrm{d}X_J\,\Delta X_K\,(x_{i,L}\,X_{L,m})\,\boldsymbol{g}_m$$

と関係付けられる。最後の式の括弧の中は δ_{im} を故意にこのように置き換えてある。すると，式 (12.13) の Jacobian を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a\,m_i\,\boldsymbol{g}_i &= \left(e_{ijk}\,x_{i,L}\,x_{j,J}\,x_{k,K}\right)\,X_{L,m}\,\mathrm{d}X_J\,\Delta X_K\,\boldsymbol{g}_m = e_{LJK}\,J\,X_{L,m}\,\mathrm{d}X_J\,\Delta X_K\,\boldsymbol{g}_m \\ &= J\,X_{L,m}\,(e_{LJK}\,\mathrm{d}X_J\,\Delta X_K)\,\boldsymbol{g}_m = J\,X_{L,m}\,(\mathrm{d}A\,M_L)\,\boldsymbol{g}_m = J\,X_{L,i}\,\mathrm{d}A\,M_L\,\boldsymbol{g}_i\end{aligned}$$

という関係が得られるので，変形前後の面積は

$$m_i\,\mathrm{d}a = J\,X_{L,i}\,M_L\,\mathrm{d}A, \quad M_I\,\mathrm{d}A = \frac{1}{J}\,x_{k,I}\,m_k\,\mathrm{d}a \tag{12.82a, b}$$

という関係にあることがわかる。この式 (12.82) を式 (12.78) に代入し，式 (12.79) と等置すれば

$$\mathrm{d}f_i = m_j\,\sigma_{ji}\,\mathrm{d}a = J\,X_{L,j}\,M_L\,\mathrm{d}A\,\sigma_{ji} = M_L\left(J\,X_{L,j}\,\sigma_{ji}\right)\mathrm{d}A = M_L\,S^N_{Li}\,\mathrm{d}A$$

となるから，二つの応力間の関係が

$$S^N_{Ij} = J\,X_{I,i}\,\sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{J}\,x_{i,I}\,S^N_{Ij}, \quad \boldsymbol{S}^N = J\,\boldsymbol{F}^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\,\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{S}^N, \tag{12.83a, b, c, d}$$

$$\text{あるいは} \quad S^N_{Ij} = \frac{\rho_0}{\rho}\,X_{I,i}\,\sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\,x_{i,I}\,S^N_{Ij} \tag{12.83e, f}$$

のように求められる。テンソルの直接表記と称して，よく

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\,\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j, \quad \boldsymbol{S}^N = S^N_{Ij}\,\boldsymbol{G}_I \otimes \boldsymbol{g}_j \tag{12.84a, b}$$

と書かれることがあるが，応力成分の最初の添え字が面積の法線を定義する基底ベクトルを表して[22]おり，二つ目の添え字が応力の向きを定義する基底ベクトルを表している。

[21] ほとんどすべての文献（例えば [62]）では，この nominal 応力を第 1 Piola-Kirchhoff 応力と呼んでいる。実際，文献 [73] の定義とその著者による 1980 年頃の講義ノートの中の定義も逆になっているが，ここでは，この二つの応力が最初に定義された文献を明示している文献 [73] の方の定義を用いた。 nominal 応力という呼び方は文献 [38] にあるらしく，後述の第 1 Piola-Kirchhoff 応力を定義して命名したのは文献 [97, 98] となっている。多くの読者は，この nominal 応力を第 1 Piola-Kirchhoff 応力と呼んだ方がいいかもしれないが，注意して欲しいのは添え字の意味で，この文書では二つ目の添え字が応力の向きを表すように定義してある。

[22] この添え字の意味も，文献あるいは大学・学派によって逆なものも多いので注意すること。特に nominal 応力のように非対称（後述）なテンソルの場合には，その物理的な意味を考えるときやつり合い式を求めるときに特に注意が必要である。

(2)　つり合い式と境界条件

Cauchy 応力で表したつり合い式（運動方程式）は，微小変形理論のそれと同じになるのは明らかだから，式 (3.22) と同じく

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{\pi} = \rho \dot{\boldsymbol{v}}, \quad \sigma_{ji,j} + \rho \pi_i = \rho \dot{v}_i \tag{12.85a, b}$$

である。ここに $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})$ は単位質量当たりの分布外力であり，$\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})$ は加速度で，式 (12.62) で表されるように移流項が含まれていることを忘れてはいけない。また境界条件は，物体境界面の法線ベクトルを $\boldsymbol{m}$ とすると

$$u_i = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad m_j \sigma_{ji} = t_i \tag{12.86}$$

と表される。ここに $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ は現配置における単位面積当たりの表面外力である。また，モーメントのつり合いも微小変形理論のそれと同じく

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{12.87}$$

となるから， Cauchy 応力は対称テンソルである。

さて，運動量保存則は

$$\frac{\mathrm{d}(\text{運動エネルギ})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\text{内部エネルギ})}{\mathrm{d}t} = \text{外力の仕事} + \text{加えられた熱量}$$

となるだろうから， e を単位質量当たりの内部エネルギ率とすると，これは

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_v \left(\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \rho e\right) \mathrm{d}v\right\} = \int_v \rho \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}v + \int_s \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}s + \int_v \rho \dot{h}\,\mathrm{d}v - \int_s \boldsymbol{m}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}\,\mathrm{d}s \tag{12.88}$$

と表すことができる。ここに， $\dot{h}(\boldsymbol{x})$ は物体内の熱源からの分布熱量速度であり， $\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x})$ は現配置における表面外向きの熱流率である。熱成分を無視した場合，式 (12.14) の質量保存則 (ρv = const.) を念頭に置けば，最初の 2 項は単純に物質微分でき

$$\int_v \rho\,\{v_i \dot{v}_i + \dot{e}\}\,\mathrm{d}v = \int_v \rho \pi_i v_i\,\mathrm{d}v + \int_s t_i v_i\,\mathrm{d}s$$

となる。これに式 (12.85) のつり合い式を代入して分布外力 $\boldsymbol{\pi}$ を消去し， Gauss の発散定理を用いたあと，式 (12.86) の境界条件を代入すれば $\boldsymbol{t}$ が無くなり，最終的に

$$\int_v \left(\sigma_{ji} v_{i,j} - \rho \dot{e}\right) \mathrm{d}v = 0$$

となる。これより単位質量当たりの内部エネルギ率は

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ji} v_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ji} v_{i,j} + \sigma_{ij} v_{j,i}\right)$$

と書くこともできるので，モーメントのつり合い式 (12.87) を用いて結局

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij} d_{ji} = \dot{w} \tag{12.89}$$

と表すことができる。ここに $\boldsymbol{d}$ は変形速度であり，右辺 $\dot{w}$ は**応力の仕事率**である。熱成分が含まれる場合も同様に定式化でき

$$\dot{e} = \dot{w} + \dot{h} - \frac{1}{\rho}\dot{q}_{i,i} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij} d_{ji} + \dot{h} - \frac{1}{\rho}\dot{q}_{i,i} \tag{12.90}$$

となり，応力の仕事率と熱の仕事率成分の和になる。式 (12.89) から， Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は変形速度 $\boldsymbol{d}$ と「対」になっていることがわかる。この情報は，構成則を与えるときに参考になる重要なものである。

あるいは Lagrange 的に見直すと，熱成分を無視した式 (12.88) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_V \left(\frac{1}{2}\,\rho_0\,\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}+\rho_0\,e\right)\mathrm{d}V\right\}=\int_V \rho_0\,\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}V+\int_S \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}S \tag{12.91}$$

と書くことができる。ここに $\boldsymbol{T}$ は変形前の単位面積当たりの初期配置を基準配置とする表面力であるが，向きは空間固定基底ベクトルで規定されるものとする。また分布外力には $\boldsymbol{\pi}$ を用いているが，正確には $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{X})$ つまり物質点 $\boldsymbol{X}$ の関数である。一方 nominal 応力の定義式 (12.79) からも容易に類推できるように，法線ベクトル $\boldsymbol{M}$ を持つ物体表面の力の境界条件は式 (12.86) と同様

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{S}^N=\boldsymbol{T},\quad M_J\,S^N_{Ji}=T_i \tag{12.92a, b}$$

と与えることができる。この式 (12.92) を式 (12.91) に代入して Gauss の発散定理を用いると，結局

$$\int_V V_i\,\left\{\rho_0\,\dot{V}_i-S^N_{Ji,J}-\rho_0\,\pi_i\right\}\mathrm{d}V+\int_V\left(\rho_0\,\dot{e}-S^N_{Ji}\,V_{i,J}\right)\mathrm{d}V=0$$

となる。これから nominal 応力を用いた **Lagrange 的なつり合い式**は

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{S}^N+\rho_0\,\boldsymbol{\pi}=\rho_0\,\dot{\boldsymbol{V}},\quad S^N_{Ji,J}+\rho_0\,\pi_i=\rho_0\,\dot{V}_i \tag{12.93a, b}$$

と表すことができ，応力の仕事率が

$$\dot{w}=\frac{1}{\rho_0}\,S^N_{Ij}\,V_{j,I}=\frac{1}{\rho_0}\,S^N_{Ij}\,v_{j,I} \tag{12.94}$$

と表される。したがって， nominal 応力 $\boldsymbol{S}^N$ は変形速度 $\boldsymbol{d}$ とではなく速度勾配 $v_{j,I}$ と「対」になっていることがわかる。式 (12.93) のつり合い式は，式 (12.85) の Cauchy 応力で表したものによく似ているが，微分を物体の「物質点」 $\boldsymbol{X}$ で行っているように，全く異なる観点から見たつり合い式であることにも注意すること。

また，式 (12.83) の関係を Cauchy 応力のモーメントのつり合い式 (12.87) に代入すれば， nominal 応力のモーメントのつり合いは

$$x_{i,I}\,S^N_{Ij}=x_{j,I}\,S^N_{Ii} \tag{12.95}$$

としか表すことができないので， nominal 応力 $\boldsymbol{S}^N$ は非対称テンソルであることがわかる。そこで念のために，第 3.3.5 節と同じ演算をして，静的なモーメントのつり合いをとっておこう。全外力のモーメントのつり合いは

$$\int_S \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}S+\int_V \boldsymbol{x}\times\rho_0\,\boldsymbol{\pi}\,\mathrm{d}V=\boldsymbol{0}$$

となる。上式第 1 項の $\boldsymbol{T}$ に境界条件式 (12.92) を代入すると

$$0=\int_S e_{ijk}\,x_j\,M_L\,S^N_{Lk}\,\mathrm{d}S+\int_V e_{ijk}\,x_j\,\rho_0\,\pi_k\,\mathrm{d}V$$

となるので， Gauss の発散定理を用いれば

$$=\int_V e_{ijk}\frac{\partial}{\partial X_L}\left(x_j\,S^N_{Lk}\right)\mathrm{d}V+\int_V e_{ijk}\,x_j\,\rho_0\,\pi_k\,\mathrm{d}V$$

すなわち

$$=\int_V e_{ijk}\left(x_{j,L}\,S^N_{Lk}+x_j\,\frac{\partial S^N_{Lk}}{\partial X_L}\right)\mathrm{d}V+\int_V e_{ijk}\,x_j\,\rho_0\,\pi_k\,\mathrm{d}V$$

となる。これに，慣性項を無視したつり合い式 (12.93) を代入すると，結局，第 1 項の被積分関数の第 1 項以外は無くなって

$$=\int_V e_{ijk}\left(x_{j,L}\,S^N_{Li}\right)\mathrm{d}V=\int_V\left(\frac{1}{2}\,e_{ijk}\,x_{j,L}\,S^N_{Li}+\frac{1}{2}\,e_{ijk}\,x_{j,L}\,S^N_{Li}\right)\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\,e_{ijk}\,\left(x_{j,L}\,S^N_{Li}-x_{i,L}\,S^N_{Lj}\right)\mathrm{d}V$$

となることから，被積分関数にモーメントのつり合い式 (12.95) を得ることができた。

12.3.2 その他の応力とつり合い式

(1) Kirchhoff 応力

あといくつか重要な応力を定義しておこう。まず **Kirchhoff 応力** $\boldsymbol{\tau}^K(\boldsymbol{x})$ は，応力の仕事率の表現で

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\,d_{ji} = \frac{1}{\rho_0}\,\tau^K_{ij}\,d_{ji} \tag{12.96}$$

という関係で定義される。つまり

$$\tau^K_{ij}(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\rho_0}{\rho}\,\sigma_{ij} \tag{12.97}$$

である。ただし基準配置が現配置であることに注意すること。少し奇妙な応力で，使い方はよくわからない。

これによく似た応力テンソルで初期配置を基準配置とする Lagrange 的な応力を定義するために仕事率を書き直しておこう。変形速度を定義した式 (12.52) から

$$\dot{E}_{IJ} = d_{ij}\,F_{iI}\,F_{jJ}, \quad d_{ij} = X_{I,i}\,X_{J,j}\,\dot{E}_{IJ} \tag{12.98a, b}$$

という関係を得るので，これを応力の仕事率の表現式 (12.89) に代入すると

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\,d_{ji} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\,X_{I,i}\,X_{J,j}\,\dot{E}_{IJ} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,\sigma_{ij}\,X_{I,i}\,X_{J,j}\right)\dot{E}_{IJ}$$

と書くこともできる。この括弧の中の量を応力テンソル $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$ として定義すれば，結局

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho_0}\,S_{IJ}\,\dot{E}_{JI} \tag{12.99}$$

のように応力の仕事率を表現できる。この $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$ は**第 2 Piola-Kirchhoff 応力**と呼ばれ

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X}) = S_{IJ}\,\boldsymbol{G}_I \otimes \boldsymbol{G}_J, \quad S_{IJ} \equiv \frac{\rho_0}{\rho}\,X_{I,i}\,X_{J,j}\,\sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\,x_{i,I}\,x_{j,J}\,S_{IJ} \tag{12.100a, b, c}$$

と定義される。構成則を第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いて与える場合には Green のひずみと関連付けることが望ましいことを，応力の仕事率の式 (12.99) の「組」は示唆している。注意しないといけないのは，もはや $\boldsymbol{G}_I$ は単位直交基底ではなくなっていることである。したがって，ちょうど第 C.4 節で示す極座標系の例にあるように，物理的な成分とテンソル成分 S_{IJ} との違いを明確にしておくことが重要だ。また同じ理由で，第 2 Piola-Kirchhoff 応力と nominal 応力では共変成分と反変成分を区別する必要があるが，この章の議論で特にそれが必要になることは無いので，以下でも下添え字を用いている。

さて，式 (12.100) に式 (12.83) の nominal 応力と Cauchy 応力の関係を代入すれば

$$S^N_{Ij} = x_{j,J}\,S_{IJ}, \quad S_{IJ} = S^N_{Ij}\,X_{J,j} \tag{12.101a, b}$$

という関係にあることがわかる。これと式 (12.100) を見比べながら，もう一つ応力テンソル $\boldsymbol{T}^R(\boldsymbol{X})$ を

$$T^R_{iJ} = x_{i,K}\,S_{KJ}, \quad S_{KJ} = X_{K,i}\,T^R_{iJ} \tag{12.102a, b}$$

と定義する。この $\boldsymbol{T}^R(\boldsymbol{X})$ は**第 1 Piola-Kirchhoff 応力**と呼ばれる。したがって，他の応力とは

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\,x_{i,I}\,\underline{x_{j,J}\,S_{IJ}} = \frac{\rho}{\rho_0}\,x_{i,I}\,\underline{S^N_{Ij}} = \frac{\rho}{\rho_0}\,\underset{\sim}{x_{i,I}}\,x_{j,J}\,\underset{\sim}{S_{IJ}} = \frac{\rho}{\rho_0}\,\underset{\sim}{T^R_{iJ}}\,x_{j,J} \tag{12.103}$$

という関係にある。ちょうど nominal 応力の「転置」のように見えるが，物理的な意味は異なるので注意が必要である。

最後に，**第 2 Piola-Kirchhoff 応力で表したつり合い式**は， nominal 応力との関係式 (12.101) を式 (12.93) に代入することによって

$$(x_{i,K}\, S_{JK})_{,J} + \rho_0\, \pi_i = \rho_0\, \dot{V}_i \tag{12.104}$$

となる。注意しなければいけないのは，このつり合い式は式 (12.93) と同様，微分を物体の「物質点」毎に行っていること（微分のコンマの次の添え字が大文字）である。したがって分布外力も $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{X})$ と考えた方がいい。しかし，そのつり合いは空間固定基底の $\boldsymbol{g}_i$ 方向で表示してあることにも注意すべきである。第 2 Piola-Kirchhoff 応力が $\boldsymbol{G}_K$ 方向の力であることから，一種の座標変換（正規直交とは限らない）にも相当する変形勾配 $(x_{i,K})$ が乗じられた成分でつり合いを表現しているのだ。

(2) 第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみの物理的な意味

第 B.2 節で定式化した Bernoulli-Euler 梁の有限変位の枠組のつり合い式では，第 2 Piola-Kirchhoff 応力が用いられ，幾何学的にも非常にわかり易い理論が構築されている。そのモデルを用いて第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみの物理的な意味を説明しよう。まず式 (12.106) のペアと同様，仮想仕事式が式 (B.21) の

$$\int_V S_{11}\, \delta E_{11}\, \mathrm{d}V = \int_V \sigma\, \delta e\, \mathrm{d}V = \int_V (\text{第 2 Piola-Kirchhoff 応力の物理成分})\, \delta\, (\text{Green のひずみの物理成分})\, \mathrm{d}V$$

のようになり，梁の断面変形は無いので，式 (B.22) で定義し直した第 2 Piola-Kirchhoff 応力の物理成分

$$\sigma = \sqrt{g}\, S_{11}$$

と，式 (B.19) で定義される Green のひずみの物理成分としての伸び

$$e = \sqrt{1 + 2\, E_{11}} - 1 = \sqrt{g} - 1 = \epsilon - x_3\, \kappa$$

の積で，内部仮想仕事が算定できる。この σ は Cauchy 応力ではない。S_{11} が $\boldsymbol{G}_1$ 方向の応力成分であり，基底ベクトルは単位ではなく $|\boldsymbol{G}_1| = \sqrt{g}$ であることがわかれば

$$S_{11}\, \boldsymbol{G}_1 = \sigma\, \frac{\boldsymbol{G}_1}{|\boldsymbol{G}_1|}$$

と置くことができることから，テンソル成分の S_{11} が持つ物理的に意味のある成分としての値を σ が持っていることが明らかだ。また変形前に単位量だった梁の軸方向の基底ベクトル $\boldsymbol{g}_1$ が伸びて，変形後に $\boldsymbol{G}_1$ になっていることから，$|\boldsymbol{G}_1| = \sqrt{g}$ が軸線の伸びであることも明らかだ。つまり，e は Green のひずみテンソル成分 E_{xx} の物理的な成分であり，上式の定義は式 (12.24a) と同じで，実はそれは式 (12.44a) の伸びひずみテンソル $\boldsymbol{E}^E$ の成分にも一致する。そして梁の構成則は上記の仮想仕事式の組を念頭に置いて

$$\sigma = E\, e, \quad (\text{第 2 Piola-Kirchhoff 応力の物理成分}) = (\text{材料パラメータ}) \times (\text{Green ひずみの物理成分})$$

とモデル化することによって，とても美しい理論が構築できているのだ。

さらにつり合い式 (B.27) は，少し書き換えると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left[\begin{pmatrix} \cos\theta(X) & \sin\theta(X) \\ -\sin\theta(X) & \cos\theta(X) \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} N(X) \\ V(X) \end{Bmatrix}\right] + \begin{Bmatrix} p(X) \\ q(X) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

となる。軸力 N はたわんで θ だけ回転した軸線方向の力であり，せん断力 V はそれに直交した方向の力である。つまり内力は $\boldsymbol{G}_K$ 方向の力である。しかし外力 p と q は空間固定座標の $\boldsymbol{g}_i$ 方向で定義されているため，たわみ角 θ で定義できる座標変換行列を断面力に乗じて空間固定座標方向に変換したつり合い式になっているのである。この座標変換行列の部分が上式 (12.104) の $(x_{i,K})$ の項に相当する。そして微分は物質点座標 X でとってあり，外力 p も q も物質点座標（変形前の座標） X の関数として定義されていることに注意すること。

(3) Biot 応力

最後に，式 (12.44a) の伸びひずみあるいは Biot のひずみ $\boldsymbol{E}^E$ と組になる応力 [73] を定義しておく。式 (12.9) (12.18) (12.44a) から

$$\dot{E}_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\dot{U}_{KI}\,U_{KJ} + U_{KI}\,\dot{U}_{KJ}\right)$$

となることを式 (12.99) に代入し，式 (12.44a) の定義から $\dot{\boldsymbol{E}}^E = \dot{\boldsymbol{U}}$ であることを念頭に置いて， $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{U}$ が対称テンソルであることを用いて，最終的に $\dot{\boldsymbol{E}}^E$ と組になる応力が対称テンソルになるように注意して演算すると

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho_0}\,S_{IJ}\,\dot{E}_{JI} = \frac{1}{\rho_0}\,\frac{1}{2}\,(S_{JK}\,U_{KI} + U_{JK}\,S_{KI})\;\dot{E}^E_{JI}$$

を得る。この表現から新しい応力テンソル $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ を

$$\boldsymbol{T} \equiv \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{S}), \quad T_{IJ} \equiv \frac{1}{2}\,(S_{IK}\,U_{KJ} + U_{IK}\,S_{KJ}) \tag{12.105a, b}$$

と定義できる。この $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ は **Biot 応力**と呼ばれる。念のために，応力の仕事率の組み合わせをまとめると

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\,d_{ji} = \frac{1}{\rho_0}\,\tau^K_{ij}\,d_{ji} = \frac{1}{\rho_0}\,S^N_{Ij}\,v_{j,I} = \frac{1}{\rho_0}\,S_{IJ}\,\dot{E}_{JI} = \frac{1}{\rho_0}\,T_{IJ}\,\dot{E}^E_{JI} \tag{12.106}$$

となる。このような組を，応力とひずみの**共役な**組と呼ぶことがある。

ところで上では対称な応力テンソルとして定義したが，同じ演算で非対称の

$$T^{\text{NONSYM}}_{IJ} \equiv U_{IK}\,S_{KJ} \tag{12.107}$$

のようなテンソルとしても定義できる。これを式 (12.101) に代入すると，極分解の定理を用いることによって，nominal 応力との間に

$$S^N_{Ij} = T^{\text{NONSYM}}_{IK}\,R_{jK}$$

という関係が成り立つ。 nominal 応力 $\boldsymbol{S}^N$ が空間固定座標方向の成分を持つことを念頭に置くと， Biot 応力は，初期配置の単位面積当たりの埋め込み座標基底の現配置の単位基底方向成分であることがわかる。これが Biot 応力の物理的な意味である。

12.3.3 応力の物理的な意味

(1) 各応力の定義の違い

これまでの定義はやや数学的過ぎたので，図 12.9 を用いて物理的な意味を整理しておこう。

Cauchy 応力（真応力） $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\,\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j$: 現配置の単位面積に発生した内力表面力ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ の，その単位面積当たりの，空間固定座標の単位基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソル。その面は初期配置においては単位面積とは限らない。一番わかり易い応力テンソルではあるが実験による測定は困難である。

第 1 Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{T}^R = T^R_{iJ}\,\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{G}_J$: 現配置の単位面積に発生した内力表面力ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ の，その単位面積当たりの応力の $\dfrac{\rho_0}{\rho}$ 倍である Kirchhoff 応力で，現配置における物体埋め込み座標の基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソル。その面は初期配置においては単位面積とは限らない。一番わかり難い応力テンソルである。 T^R_{11} と T^R_{12} は一般には直交しない方向の成分になる。

nominal 応力 $\boldsymbol{S}^N = S^N_{Ij}\,\boldsymbol{G}_I \otimes \boldsymbol{g}_j$: 初期配置の単位面積を追跡して現配置に至った面に発生した内力表面力ベクトル $\boldsymbol{R}$ の，その初期の単位面積当たりの，空間固定座標の単位基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソ

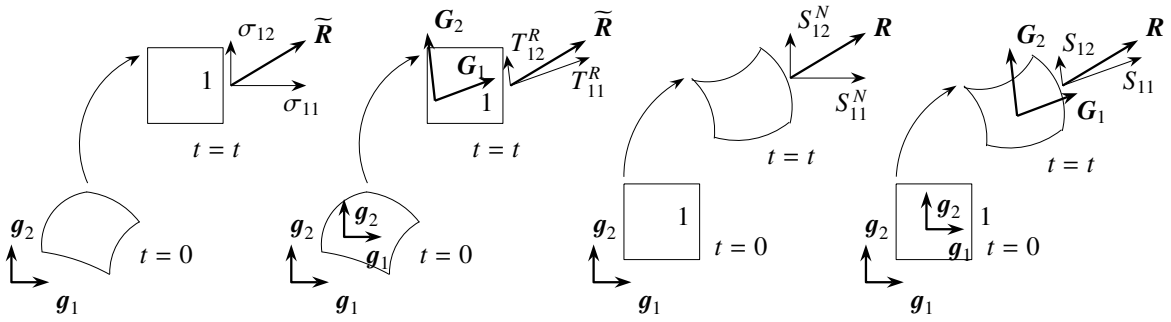


図 12.9 代表的な応力テンソル: Cauchy 応力と nominal 応力および 2 種類の Piola-Kirchhoff 応力

ル。現配置の面は単位面積とは限らない。よく第 1 Piola-Kirchhoff 応力の転置テンソルとして認識されるが，物理的な意味が異なることには注意すべきである。 **updated Lagrange 的定式化**で最も重要な役割を持つ応力テンソルである。

第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S} = S_{IJ}\,\boldsymbol{G}_I \otimes \boldsymbol{G}_J$: 初期配置の単位面積を追跡して現配置に至った面に発生した内力表面力ベクトル $\boldsymbol{R}$ の，その初期の単位面積当たりの，現配置における物体埋め込み座標の基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソル。現配置の面は単位面積とは限らない。 Cauchy 応力と同様，一見わかり易い応力テンソルではあるが，物理的な意味が曖昧な数学的な量なので，そのまま構成則に用いるには困難が伴う。 S_{11} と S_{12} は一般には直交しない方向の成分になる。これも **Lagrange 的**および **updated Lagrange 的定式化**で重要な役割を持つ応力テンソルである。

Biot 応力 $\boldsymbol{T} \simeq T_{IJ}\,\boldsymbol{G}_I \otimes \dfrac{\boldsymbol{G}_J}{|\boldsymbol{G}_J|}$: 初期配置の単位面積を追跡して現配置に至った面に発生した内力表面ベクトルの，現配置における物体埋め込み座標の「単位」基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソルである。

(2) 例で確かめる各応力の違い

簡単な例として，図 12.2 つまり図 12.10 のように 3 方向にそれぞれストレッチ Λ_i $(i = 1, 2, 3)$ だけが生じて x_1-x_2 面内で α だけ剛体回転した状態で， $\dfrac{\boldsymbol{G}_1}{|\boldsymbol{G}_1|}$ 方向にのみ内力表面力 R が発生しているものとする。直交する主ストレッチ方向を座標系にとって任意の変形状態を表現したと考えればいい。こうしておけば，どの応力テンソルでも，成分同士の直交性・平行性が成り立つので考え易い。一般に鋼の引張試験等のように初期状態の寸法を使って試験機で測定した反力から応力を定量化するので，初期状態で単位面積を持った面に**初期の単位面積当たりの内力表面力** R が現配置において生じている状況を考える。この例では埋め込んだ $\boldsymbol{G}_1$ 方向にしか内力表面力が発生していないので，まず第 2 Piola-Kirchhoff 応力は簡単に誘導できる。ただ注意しないといけないのは，この成分は $\boldsymbol{G}_1$ 方向成分であることであり，その基底ベクトルと合わせて

$$\boldsymbol{R} = R\,\frac{\boldsymbol{G}_1}{|\boldsymbol{G}_1|} = S_{11}\,\boldsymbol{G}_1 \quad \rightarrow \quad S_{11} = \frac{R}{|\boldsymbol{G}_1|}$$

とならなければならないことである。 $\boldsymbol{G}_1$ が単位基底ベクトルではないから，ストレッチ $\Lambda_1 = |\boldsymbol{G}_1|$ を用いて

$$S_{11}(\boldsymbol{X}) = \frac{R}{\Lambda_1}, \quad \text{他の } S_{IJ} = 0 \tag{12.108a, b}$$

となる。 R は第 2 Piola-Kirchhoff 応力 S_{11} の物理成分と呼ばれることもあり，値も単位も実際の圧力である。そして Biot 応力は式 (12.105) から

$$T_{11} = R, \quad \text{他の } T_{IJ} = 0$$

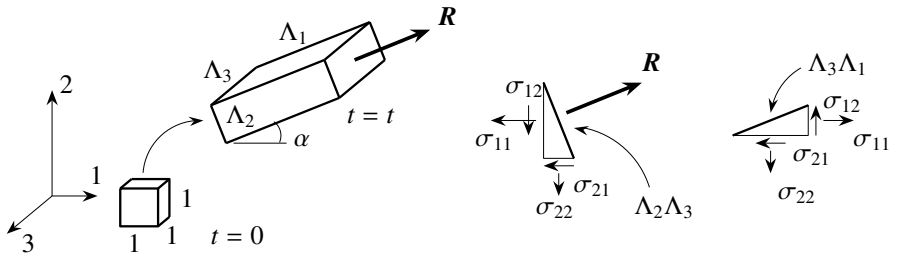


図 12.10 簡単な材料試験片における種々の応力の成分の違い

となり， Lagrange 的な物理的に意味のある応力であることがわかる。これに対し， nominal 応力は同じ面に発生した表面力の空間固定座標 $\boldsymbol{g}_i$ 方向の成分であるから，単純に

$$S_{11}^N(\boldsymbol{X}) = R\,\cos\alpha, \quad S_{12}^N(\boldsymbol{X}) = R\,\sin\alpha, \quad S_{21}^N(\boldsymbol{X}) = 0, \quad S_{22}^N(\boldsymbol{X}) = 0 \tag{12.109a, b, c, d}$$

となる。

次に R を第 2 Piola-Kirchhoff 応力として扱いながら， Cauchy 応力を求めてみよう。 Cauchy 応力は現配置の単位面積当たりの応力だから，同図の右から 2 番目の図に示した面上のつり合いから

$$\sigma_{11}\,\Lambda_2\Lambda_3\cos\alpha + \sigma_{21}\,\Lambda_2\Lambda_3\sin\alpha = R\cos\alpha, \quad \sigma_{12}\,\Lambda_2\Lambda_3\cos\alpha + \sigma_{22}\,\Lambda_2\Lambda_3\sin\alpha = R\sin\alpha \tag{a}$$

という関係にある。 Cauchy 応力は現配置における単位面積当たりの力であることと，初期単位面積で R を定義しているので右辺には現配置の面積 $\Lambda_2\Lambda_3$ が無いこととに注意すること。ここが第 2 Piola-Kirchhoff 応力について最もわかり難いところ[23]である。同様に一番右の図のつり合いから，上面が自由表面なので

$$\sigma_{11}\,\Lambda_3\Lambda_1\sin\alpha - \sigma_{21}\,\Lambda_3\Lambda_1\cos\alpha = 0, \quad \sigma_{12}\,\Lambda_3\Lambda_1\sin\alpha - \sigma_{22}\,\Lambda_3\Lambda_1\cos\alpha = 0$$

つまり

$$\sigma_{21} = \sigma_{11}\,\tan\alpha, \quad \sigma_{22} = \sigma_{12}\,\tan\alpha = \sigma_{11}\,\tan^2\alpha$$

となるので，上の式 (a) に代入することによって Cauchy 応力が

$$\sigma_{11}(\boldsymbol{x}) = \frac{R\,\cos^2\alpha}{\Lambda_2\Lambda_3}, \quad \sigma_{12}(\boldsymbol{x}) = \frac{R\,\sin\alpha\cos\alpha}{\Lambda_2\Lambda_3}, \quad \sigma_{22}(\boldsymbol{x}) = \frac{R\,\sin^2\alpha}{\Lambda_2\Lambda_3} \tag{12.110a, b, c}$$

と算定できる。求めてしまえば当たり前だろう。というのも，右辺の $\dfrac{R}{\Lambda_2\Lambda_3}$ が右の面に生じている Cauchy 応力の $\dfrac{\boldsymbol{G}_I}{|\boldsymbol{G}_I|}$ 方向成分なので，この式は単に座標変換式 (3.41) を示しているに過ぎないからだ。

最後に第 1 Piola-Kirchhoff 応力を求めてみよう。まず，質量保存則から

$$\text{質量} = \rho_0\,\mathrm{d}V_0 = \rho\,\mathrm{d}V \quad \rightarrow \quad \rho_0 \times 1 = \rho \times \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 \quad \rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3} \tag{b}$$

だから，上式の Cauchy 応力に対する Kirchhoff 応力は，その定義式 (12.97) から

$$\tau_{11}^K = \frac{\rho_0}{\rho}\,\sigma_{11} = \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\,\sigma_{11} = R\,\Lambda_1\,\cos^2\alpha, \quad \tau_{12}^K = R\,\Lambda_1\,\sin\alpha\cos\alpha, \quad \tau_{22}^K = R\,\Lambda_1\,\sin^2\alpha \tag{12.111a, b, c}$$

となる。これはあまりよくわからない成分である。次に，法線が $\boldsymbol{g}_1$ になる面の Kirchhoff 的表面力 $\tilde{f}_1$ は

$$\tilde{f}_1 = \tau_{11}^K\,\boldsymbol{g}_1 + \tau_{12}^K\,\boldsymbol{g}_2$$

[23] 著名な文献 [27] の解説もわかり難い。文献によっては，初期配置の単位面に R が生じているような図があった記憶があるが，ますますわかり難い。

であり，これを $\dfrac{\boldsymbol{G}_1}{|\boldsymbol{G}_1|}$ 方向成分 $\tilde{\tau}^K_{11}$ と $\dfrac{\boldsymbol{G}_2}{|\boldsymbol{G}_2|}$ 方向成分 $\tilde{\tau}^K_{12}$ に分解し直すと

$$\tilde{f}_1 = \tau^K_{11}\,\boldsymbol{g}_1 + \tau^K_{12}\,\boldsymbol{g}_2 = \tilde{\tau}^K_{11}\,\frac{\boldsymbol{G}_1}{|\boldsymbol{G}_1|} + \tilde{\tau}^K_{12}\,\frac{\boldsymbol{G}_2}{|\boldsymbol{G}_2|}$$

と等置されなければならないので

$$\tilde{\tau}^K_{11} = \tau^K_{11}\,\cos\alpha + \tau^K_{12}\,\sin\alpha = R\,\Lambda_1\,\cos\alpha, \quad \tilde{\tau}^K_{12} = \tau^K_{12}\,\cos\alpha - \tau^K_{11}\,\sin\alpha = 0$$

を得る。最後にこれを第 1 Piola-Kirchhoff 応力で表すと

$$\tilde{f}_1 = \tau^K_{11}\,\boldsymbol{g}_1 + \tau^K_{12}\,\boldsymbol{g}_2 = \tilde{\tau}^K_{11}\,\frac{\boldsymbol{G}_1}{|\boldsymbol{G}_1|} + \tilde{\tau}^K_{12}\,\frac{\boldsymbol{G}_2}{|\boldsymbol{G}_2|} = T^R_{11}\,\boldsymbol{G}_1 + T^R_{12}\,\boldsymbol{G}_2$$

と等置されなければならないので，結局

$$T^R_{11} = \frac{\tilde{\tau}^K_{11}}{|\boldsymbol{G}_1|} = \frac{\tilde{\tau}^K_{11}}{\Lambda_1} = R\,\cos\alpha, \quad T^R_{12} = \frac{\tilde{\tau}^K_{12}}{\Lambda_2} = 0$$

と求められる。同じ演算を法線が $\boldsymbol{g}_2$ になる面の表面力に対して行うと

$$\tilde{\tau}^K_{21} = \tau^K_{21}\,\cos\alpha + \tau^K_{22}\,\sin\alpha = R\,\Lambda_1\,\sin\alpha, \quad \tilde{\tau}^K_{22} = \tau^K_{22}\,\cos\alpha - \tau^K_{21}\,\sin\alpha = 0$$

でないといけないので

$$T^R_{21} = \frac{\tilde{\tau}^K_{21}}{|\boldsymbol{G}_1|} = \frac{\tilde{\tau}^K_{21}}{\Lambda_1} = R\,\sin\alpha, \quad T^R_{22} = \frac{\tilde{\tau}^K_{22}}{\Lambda_2} = 0$$

となる。以上の結果をまとめると

$$T^R_{11}(\boldsymbol{x}) = R\,\cos\alpha, \quad T^R_{12}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad T^R_{21}(\boldsymbol{x}) = R\,\sin\alpha, \quad T^R_{22}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{12.112a, b, c, d}$$

と求められる。確かに nominal 応力成分と転置の関係にあるが，力の向きや発生している面が異なるから，値が転置の関係にあるだけのことだ。

さて以上では力学的・幾何学的に各応力テンソルの成分を求めてみたが，前節までの各種応力テンソル間の関係式から成分を誘導し，以上の結果が正しかったことを確かめておこう。この例は図 12.2 と同じく 3 軸方向へのストレッチと回転のみの簡単な運動なので，式 (12.34) と同様

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J}\right) = \begin{pmatrix} & & \\ & x_{i,J} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1\cos\alpha & -\Lambda_2\sin\alpha & 0 \\ \Lambda_1\sin\alpha & \Lambda_2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる。これを用い， Cauchy 応力と第 2 Piola-Kirchhoff 応力の関係式 (12.100) に式 (12.108) を代入して，再度 Cauchy 応力を求めてみよう。密度比が式 (b) であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\rho}{\rho_0}\,x_{1,1}\,x_{1,1}\,S_{11} = \frac{1}{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}\,\Lambda_1^2\cos^2\alpha\,\frac{R}{\Lambda_1} = \frac{R\,\cos^2\alpha}{\Lambda_2\Lambda_3} \\
\sigma_{12} &= \frac{\rho}{\rho_0}\,x_{1,1}\,x_{2,1}\,S_{11} = \frac{1}{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}\,\Lambda_1^2\sin\alpha\cos\alpha\,\frac{R}{\Lambda_1} = \frac{R\,\sin\alpha\cos\alpha}{\Lambda_2\Lambda_3} \\
\sigma_{22} &= \frac{\rho}{\rho_0}\,x_{2,1}\,x_{2,1}\,S_{11} = \frac{1}{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3}\,\Lambda_1^2\sin^2\alpha\,\frac{R}{\Lambda_1} = \frac{R\,\sin^2\alpha}{\Lambda_2\Lambda_3},
\end{aligned}$$

となり，これは式 (12.110) に一致する。

次に，式 (12.108) の第 2 Piola-Kirchhoff 応力を式 (12.102) に代入して第 1 Piola-Kirchhoff 応力を求めてみると，零でない成分は

$$T^R_{11} = x_{1,1}\,S_{11} = \frac{R}{\Lambda_1}\,\Lambda_1\,\cos\alpha = R\,\cos\alpha, \quad T^R_{21} = x_{2,1}\,S_{11} = R\,\sin\alpha$$

となり，これは式 (12.112) に一致する。また同様に，式 (12.79) で nominal 応力を求めてみると，零でない成分は

$$S_{11}^N = S_{11}\, x_{1,1} = \frac{R}{\Lambda_1}\,\Lambda_1\,\cos\alpha = R\,\cos\alpha, \quad S_{12}^N = S_{11}\, x_{2,1} = R\,\sin\alpha$$

となり，これも式 (12.109) に一致する。ちなみに，微小変形の $\Lambda_i \simeq 1, \alpha \simeq 0$ の場合には，応力テンソル間の差異が無くなることも確認できる。

ところで鋼の引張試験結果を図示するときに，ロードセルの読みを試験片の初期状態の断面積で割った「応力」を**公称応力**と呼んで用いることがある。いわゆる「絞り」が発生するまでの間は真応力と工学的には差異が無いことが多い。ときどき，この公称応力が第 1 Piola-Kirchhoff 応力であると言われるようだが，図 12.11 のようにせん断帯（Lüders 帯）が出たあとの若干回転した試験片の状況を考えると，公称応力は空間固定座標方向の応力であることがわかるので，どちらかと言えば nominal 応力の方[24]に近いと考えざるを得ない。実際，公称応力は ‘nominal stress’ の訳[25]である。ただ公称応力が 9 成分を持つ非対称応力テンソルだという認識は無いと捉え，この文書では公称応力という「日本語の名称」はあまり用いないことにした。

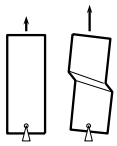


図 12.11 公称応力

演習問題 12-3

3. 第 12.3.3 (2) 節で求めた各種応力を，物理的な意味を考えながら自ら求めてみよ。手を動かさずにわかったような気になっていると，この先できっと怪我をしますよ。

12.3.4 客観性を持つ応力速度

さて有限変形を許容するということは，塑性変形も生じるのが一般的だと考えていいだろう。そのとき履歴依存性を持つ流れ則を規定しなければならないことから，少なくとも変形（ひずみ）は増分あるいは速度で表現できないといけなかった。それに対応した応力を算定するためのモデルは種々存在し得るのだが，一つの基礎的なモデルは，式 (12.73) の加算則が成立するとして何らかの応力速度 $\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})$ を定義して

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) : \{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x})\}$$

のように弾性の構成則も増分で規定することだろう。第 11 章では弾性も含めた増分理論を展開し，流れ則が積分不可能な増分式でなければならないことも示した。そこで，材料と一緒に何らかの規則で回転した座標で定義される**客観性を持つ応力速度** $\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}$ をいくつか定義しよう。

まず客観性という言葉の意味をやや文学的に説明しておく。極分解の定理で回転 $\boldsymbol{R}$ を除去された変形勾配成分である変形テンソルが，材料が実際に感じている歪(ゆが)み成分だった。そしてこれに対応した応力は，この歪み成分に相当する材料の抵抗力であり，材料の抵抗則を表現するための数学的概念だった。さらに変形速度にも，この回転 $\boldsymbol{R}$ の速度 $\boldsymbol{\omega}^R$ が含まれていなかったことを思い出して欲しい。つまり変形速度は材料が実際に感じている歪(ゆが)みの増分と考えていい。ということは，応力速度も材料の実質的な抵抗力増分を表現したものでなければならない。そう考えると，材料と一緒に回転しながら実質的な歪み増分に対応するような，まさに Lagrange 的な尺度の方を用いるのが適切だと思われる。例えば，材料に埋め込んだ座標系で定義された第 2 Piola-Kirchhoff 応力の変化率 $\dot{\boldsymbol{S}}$ がその候補だと考えられる。しかし後述の例のように，第 2 Piola-Kirchhoff 応力で初期配置から破壊までの有限変形を追跡できるモデルを作るのは困難だと予想される。また塑性は現配置からの

[24] 多くの文献にある定義なら第 1 Piola-Kirchhoff 応力の方だが，そのような文献で第 1 Piola-Kirchhoff 応力を nominal 応力とは呼ばないことから，この文書つまり文献 [73] の定義の方が説得力がある・・・かな。

[25] ‘engineering stress’ や ‘conventional stress’ と呼ばれることもある。

接線的な抵抗則であることから， Lagrange 的な尺度の中でもどちらかと言うと第 12.4 節で説明する updated Lagrange 的な尺度を，その抵抗則には用いた方がいいと考えられる。

この現配置からの接線抵抗という考え方からは， Euler 的な Cauchy 応力や Kirchhoff 応力を用いた接線的な構成則で材料試験結果をモデル化する方が適切だろう。そこで Cauchy 応力の時間変化率が持つ特性を，回転している物体を対象として示してみよう。図 12.12 に示したのは，一定応力 σ_0 で抵抗している棒が速度 ω で回転している状態[26]である。時刻 $t = 0$ に棒が水平だったとすると，この材料中の Cauchy 応力は座標変換の式 (3.41) から

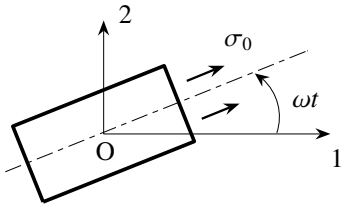


図 12.12 客観性を持つ応力速度

$$\sigma_{11} = \sigma_0 \cos^2 \omega t, \quad \sigma_{22} = \sigma_0 \sin^2 \omega t, \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\omega t \tag{12.113a, b, c}$$

になる。すると応力の変化率は

$$\dot{\sigma}_{11} = -\omega\,\sigma_0 \sin 2\omega t, \quad \dot{\sigma}_{22} = \omega\,\sigma_0 \sin 2\omega t, \quad \dot{\sigma}_{12} = \omega\,\sigma_0 \cos 2\omega t \tag{12.114a, b, c}$$

となり，いずれも零にはならない。しかし，材料は常に一定の応力で抵抗したままだから，構成則に使われるべき応力速度は零であり続けなければならないはずだ。というのも，材料は回っていることには気付いていたとしても，抵抗の仕方については何も変化を感じていないからだ。したがって， Cauchy 応力の単純な時間微分はそのままでは構成則に用いることができないことになる。初学者にはまずとても驚いて欲しいところだ。

そこで材料と一緒に運動する系から応力の変化率を観てみよう。まず材料に現配置で埋め込んだ座標を x'_i とし，時刻 $t = t$ にはこれが空間固定座標に一致しているものとする。つまり

$$x'_i(t) = x_i(t)$$

とする。ある微分線要素 $\mathrm{d}x_i$ の変化をこの埋め込み座標から眺めると

$$\mathrm{d}x_i(t+\delta t) = \mathrm{d}x_i(t) + \delta t\,\mathrm{d}v_i(t) = \left(\delta_{ij} + \delta t\, v_{i,j}\right)\mathrm{d}x_j(t)$$

とみなすことができるが， $\mathrm{d}x'_i(t)$ は材料に貼り付けてあるので

$$\mathrm{d}x'_i(t) = \mathrm{d}x_i(t) = \mathrm{d}x'_i(t+\delta t)$$

が成立するので，上式は

$$\mathrm{d}x_i(t+\delta t) = \left(\delta_{ij} + \delta t\, v_{i,j}\right)\mathrm{d}x'_j(t+\delta t)$$

と書いてもいい。したがって，その逆関係から

$$\mathrm{d}x'_i(t+\delta t) = \left(\delta_{ij} - \delta t\, v_{i,j}\right)\mathrm{d}x_j(t+\delta t)$$

と求められる。つまりこの右辺の括弧は，時刻 $t = t + \delta t$ における空間固定座標系と埋め込み座標系との間の一種の座標変換行列になっている。ところで，あとで証明するが Cauchy 応力は

$$\sigma_{ij}(t+\delta t) = \sigma_{ij}(t) + \delta t\,\dot{\sigma}_{ij}(t)$$

のように更新できる。すると，埋め込み座標系で眺めた Cauchy 応力は，上の座標変換則を 2 階のテンソルに拡張して

$$\sigma'_{ij}(t+\delta t) = \left(\delta_{ik} - \delta t\, v_{i,k}\right)\left(\delta_{jl} - \delta t\, v_{j,l}\right)\sigma_{kl}(t+\delta t)$$

[26] これは文献 [27] の記述を用いて Nemat-Nasser 先生が説明してくれたもので，多くの文献にある数学的な考察に比べて第 1 著者にはとてもわかり易かったので，ここでも用いた。

のように算出すればいいので，これに上式を代入して δt の 1 次項までを残すと

$$\sigma'_{ij}(t+\delta t) = \sigma_{ij}(t) + \delta t \left[\dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\,\sigma_{kj} - v_{j,k}\,\sigma_{ki}\right]$$

を得る。時刻 $t = t$ には $\sigma'_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t)$ なので，これから Cauchy 応力の埋め込み座標系で観た変化率を

$$\overset{\sqcup}{\sigma}_{ij} \equiv \lim_{\delta t \to 0} \frac{\sigma'_{ij}(t+\delta t) - \sigma'_{ij}(t)}{\delta t} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\,\sigma_{kj} - v_{j,k}\,\sigma_{ki} = \dot{\sigma}_{ij} - l_{ik}\,\sigma_{kj} - l_{jk}\,\sigma_{ki} \tag{12.115}$$

と定義できる。この応力速度 $\overset{\sqcup}{\boldsymbol{\sigma}}$ は **Oldroyd 応力速度**と呼ばれる。では，図 12.12 の回転する材料の例で算定してみよう。この図の運動は

$$v_{1,1} = 0, \quad v_{1,2} = -\omega, \quad v_{2,1} = \omega, \quad v_{2,2} = 0 \tag{12.116a, b, c, d}$$

だから，これと式 (12.113) (12.114) を式 (12.115) に代入すると，すべて

$$\overset{\sqcup}{\sigma}_{11} = 0, \quad \overset{\sqcup}{\sigma}_{22} = 0, \quad \overset{\sqcup}{\sigma}_{12} = 0$$

となるので，抵抗の仕方が何も変化していないと感じている材料の挙動を，この応力速度 $\overset{\sqcup}{\boldsymbol{\sigma}}$ は表現できたことになる。そしてこのような応力速度が客観性を持つ応力速度と呼ばれる。

最もよく用いられている Jaumann の応力速度は，やはり材料と一緒に運動する座標系から定義した速度なのだが，変形しない（あるいは変形を無視した）埋め込み座標系で観察した速度である。したがってそれは，上式 (12.115) の速度勾配 $\boldsymbol{l}$ から変形速度成分 $\boldsymbol{d}$ を取り去ってスピン成分 $\boldsymbol{w}$ だけにした

$$\overset{\triangledown}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\,\sigma_{kj} - w_{jk}\,\sigma_{ki} \tag{12.117}$$

で定義される。これが Cauchy 応力の **Jaumann 速度**と呼ばれる応力速度であり，**共回転応力速度**あるいは単に Jaumann 応力速度とも呼ばれ，これも客観性を持つ応力速度である。ただこの速度は，大きく伸びながら 60 度以上の角変化を生じさせるような単純せん断において，正弦曲線のような応力ひずみ関係を予測 [58] してしまう（図 12.23 にも示した）等，使用には注意が必要である。このように客観性を持つ応力速度は，例えば Jaumann 応力速度に $\left(\sigma_{ij}\,d_{kk}\right)$ や $\left(d_{ik}\,\sigma_{kj} + d_{jk}\,\sigma_{ki}\right)$ を足したり引いたりして無数に定義（図 12.14）でき，構成則を構築するのに果たしてどれを用いたらいいのかの判断は難しい。著者の提案の一つを後述の数値解析の節に示した。ちなみに **Kirchhoff 応力の Jaumann 速度** $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}}{}^{K}$ は

$$\overset{\triangledown}{\tau}{}^{K}_{ij} \equiv \overset{\triangledown}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\,d_{kk} \tag{12.118}$$

と定義されている。正統的な客観性の証明はとても数学的過ぎることから割愛したので，興味のある読者は別途各種文献を眺めて欲しい。文献 [62] も比較的理解し易い。また， Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と変形速度 $\boldsymbol{d}$ は客観性を持っているが，それ以外のほとんどの各種変形や変形率は客観性を持たないことには注意が必要である。

12.4 現配置を基準配置と捉えること

12.4.1 updated Lagrange 手法

固体の場合は変形履歴を記憶している物質点を追跡する Lagrange 的な挙動予測が重要である。しかし塑性等を念頭に置くと，物質点の現配置における増分的挙動を構成則で適切にモデル化する必要がある。つまり，変形履歴は適切に定義された応力とひずみに記憶される一方で，増分的挙動は現配置を瞬間的に基準配置と捉えた Lagrange 的な量で定義することが望ましいと考えられる。このように，**現配置を瞬間的に基準配置とみなし**

た **Lagrange** 的定式化は **updated Lagrange** 的定式化と呼んでいいだろう。変形履歴を考慮した上でそのような時間変化率を定義するためには， Lagrange 的なテンソル量の**時間変化率を求めたあと**に，現配置を瞬間的に基準配置とみなせばいい。具体的には例えば変形勾配の $\boldsymbol{F}$ を瞬間的に単位テンソル $\boldsymbol{I}$ に置き換える等とすればいいので

$$\lim_{0\to t}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I},\quad \lim_{0\to t}J=1,\quad \lim_{0\to t}\rho_0=\rho,\quad \cdots \text{ etc.} \tag{12.119a, b, c}$$

のような操作をすることになる。この $\lim_{0\to t}$ はこの文書独特の記号で，現配置を瞬間的に基準配置とみなす Lagrange 的な極限であることを意味する。

12.4.2 変形速度

まず対数ひずみ $\boldsymbol{E}^L$ の時間変化率の式 (12.69) を振り返ってみよう。それは対数ひずみ速度 $\boldsymbol{d}^L$ には一致していなかった。しかし，この updated Lagrange 的な極限式 (12.119) を用いると

$$\lim_{0\to t}\Big(E^L\Big)=\Big(0\Big),\quad \lim_{0\to t}\Big(N\Big)=\Big(n\Big)\quad\to\quad \lim_{0\to t}\Big(\dot{E}^L\Big)=\Big(n\Big)\Big[(\ln\Lambda)^{\cdot}\Big]\Big(n\Big)^{\mathrm{T}}=\Big(d^L\Big) \tag{12.120}$$

のように両者は一致する。また，わかり難かった Green のひずみ $\boldsymbol{E}$ の時間変化率も式 (12.52) から

$$\lim_{0\to t}\Big(\dot{E}\Big)=\Big(d\Big) \tag{12.121}$$

となり， updated Lagrange 的な Green のひずみ速度は変形速度そのものであることがわかる。固体の構成則はできるだけ Lagrange 的な尺度で表現するのが望ましいから，この $\dot{\boldsymbol{E}}$ の updated Lagrange 的な量つまり $\boldsymbol{d}$ がその尺度としては相応しいことが大いに期待できる。しかも $\boldsymbol{d}$ は客観的な変形尺度の一つである。具体的に，降伏関数が f である場合の Prandtl-Reuss の流れ則を有限変形の枠組に一般化したとき

$$d^{\mathrm{p}}_{ij}=\lambda_{\mathrm{PR}}\,\sigma'_{ij}\quad \text{あるいは}\quad d^{\mathrm{p}}_{ij}=\lambda\,\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$$

と記すことに抵抗は無いと思う。

12.4.3 応力速度

Lagrange 的な代表的応力テンソルである第 2 Piola–Kirchhoff 応力は Green のひずみと共役関係にあり，この二つを用いた物理的な構成則を組み込んで定式化された弾性 Bernoulli-Euler 梁理論が物理的数学的に合理的で美しいことを第 B.2 節では示すことができた。そこで増分型構成則に用いることを念頭に置いて， Lagrange 的な第 2 Piola–Kirchhoff 応力の現配置を基準配置と捉えた時間変化率を求めておこう。まず $X_{I,k}\,x_{k,J}=\delta_{IJ}$ なので，この時間変化率は零である。したがって

$$0=(X_{I,k}\,x_{k,J})^{\cdot}=\dot{X}_{I,k}\,x_{k,J}+X_{I,k}\,\dot{x}_{k,J}=\Big(\dot{X}_{I,k}+X_{I,m}\,v_{m,k}\Big)\,x_{k,J}\quad\to\quad \dot{X}_{I,j}=-X_{I,k}\,v_{k,j} \tag{$*$}$$

という関係がある。式 (12.100) で定義した第 2 Piola-Kirchhoff 応力の時間変化率を求めて式 ($*$) と式 (12.58) を考慮すれば

$$\dot{S}_{IJ}=J\,v_{k,k}\,\sigma_{ij}\,X_{I,i}\,X_{J,j}-J\,X_{I,k}\,v_{k,i}\,X_{J,j}\,\sigma_{ij}-J\,X_{J,k}\,v_{k,j}\,X_{I,j}\,\sigma_{ij}+J\,X_{I,i}\,X_{J,j}\,\dot{\sigma}_{ij} \tag{12.122}$$

という関係を得る。そこで，この変化率の updated Lagrange 的な速度を

$$\dot{s}_{ij}\equiv\lim_{0\to t}\dot{S}_{IJ}=\dot{\sigma}_{ij}+v_{k,k}\,\sigma_{ij}-v_{i,k}\,\sigma_{kj}-v_{j,k}\,\sigma_{ik} \tag{12.123}$$

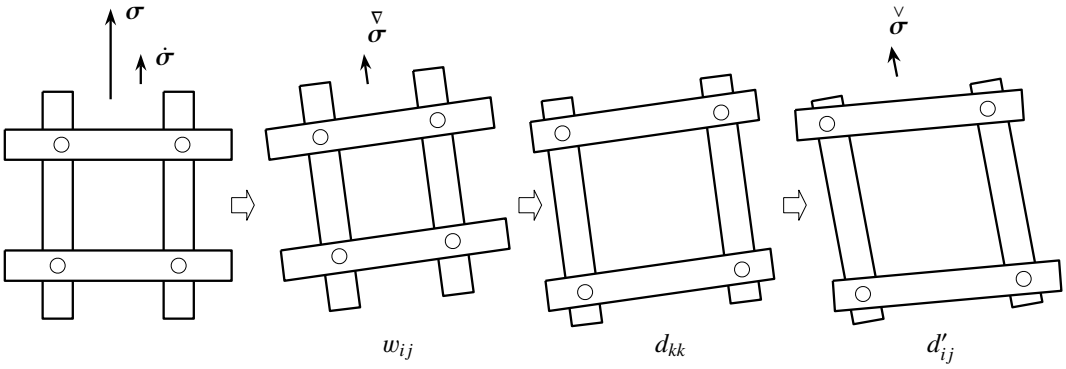


図 12.13 Truesdell 応力速度の分解と物理的な解釈

と定義しよう。図 12.12 の回転する材料の例を対象にすると，式 (12.113) (12.114) (12.116) を式 (12.123) に代入すればすべて

$$\dot{s}_{11} = 0, \quad \dot{s}_{22} = 0, \quad \dot{s}_{12} = 0$$

となり，客観性を持っていることがわかる。この応力速度 $\dot{\boldsymbol{s}}$ は **Truesdell 応力速度**とも呼ばれており，以後 $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ と表すことにして

$$\check{\sigma}_{ij} \equiv \dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + v_{k,k}\,\sigma_{ij} - v_{i,k}\,\sigma_{kj} - v_{j,k}\,\sigma_{ki} = \left(\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\,d_{kk}\right) - d_{ik}\,\sigma_{kj} - d_{jk}\,\sigma_{ki} \tag{12.124}$$

と定義[27]される。最後の式の括弧の中は式 (12.118) の Kirchhoff 応力の Jaumann 速度である。また式 (12.115) の Oldroyd 応力速度とは

$$\check{\sigma}_{ij} = \overset{\sqcup}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\,d_{kk} \tag{12.125}$$

という関係があるので，体積変化の無い変形状態や非圧縮性材料では，この二つの間に違いは無い。

ところで Truesdell 応力速度は，変形速度を等方成分と偏差成分に分解すると

$$\check{\sigma}_{ij} = \underbrace{\dot{\sigma}_{ij} - \overbrace{w_{ik}\,\sigma_{kj} - w_{jk}\,\sigma_{ki}}^{\text{共回転}}}_{\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{3}\,\sigma_{ij}\,d_{kk}}_{\text{共膨張}} - \overbrace{d'_{ik}\,\sigma_{kj} - d'_{jk}\,\sigma_{ki}}^{\text{共歪み（ゆが）}} \tag{12.126}$$

のように分解表示することができる。これは図 12.13 のように解釈することができる。 Truesdell 応力速度は，もともと第 2 Piola-Kirchhoff 応力の updated Lagrange 的な増分であり，材料（この図の 4 本の棒）に貼り付けられた座標で材料が感じることができる抵抗力の変化分である。一方 Cauchy 応力は空間固定座標で定義された応力であり必ずしも材料が感じる直接の抵抗力ではない。そのように捉えると，最初の 3 項が Cauchy 応力の Jaumann 速度でスピンの項だけを Cauchy 応力の物質微係数から除去（$\boldsymbol{S} = S_{IJ}\,\boldsymbol{G}_I \otimes \boldsymbol{G}_J$ としたときの $\boldsymbol{G}_I$ の剛体的な回転を除去）したものに相当し，左から 2 番目の図のように，剛体回転の影響を除去して材料が感じる抵抗力の増分を定義している。左から 3 番目の図のように第 4 項は，応力が生じている面積の材料の伸び縮みによる変化等を除去（$\boldsymbol{G}_I$ の伸び縮みの補正と，生じている面積も常に単位化する Cauchy 応力の面積を補正）するための項になっている。右端の図のように第 5, 6 項では，材料が歪もうとしている幾何学的な変化による

[27] 理由は忘れてしまったが，随分前の若手（つまり第 1 著者が若かった頃ということ）の力学研究集会で，この Truesdell 応力速度を構成則に用いるのが一番よさそうだという話を，著者がとても信頼しているある先生がなさった記憶がある。それ以来いろいろ考えを巡らしている。と思ったのだが，実は **Green-Naghdi 応力速度**（Cauchy 応力の Jaumann 速度の $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{\omega}^R$ で置換した速度）をお奨めしておられるという話もあとで聞いたので勘違いかもしれない。ただこの Green-Naghdi 応力速度の updated Lagrange 的な速度は Cauchy 応力の Jaumann 速度になってしまう。

応力の変化を除去（$\boldsymbol{G}_I$ が直交からずれる変化を補正）するための項である。それでもまだ物理的な意味は明確ではないので，梁の有限変位理論との比較を用いた説明を第 12.5.3 (3) 節でする。

次に， Biot 応力の時間変化率を求めておく。まず極分解の定理から $\dot{F}_{iJ} = \dot{R}_{iK}\, U_{KJ} + R_{iK}\, \dot{U}_{KJ}$ なので

$$\lim_{0\to t} \dot{F}_{iJ} = l_{ij} = \lim_{0\to t} \dot{R}_{iK} + \lim_{0\to t} \dot{U}_{KJ}$$

となるが，式 (12.53) から $\lim_{0\to t} \dot{R}_{iJ} = \lim_{0\to t} \omega^R_{ij}$ であり，式 (12.70) より

$$\lim_{0\to t} w_{ij} = \lim_{0\to t} \omega^R_{ij}$$

となる。この 2 式から

$$\lim_{0\to t} \dot{U}_{KJ} = l_{ij} - w_{ij} = d_{ij}$$

を得る。 Biot 応力の時間変化率は式 (12.105) から

$$\dot{T}_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\dot{S}_{IK}\, U_{KJ} + U_{IK}\, \dot{S}_{KJ} + S_{IK}\, \dot{U}_{KJ} + \dot{U}_{IK}\, S_{KJ}\right)$$

と表されるので，上式のような極限操作をすることによって

$$\begin{aligned}\overset{\odot}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{t}_{ij} \equiv \lim_{0\to t} \dot{T}_{IJ} &= \overset{\vee}{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\, d_{kj} + d_{ik}\, \sigma_{kj}\right) \\ &= \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + v_{k,k}\, \sigma_{ij} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\, d_{kj} + d_{ik}\, \sigma_{kj}\right) = \overset{\nabla}{\tau}{}^K_{ij} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\, d_{kj} + d_{ik}\, \sigma_{kj}\right)\end{aligned} \tag{12.127}$$

という応力速度を定義でき，これも客観的な応力速度である。図 12.14 に代表的な応力速度間の関係を示したが，前述のように $\pm\left(\sigma_{ij}\, d_{kk}\right)$ や $\pm\left(d_{ik}\, \sigma_{kj} + d_{jk}\, \sigma_{ki}\right)$ を加算した応力速度も客観性を持って [126] いる。図中左上の convected 応力速度 $\overset{\cup}{\boldsymbol{\sigma}}$ は文献 [73] から引用した。

最後に， nominal 応力の時間変化率を求める。式 (12.83) の物質微分は式 (∗) を考慮すれば

$$\dot{S}^N_{Ij} = J\, v_{k,k}\, \sigma_{mj}\, X_{I,m} - J\, X_{I,m}\, v_{m,k}\, \sigma_{kj} + J\, X_{I,m}\, \dot{\sigma}_{mj} \tag{12.128}$$

となる。ここで現配置を基準配置に一致させて得られる updated Lagrange 的な **nominal 応力速度** $\dot{\boldsymbol{n}}$ は

$$\begin{aligned}\dot{n}_{ij} \equiv \lim_{0\to t} \dot{S}^N_{IJ} &= \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\, d_{kk} - v_{i,k}\, \sigma_{kj} \\ &= \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\, d_{kk} - d_{ik}\, \sigma_{kj} + w_{jk}\, \sigma_{ki}\end{aligned} \tag{12.129}$$

で定義できる。ただし，これは客観性を持っていないし，対称テンソルでもない。しかし，増分つり合い式を最も単純な形で表すことができ，変形の局所化等を考えるときにも最も重要な応力速度である。

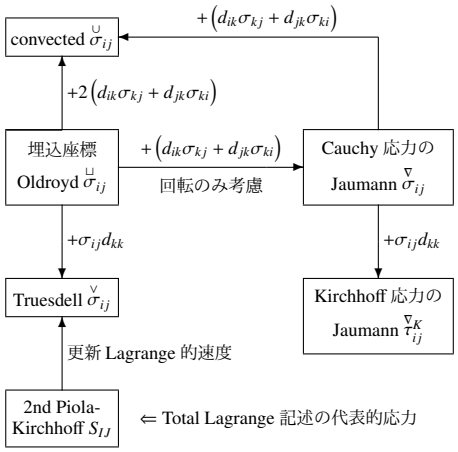


図 12.14 応力速度間の関係

12.4.4 増分つり合い式

増分で定義した弾塑性材料のつり合いを考えるときには，増分つり合い式を使う場合[28]がある。そこで updated Lagrange 的な増分つり合い式を求めておこう。 nominal 応力を用いた最も単純な Lagrange 的なつり合い式 (12.93) の慣性項を除いた項の時間変化率が

$$\dot{S}^N_{Ji,J} + \rho_0\, \dot{\pi}_i = 0 \tag{12.130}$$

[28] 後述の増分 Newton-Raphson 法のように，応力を増分から求めてつり合いを考えるという方法もあるようだ。

となるので，これを現配置で定義し直した updated Lagrange 的な増分つり合い式は

$$\lim_{0\to t}\left(\dot{S}^N_{Ji,J} + \rho_0\,\dot{\pi}_i = 0\right) \quad \to \quad \dot{n}_{ji,j}(\boldsymbol{x}) + \rho\,\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{12.131}$$

と表される。ここで $\dot{\boldsymbol{n}}$ が非対称な応力速度テンソルであることには十分注意する必要がある。さらにこれに対応する境界条件は式 (12.92) 等から

$$m_j\,\dot{n}_{ji} = \dot{t}_i, \quad \text{あるいは} \quad v_i = \text{与える} \tag{12.132}$$

と表される。

ところで，次のような Cauchy 応力を用いた増分つり合い式は成立しない。

$$\dot{\sigma}_{ji,j} + \rho\,\dot{\pi}_i \not\asymp 0$$

nominal 応力速度と Cauchy 応力速度の関係式 (12.129) を式 (12.131) の増分つり合い式に代入すると

$$\dot{\sigma}_{ji,j} + \sigma_{ji,j}\,d_{kk} - v_{j,k}\,\sigma_{ki,j} + \rho\,\dot{\pi}_i = 0$$

となるので， Cauchy 応力を用いた増分つり合い式は

$$\dot{\sigma}_{ji,j} - v_{j,k}\,\sigma_{ki,j} + \rho\,\dot{\pi}_i + \sigma_{ji,j}\,d_{kk} = 0$$

あるいは，式 (12.85) の Cauchy 応力のつり合い式から慣性項を除外したものを代入すれば

$$\dot{\sigma}_{ji,j} - v_{j,k}\,\sigma_{ki,j} + \rho\,\dot{\pi}_i - \rho\,\pi_i\,d_{kk} = 0 \tag{12.133}$$

のように [151] 表されなければならない。これが Cauchy 応力を用いた増分つり合い式である。

12.4.5 応力の更新

増分計算をした場合の Cauchy 応力の更新は

$$\sigma_{ij}(t+\Delta t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) \tag{12.134}$$

で大丈夫[29]だろうか。力ばかりでなく力が生じている面の変化も含んで定義されている Cauchy 応力を，このように単純に加算できるだろうか。まず， $\sigma_{ij}(t)$ は時刻 $t = t$ における単位面積で定義された Cauchy 応力である。これを更新するには，同じく $t = t$ の単位面積当たりの増分応力を足す必要がある。それは前節の updated Lagrange 的な nominal 応力速度なので $\sigma_{ij}(t) + \dot{n}_{ij}(t)$ が時刻 $t = t$ の単位面積当たりの空間固定の基底ベクトル方向の， $t = t+\Delta t$ における応力成分になる。そしてそれは，現配置 $t = t$ を基準配置として定義される nominal 応力の $t = t + \Delta t$ における応力なので，現配置を基準配置とした量間の和と等式が

$$S^N_{ij}(t+\Delta t; t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{n}_{ij}(t)$$

と求められる。現配置を基準配置にした nominal 応力なので，引数のセミコロンの次に t と加筆し，添え字を小文字にした。これを式 (12.83) に代入すれば更新された Cauchy 応力が

$$\sigma_{ij}(t+\Delta t) = \frac{\rho(t+\Delta t; t)}{\rho(t)}\,x_{i,k}(t+\Delta t)\,S^N_{kj}(t+\Delta t; t) = \frac{\rho(t+\Delta t; t)}{\rho(t)}\,(\delta_{ik} + v_{i,k})\left(\sigma_{ij}(t) + \dot{n}_{ij}(t)\right)$$

[29] 次元としては $\dot{\sigma}_{ij}(t)\,\Delta t$ と記すべきであるが，上付きドットの量を増分と捉えて略記している。

で算定できる。ここでも現配置を基準配置としているので $x_{i,k}$ の添え字を小文字にしてある。この式の各項に式 (12.117) (12.129) を代入すると

$$x_{i,k}\,S^N_{kj} = (\delta_{ik} + v_{i,k})\Big(\sigma_{kj} + \dot{\sigma}_{kj} + \sigma_{kj}\,d_{ll} - v_{k,l}\,\sigma_{lj}\Big) = \sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\,d_{kk}$$

であり

$$\frac{\rho(t+\Delta t;t)}{\rho(t)} = \Big(\det\Big(x_{i,j}(t+\Delta t)\Big)\Big)^{-1} = (1+d_{kk})^{-1} = 1 - d_{kk}$$

を用いれば，最終的に

$$\sigma_{ij}(t+\Delta t) = (1-d_{kk})\Big(\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\,d_{kk}\Big) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t)$$

となるので，式 (12.134) が証明できたことになる。もちろん速度（増分）の 2 次項はすべて無視できるものとしてあるので，小さくない増分ステップで計算する場合には

$$\sigma_{ij}(t+\Delta t) = \frac{1}{\det\left(\delta_{mn} + v_{m,n}(t)\right)}\,\{\delta_{ik} + v_{i,k}(t)\}\Big\{\sigma_{kj}(t) + \dot{n}_{kj}(t)\Big\} \tag{12.135}$$

を用いるべきである。ただし，数値的に対称成分になるとは限らないことには注意が必要だ。

さて，この関係式 (12.134) を元にして，再度 Cauchy 応力を用いた増分つり合い式を誘導しておこう。まず簡単のために，仮に時刻 t の空間固定座標の位置を $\xi_I(t)$ としておき，その Δt 後の位置を $x_i(t+\Delta t)$ とすると，形式的に式 (12.134) は

$$\sigma^{\Delta t}_{ji}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{JI}(\boldsymbol{\xi}) + \dot{\sigma}_{JI}(\boldsymbol{\xi})$$

と書くことができる。上付きの Δt は $t = t + \Delta t$ の量を表している。また大文字の I 等は時刻 t における座標 $\boldsymbol{\xi}$ を参照しているものとする。これを微分すると

$$\sigma^{\Delta t}_{ji,j} = \sigma_{JI,j} + \dot{\sigma}_{JI,j} = \sigma_{JI,K}\,\xi_{K,j} + \dot{\sigma}_{JI,j} = \sigma_{JI,K}\,\Big(\delta_{Kj} - v_{K,j}\Big) + \dot{\sigma}_{JI,j} = \sigma_{JI,j} - \sigma_{JI,K}\,v_{K,j} + \dot{\sigma}_{JI,j}$$

となることから，時刻 $t + \Delta t$ におけるつり合い式は

$$\sigma^{\Delta t}_{ji,j} + \rho^{\Delta t}\,\pi^{\Delta t}_i = 0 = \sigma_{JI,j} - \sigma_{JI,K}\,v_{K,j} + \dot{\sigma}_{JI,j} + \rho^{\Delta t}\,\pi^{\Delta t}_i$$

となり，式 (12.85) を右辺第 1 項に代入して $\Delta t \to 0$ の極限をとり，大文字の添え字を小文字に直せば

$$\dot{\sigma}_{JI,j} - \sigma_{JI,K}\,v_{K,j} + \Big(\rho^{\Delta t}\,\pi^{\Delta t}_i - \rho\,\pi_I\Big) = 0 \quad \to \quad \dot{\sigma}_{ji,j} - \sigma_{ji,k}\,v_{k,j} + (\rho\,\pi_i)^{\cdot} = 0$$

と表すことができる。ここで式 (12.59) の関係を用いると

$$(\rho\,\pi_i)^{\cdot} = \dot{\rho}\,\pi_i + \rho\,\dot{\pi}_i = -\rho\,\pi_i\,d_{kk} + \rho\,\dot{\pi}_i$$

という関係が成り立つので，すぐ上の式は

$$\dot{\sigma}_{ji,j} - v_{j,k}\,\sigma_{ki,j} + \rho\,\dot{\pi}_i - \rho\,\pi_i\,d_{kk} = 0$$

となり，結局式 (12.133) と一致する。

では， Kirchhoff 応力の更新を確認しておこう。式 (12.97) で， $t = t + \Delta t$ としたときの Kirchhoff 応力に式 (12.134) の Cauchy 応力の更新を代入すると

$$\tau^K_{ij}(t+\Delta t) = \frac{\rho_0}{\rho(t+\Delta t)}\,\sigma_{ij}(t+\Delta t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)}\,\frac{\rho(t)}{\rho(t+\Delta t)}\,\Big\{\sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t)\Big\}$$

となる。一方，式 (12.97) の物質微分から

$$\dot{\tau}^K_{ij}(t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)}\left\{\dot{\sigma}_{ij}(t) + \sigma_{ij}(t)\, d_{kk}(t)\right\}$$

であり，$\dfrac{\rho(t)}{\rho(t+\Delta t)} = 1 + d_{kk}(t)$ と考えていいので，これを上式に代入して増分の 1 次項だけを残すと，結局

$$\tau^K_{ij}(t+\Delta t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)}\{1 + d_{kk}(t)\}\left\{\sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t)\right\} = \frac{\rho_0}{\rho(t)}\left\{\sigma_{ij}(t) + \sigma_{ij}(t)\, d_{kk}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t)\right\} = \tau^K_{ij}(t) + \dot{\tau}^K_{ij}(t)$$

を得る。うぅーん，任意の応力更新はいつも加算が成立するのかなぁ。

12.5 有限変形の枠組で構成則を表すには

12.5.1 構成則に用いる応力とは，ひずみとは?

(1) 応力とひずみで定義した場合

応力は物体内部の抵抗力を表現した尺度であり，これとひずみの尺度との関係でその材料の抵抗則つまり構成則を記述することにしてあった。応力は単なる数学的力学的な概念であり，ひずみの尺度は純粋に幾何学的な量である。いくつでも定義可能な応力テンソル間には明確な定義の違いとお互いの関係があるから，構成則にはどの応力テンソルを用いても構わない。しかし，各応力テンソル間の関係には変形の非線形成分が含まれていることには注意が必要だ。一方ひずみの尺度もいくつか定義でき，お互いの関係も明確だが，これも高次の幾何学的非線形性を持っていることに注意が必要だ。最終的にはいくつかの単純な材料試験，例えば引張試験等で構成則を定める以外には手が無い。というのも，我々の身の回りにある材料のほとんどが大きな非均質なかたまり（バルク材）であり，その微視的なメカニズムをうまくモデル化できたとしても，それに何らかの平均化を行って材料の巨視的な抵抗則を表すことは一般には困難だからである。

最も単純明快なのは，引張試験の外力あるいはそれを試験前の試験片の断面積で割ったいわゆる公称応力 R と，伸びひずみ例えば対数ひずみ $\ln\Lambda_1$ との関係から構成則を定める方法だろう。対数ひずみを用いる理由は，客観性を持つ変形速度 $\boldsymbol{d}$ が実質的に対数ひずみ速度であることもあるが，伸びの 2 倍と縮みの半分とが正負の同じ値で表すことができることに**直感的**な素直さがあるからである。つまり基本的な「線形弾性体」を定義するのに，ある応力 $\boldsymbol{\sigma}$ とあるひずみ尺度 $\boldsymbol{\epsilon}$ の間を，例えば定数係数の 4 階のテンソル $\boldsymbol{C}$ で関係付け

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

と定義した上で引張試験結果をシミュレーションし，その $R = R(\ln\Lambda_1)$ の関係ができるだけ $\ln\Lambda_1$ に対して線形的な材料モデルが「線形弾性体」だと捉えるのが，**直感的**には良さそうに思うがどうだろう。つまり，荷重と変形の試験結果の関係において，応力とひずみの定義そのものに内在する変形の非線形性が原因で現れる見かけ上の非線形性はできるだけ小さい方がいいだろう。そもそも材料非線形性は，定数係数の 4 階のテンソル $\boldsymbol{C}_{\mathrm{O}i}$ や $\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}i}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を用いて構成則にひずみの高次項を含むこと

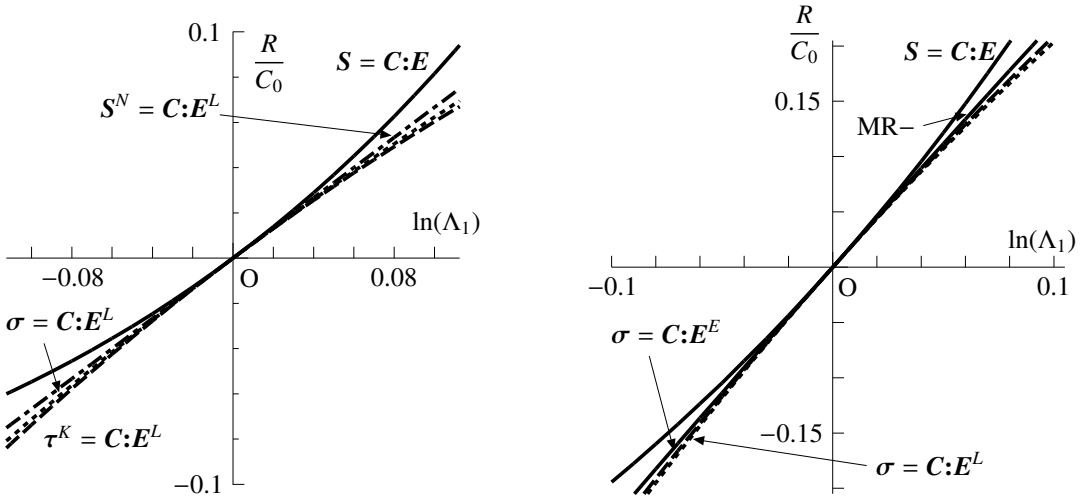
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{O1}} : \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{E1}} : \boldsymbol{\epsilon}^2 + \boldsymbol{C}_{\mathrm{O2}} : \boldsymbol{\epsilon}^3 + \cdots$$

や，材料パラメータ $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ の応力やひずみへの依存性

$$\boldsymbol{\sigma} = \widetilde{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}) : \boldsymbol{\epsilon} = \text{もっと一般的に} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon})$$

によって表現されなければならないと考えるべきだろう。ここに $\boldsymbol{\epsilon}^m$ は式 (12.22) のように

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{(k)}\, \boldsymbol{n}^{(k)} \otimes \boldsymbol{n}^{(k)}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^m = \sum_{k=1}^{3} \epsilon^m_{(k)}\, \boldsymbol{n}^{(k)} \otimes \boldsymbol{n}^{(k)}$$



(a) 対数ひずみと荷重の関係：圧縮性材料　　(b) 対数ひずみと荷重の関係：非圧縮性材料

図 12.15 各応力とひずみに線形関係が成り立つ場合の ±10% までの変形と抵抗挙動

で定義された 2 階のテンソルである。$\epsilon_{(k)}$ は主ひずみであり，$\boldsymbol{n}^{(k)}$ は主方向である。引張と圧縮であまり挙動に違いが無い材料の鋼やゴムの場合には $\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}i}$ は必要無いだろうが，コンクリートや地盤材料には $\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}i}$ も必須になりそうだ。

応力とひずみの定義そのものに内在する非線形性についての簡単な例を示しておこう。以下簡単のために応力の主方向への 1 軸抵抗状態において，その同じ軸を主方向とするひずみが生じているとする。例えば Cauchy 応力 σ_1 と伸びひずみ E_1^E （を空間座標に変換したもの）との間に，定数係数 C を介して

$$\sigma_1(\boldsymbol{x}) = C\,E_1^E(\boldsymbol{x}) = C\ (\Lambda_1 - 1) \tag{$*$}$$

のような関係があると定義したすると，それは

$$R = \Lambda_2\,\Lambda_3\,\sigma_1 = C\,\Lambda_2\,\Lambda_3\ (\Lambda_1 - 1)$$

という荷重変形関係を再現したことに相当する。Λ_2 と Λ_3 は他の 2 主軸方向のストレッチである。つまり，上の式 $(*)$ が材料の抵抗則だとすると，R と $\ln\Lambda_1$ との間は非線形関係にならざるを得ないことを示している。もう一つの例として第 2 Piola-Kirchhoff 応力と対数ひずみか Green のひずみの間に同様に

$$S_1(\boldsymbol{X}) = C\,E_1^L(\boldsymbol{X}) = C\ \ln\{\Lambda_I(\boldsymbol{X})\},\quad S_1 = C\,E_1(\boldsymbol{X}) = C\left\{\frac{1}{2}\left(\Lambda_1^2 - 1\right)\right\}$$

という線形関係があると定義したとすると，それはそれぞれ

$$R = \Lambda_1\,S_1 = C\,\Lambda_1\ \ln(\Lambda_1),\quad R = C\,\Lambda_1\left\{\frac{1}{2}\left(\Lambda_1^2 - 1\right)\right\}$$

という荷重変形関係を再現しようとしたことに相当する。これも R と $\ln\Lambda_1$ との間は非線形関係にならざるを得ない。このような非線形性は**材料特性ではなく**，応力とひずみの定義に内在する幾何学的非線形特性から生じたものであることには十分注意が必要なのだ。

算出の仕方については後述するが，±10% のひずみの範囲でいくつかのモデルによる荷重変形関係を示したのが図 12.15 である。材料特性を表す構成則だから，どちらかと言えば，物体に糊付けされた座標で記述する Lagrange 手法の分類に含まれる尺度を用いた方がよさそうだ。図 12.15 (a) では Lagrange 的な代表の第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green ひずみを用いた実線は，やや下に凸の荷重変形関係になっている。つまり引張では硬化し，圧縮では軟化する。これは例えば身近な材料である「消しゴム」の挙動とはずれているように感じる。ゴ

ムは非圧縮性材料なので，図 12.15 (b) にはその例も示した。やはり第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green ひずみを用いた実線は線形からのずれも比較的大きく感じられる。つまり，応力とひずみの定義に含まれる非線形性の影響がこのくらいはあるということを認識した上で，構成則を構築する必要があるのだ。ただ，社会基盤構造で対象としている材料のほとんどは数 % の変形レベルで壊れてしまうので，そのような材料に対しては，選択した尺度の違いが構成則に及ぼす影響はこの程度しか無いと考えていいことになる。

(2) 増分で定義した場合

あるいは塑性の概念を念頭に置くと，客観性を持つ updated Lagrange 的な応力速度を用いて，客観性を持つ変形速度との間の関係で構成モデルを定義するのが望ましいだろう。例えば弾性なら

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) \quad \text{や} \quad \overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}) : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$$

のように定義し，弾塑性なら

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}, \text{履歴}(\boldsymbol{X})) : \{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x})\}$$

のように定義するのが望ましいと考えられる。$\boldsymbol{C}$ は最も単純には定数だ。客観性を持つ応力速度 $\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}$ の選択については，いくつかの例をあとで示すが，そのうちのいくつかを用いて定数係数の弾性の場合を ±10% のひずみの範囲で図 12.16 に示した。この場合は updated-Lagrange 的な Truesdell 応力速度を用いたモデルの線形性が顕著だ。もっと大きな変形に対する特性については後述する。

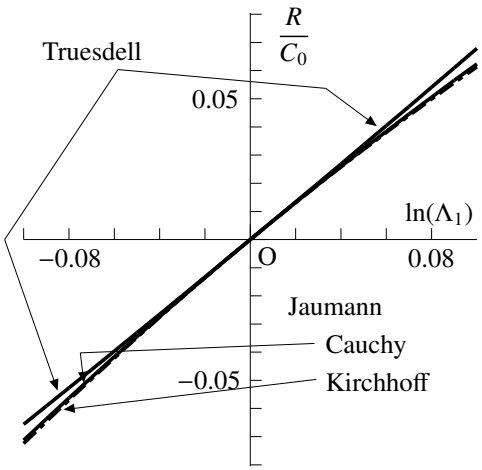


図 12.16 各応力速度と変形速度に線形関係が成り立つ場合の ±10% までの変形と抵抗挙動

12.5.2 超弾性と亜弾性

式 (3.65b) を一般化し，次のようなひずみエネルギ密度関数 ϕ を持つ弾性を**超弾性**と呼ぶ。

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\,d_{ji} = \frac{1}{\rho_0}\,S_{IJ}\,\dot{E}_{JI}. \tag{12.136}$$

ここに，ρ_0, ρ は変形前後の密度であり，右辺は応力の仕事率 $\dot{w}$ で[30]ある。これが成立する場合には

$$S_{IJ} = \frac{\partial\,(\rho_0\,\phi)}{\partial E_{IJ}} \tag{12.137}$$

という構成関係が成立する。ただ $(\rho_0\,\phi)$ が定数係数で $\boldsymbol{E}$ の 2 次形式になるとは考え難いが，それは前節および次節の定数係数 $\boldsymbol{C}$ を持つ $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{E}$ の例に一致[31]する。もちろん，応力依存の任意の非線形パラメータを含む密度関数の形を仮定した上で実験による同定をすれば済むことではあるが，そこにはあまり物理は感じられないし，物理に基づかない curve-fitting に過ぎないと考えざるを得ない。また前節のような荷重変形関係の非線形性を応力とひずみが持っていることも注意しないといけない。つまり，物理的な意味があまり明確ではない Green のひずみの不変量のようなものを用いて，さらにその「ポテンシャル」（第 1 著者には理解不能）に相

[30] 内部エネルギ率 $\dot{e}$ のうちの応力の仕事率の表現は，それぞれの応力テンソルに対して式 (12.106) にまとめてある。

[31] 例からも明らかなように実用的な構成則にはならない。Hooke の等方弾性テンソルを $\boldsymbol{C}$ に用いた材料を Saint Venant-Kirchhoff 材料と呼ぶ [12] らしい。この材料の名称には ‘Saint’ の次のハイフンを省略した。

当する非線形のひずみエネルギ密度関数 $\phi(\boldsymbol{E})$ を定義するのは，天才[32]以外には困難な仕事だろう。やはり物理的な観察と考察から直接応力とひずみ，あるいは応力速度とひずみ速度を結び付けるようなアプローチで構成モデルを定義する方がわかり易い。ただし，第 B.2 節で定式化した Bernoulli-Euler 梁の場合は，第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green ひずみのそれぞれの**物理成分**と Young 率を E を用いて

$$\rho_0\,\phi \equiv \frac{1}{2}\,E\,e^2, \quad e \equiv \sqrt{1+2\,E_{11}} - 1 = \epsilon + x_3\,\kappa$$

というエネルギ密度関数が定義でき，応力ひずみ関係は

$$\sigma \equiv \sqrt{g}\,S_{11} = \frac{\partial\,\{\rho_0\,\phi(e)\}}{\partial e} = E\,e \quad \rightarrow \quad \phi(e) \equiv \frac{1}{2\rho_0}\,E\,e^2 \quad \rightarrow \quad S_{11} = \frac{\partial\,\{\rho_0\,\phi(e)\}}{\partial E_{11}} = E\,\frac{e}{1+e} \qquad (12.138\text{a, b, c})$$

といった**物理的な**量同士の**超弾性**で表したことに相当していて，それによって美しい理論が構築されている。ちなみに， Green のひずみそのものを用いて本来の超弾性として定義し直すと，この Bernoulli-Euler 梁の場合の超弾性モデルは

$$S_{11} = \frac{\partial\,\{\rho_0\,\phi\,(E_{11})\}}{\partial E_{11}} = E\,\frac{e}{1+e} \quad \rightarrow \quad \rho_0\,\phi\,(E_{11}) \equiv E\left(E_{11} - \sqrt{1+2E_{11}}\right) \quad \rightarrow \quad \phi(e) \equiv \frac{1}{2\rho_0}\,E\left(e^2 - 2\right) \qquad (12.139\text{a, b, c})$$

と定義したことに一致する。ポテンシャルが Green のひずみの 2 次形式になっていないところが興味深い。

ところで，ひずみエネルギ密度関数の代表例としては，よくゴムのような材料のモデルとして用いられる非圧縮性材料の Mooney-Rivlin モデルの

$$\phi = \frac{\mu}{2}\,(I_1 - 3) + \overline{\mu}\,(I_2 - 3) \qquad (12.140)$$

という関数がある。ここに μ と $\overline{\mu}$ が材料パラメータであり， I_1, I_2 は適切に選んだ変形の第 1, 2 不変量である。例えば $\boldsymbol{U}$ の主値を用いて

$$\left(U\right) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\Lambda_1\Lambda_2} \end{pmatrix}, \quad I_1 = U_{IJ}\,U_{IJ}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\left\{I_1^2 - (U_{KI}\,U_{KJ})\,(U_{LI}\,U_{LJ})\right\} \qquad (12.141\text{a, b, c})$$

と定義できる。あとで一つだけ nominal 応力を用いた例を示す。

これに対して**亜弾性**と呼ばれる材料は

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\,d_{kl} \qquad (12.142)$$

という同次式を満足するものとして定義される。弾性係数 C_{ijkl} は一般には応力の関数である。等方線形亜弾性体の場合，応力に依存しない係数成分は式 (3.49b) の $\boldsymbol{C}$ で表される。注意しないといけないのは，この弾性構成モデルは**保存的ではなくエネルギ散逸が避けられない**ということ[33]である。一般には

$$C_{ijkl} = c_0\,\delta_{ij}\delta_{kl} + c_1\,{}^1\!/\!_2\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + c_2\,\sigma_{ij}\delta_{kl} + c_3\,\delta_{ij}\sigma_{kl} + c_4\,\left(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ik}\sigma_{jl}\right)$$

[32] 秀才ではなく天才。 Argonne 国立研究所の井口道生先生によると， Einstein は実験・実測の観察をモデル化したのではなく，「こうだったらいいなぁ」と理論を作り上げるアプローチをとるらしく，誰にも真似できない天才の技だそうだ。我々凡人はやはり，物理的に意味のある量の観察から物理的な関係式にモデル化するのが精一杯だろう。

ついでに，井口先生から聞いた Fermi と Fano の話も書いておこう。 Fano は Fermi の弟子で，あるとき（例えば X-Day としておく）PhD 研究の打ち合わせに訪れた Fano がその概要を話し終わると， Fermi は「いいねぇ。じゃ，これこれをこういう風に考えて検討してみたらどうだろう。」 'Why don't you...?' と指導。数週間後その結果を Fano が Fermi に報告し，それを踏まえた今後の方針を提案したところ， Fermi はまた「それはいいですね。だったらあの論文集の誰某の考え方を見てから」 'Why don't you...?' と助言をした。このやり取りを 1 年くらい続けて Fano は PhD を取得した。師の Fermi 没後，奥様が彼の弟子達を自宅に招いたパーティがあった。 Fano が Fermi の書斎に入ると机の上に Fermi の journal が置いてあったので，それをめくって X-Day の記述を見てみると， Fano がその日からの 1 年間に誘導した論理と定式化等が結論まですべて書かれていたという。

[33] 任意の応力状態で式 (12.142) が必ずしも積分可能ではないことから，載荷後除荷しても元には戻らない，あるいは変形を元に戻したときに残留応力が生じる。そのため， Jaumann 速度の定義で用いられているスピンの選択を議論した研究は多数ある（例えば文献 [32, 59, 60, 67] 等）が，あまり物理的な香りは感じられない。

$$+ c_5\,\sigma_{im}\sigma_{mj}\delta_{kl} + c_6\,\sigma_{ij}\sigma_{kl} + c_7\,\delta_{ij}\sigma_{km}\sigma_{ml} + c_8\left(\sigma_{im}\sigma_{mk}\delta_{jl} + \sigma_{jm}\sigma_{ml}\delta_{ik}\right) \tag{12.143}$$
$$+ c_9\,\sigma_{im}\sigma_{mj}\sigma_{kl} + c_{10}\,\sigma_{ij}\sigma_{km}\sigma_{ml} + c_{11}\,\sigma_{im}\sigma_{mj}\sigma_{kn}\sigma_{nl}$$

のように与えられ，c_0 から c_{11} は応力の不変量の関数で与えられる係数 [127, 163] である。数学的にはこれでいいのだろうが，12 個ものパラメータが常に必要な物理モデルはとても適切だとは思えないと著者は感じている。そもそもパラメータを同定するための 12 種類の独立した実験設定が不可能だろう。

12.5.3 こんな弾性体って?

(1) 応力とひずみで定義した場合

適切な応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ とそれに対応するひずみテンソル $\boldsymbol{\epsilon}$ をある直交異方性を持つ材料定数で結びつけた

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\epsilon} \tag{12.144}$$

のようなモデルをいくつか考えてみよう。もちろん構成則を考えるときは，材料試験結果を見ながら上の式のようなモデルを構築することになるのだが，ここでは，もし上式のような構成則が成立する材料があったときに，有限変形の枠組の中でどのような引張試験結果に相当するのかを示すのが目的だ。つまり応力やひずみの定義に内在する幾何学的非線形性の影響をここで明らかにしておこう。まず応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の候補としては，第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}$ と Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{\tau}^K$ に Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$，さらに少し変ではあるが nominal 応力 $\boldsymbol{S}^N$ を使ってみよう。対応するひずみ $\boldsymbol{\epsilon}$ は応力の仕事率の式 (12.106) にある組み合わせの

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho}\,\sigma_{ij}\,d_{ji} = \frac{1}{\rho_0}\,\tau^K_{ij}\,d_{ji} = \frac{1}{\rho_0}\,S^N_{Ij}\,\dot{F}_{jI} = \frac{1}{\rho_0}\,S_{IJ}\,\dot{E}_{JI} = \frac{1}{\rho_0}\,T_{IJ}\,\dot{E}^E_{JI} \qquad \text{(12.106) 再掲}$$

からの示唆で選択する。つまり第 2 Piola-Kirchhoff 応力は Green のひずみと，また Kirchhoff 応力と Cauchy 応力は対数ひずみと関係付けることを示唆しているので，ここでは

$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{S} \quad \text{に対しては} \quad \boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{K}}, \quad \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{S}^N \quad \text{に対しては} \quad \boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{E}^E, \quad \boldsymbol{E}^L$$

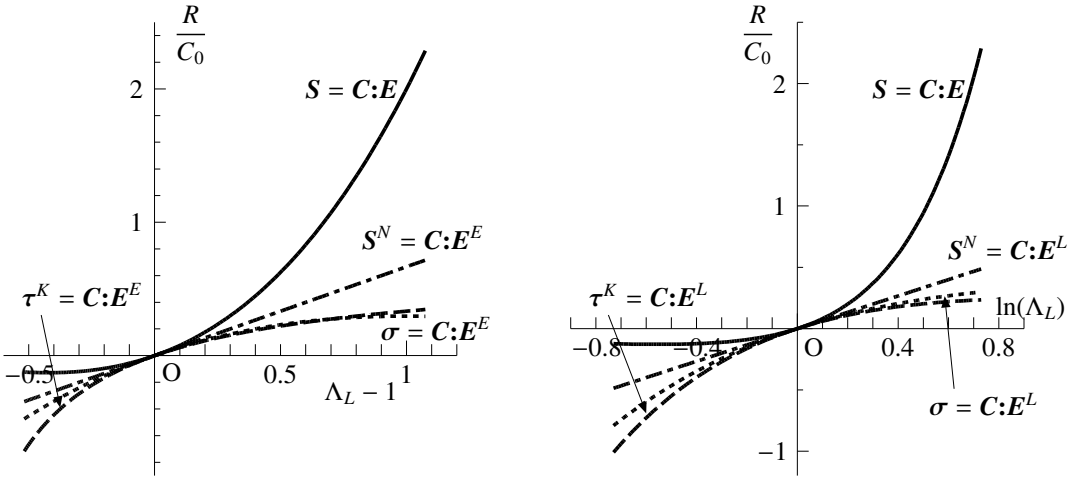
という組み合わせ[34]を用いるのだ。最も単純なモデルは，前節のひずみエネルギ密度関数 ϕ がひずみ尺度の 2 次形式になっているものだろうから，簡単のために円断面棒の引張試験を対象として直交 3 軸方向の一様応力・伸び状態をイメージして

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{Bmatrix} \tag{12.145}$$

とする。そして，x_1 方向のロードセルの読みを試験片の変形前の断面積で割った公称応力が $\boldsymbol{R}$ で，同じ方向の伸びが $\Lambda_1 = \Lambda_L$ だったとしよう。応力と変形の状態は，上式 (12.145) で $\sigma_{22} = 0, \sigma_{33} = 0, \epsilon_{22} = \epsilon_{33}, \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_T$ とすればいいので

$$\epsilon_{22} = -\frac{C_1}{C_0 + C_1}\,\epsilon_{11}, \quad \sigma_{11} = \frac{C_0\,(C_0 + C_1) - 2\,C_1^2}{C_0 + C_1}\,\epsilon_{11}$$

[34] 特に nominal 応力は非対称テンソルであるから，ここで用いる対称なひずみと線形関係で結び付けるのはおかしいが，例として 1 軸状態を対象とするので，それぞれの特徴を比較するために用いている。実際，式 (12.106) の応力の仕事率の表現の nominal 応力は変形勾配の変化 $\dot{\boldsymbol{F}}$ との積になるので，極分解定理を通して $\boldsymbol{F}$ の実質的な変形成分の $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}^E$ つまり $\boldsymbol{E}^E$ と関連付けることを示唆していると捉えた。



(a) 伸びひずみと荷重の関係　　(b) 対数ひずみと荷重の関係

図 12.17 いくつかの応力で線形関係が成り立つ弾性体の場合

となる。各応力は，応力の物理的な意味を検討したときの例題の式 (12.108) (12.109) (12.110) (12.111) で回転成分 α を零にすればいいから，それぞれ

$$\sigma_{11} := S_{11} = \frac{R}{\Lambda_L}, \quad \sigma_{11} := \sigma_{11} = \frac{R}{\Lambda_T^2}, \quad \sigma_{11} := \tau_{11}^K = R\,\Lambda_L, \quad \sigma_{11} := S_{11}^N = R$$

と置き換えられる。ひずみは， Green のひずみを用いる場合は式 (12.23) から

$$\epsilon_{11} := \frac{1}{2}\left(\Lambda_L^2 - 1\right), \quad \Lambda_T^2 = 1 - \frac{C_1}{C_0 + C_1}\left(\Lambda_L^2 - 1\right)$$

となり，伸びひずみの場合は式 (12.44a) から

$$\epsilon_{11} := \Lambda_L - 1, \quad \Lambda_T = 1 - \frac{C_1}{C_0 + C_1}\left(\Lambda_L - 1\right)$$

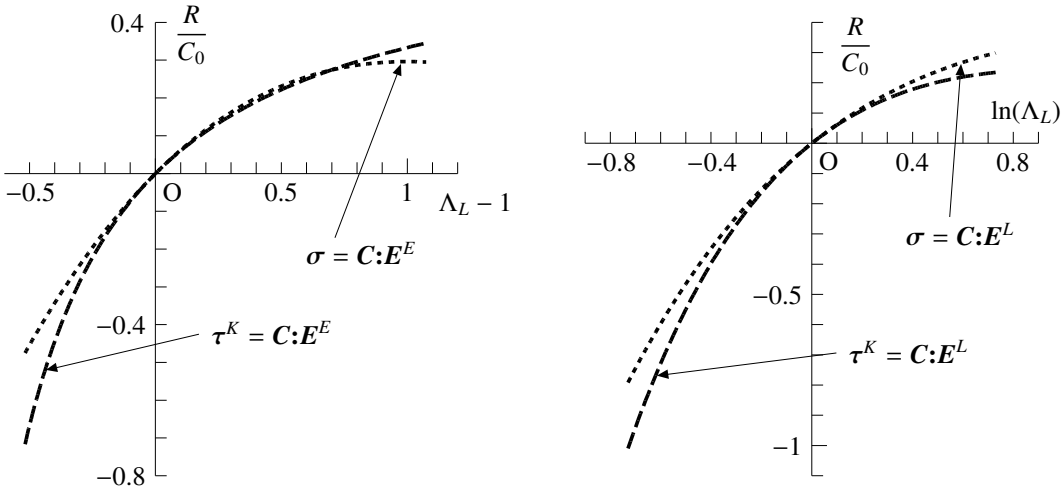
対数ひずみの場合も式 (12.44b) から

$$\epsilon_{11} := \ln(\Lambda_L), \quad \ln \Lambda_T = -\frac{C_1}{C_0 + C_1}\ \ln \Lambda_L$$

と置き換えればいい。

これを用いて伸びひずみを横軸にとって荷重と変形の関係を表示したのが図 12.17 (a) で，対数ひずみを横軸にとったのが図 12.17 (b) である。ただし，簡単のため $C_1/C_0 = 1/2$ （微小変形理論における Hooke の法則の Poisson 比が $\nu = 1/3$ に相当する）とした。一番おかしな nominal 応力を用いた線形関係の材料モデルの場合には，荷重と変形の関係は線形になるが，そんな材料は多分存在しないだろう。それ以外は，応力ひずみ関係が定数係数で関係付けられているにもかかわらず，それぞれの応力やひずみの定義に内在する幾何学的な非線形性によって荷重と変形の関係は非線形性を示している。そして第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた場合と， Cauchy 応力および Kirchhoff 応力の場合とは，大変形時にお互いに逆の応答特性を示している。つまり，第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみを用いた線形関係の材料は，引張るにつれて剛になり，圧縮すればするほど柔らかくなることを示している。引張側の応答はゴムのような非圧縮材料で経験するのと同じようには感ずるが，圧縮するほど柔らかくなる材料はあまり触ったことが無いように感じる。これは Saint Venant-Kirchhoff 材料と呼ばれ [12]，例えば圧縮状態の $\Lambda_L = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で R はピークを持つ等実用的ではないとされている。もちろん前述したように， ±10% の変形の範囲ではどの構成則を用いても違いはほとんど無い。

図 12.18 には， Cauchy 応力と Kirchhoff 応力を用いた結果だけを取り出した。この場合は上述の第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた材料とは逆に，引張るほど柔らかくなり，圧縮すると剛になっている。圧縮側はやはり



(a) 伸びひずみと荷重の関係　　(b) 対数ひずみと荷重の関係

図 12.18 Cauchy 応力と Kirchhoff 応力で線形関係が成り立つ弾性体の場合

ゴム等で経験する挙動と同じように感じる。いずれにしても，このような定数係数を用いた線形関係で与えられる材料が身の回りには無いのは当然だが，この結果から，応力とひずみの定義に含まれる幾何学的非線形項の特性を理解しておいて欲しい。

次にゴムのような非圧縮性材料の例を試算しておこう。この場合には $C_1 = {}^{-C_0}/_2$ として

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_T \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & {}^{-C_0}/_2 & {}^{-C_0}/_2 \\ {}^{-C_0}/_2 & C_0 & {}^{-C_0}/_2 \\ {}^{-C_0}/_2 & {}^{-C_0}/_2 & C_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \epsilon_T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix}$$

とすればいい。実はこれは，微小変形理論における式 (3.44) (3.45) の Hooke の法則を

$$\sigma'_{ij} = 2G\,\epsilon'_{ij}, \quad \sigma_{kk} = K\,\epsilon_{kk} \quad \rightarrow \quad \sigma'_{ij} = 2G\,\epsilon'_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3p$$

とみなしたモデルに相当するが，これは Poisson 比を $\nu = {}^1/_2$ としたのではなく，もう一方の極限の $\nu = -1$ $({}^{C_1}/_{C_0} = {}^{\lambda}/_{(\lambda+2\mu)} = {}^{-1}/_2)$ に相当する。微小変位理論の範囲では $\epsilon_{kk} = 0$ で非圧縮性を近似しているので，$C_1 = 0$ の材料でも非圧縮性材料をモデル化できるが，有限変位理論の範囲の非圧縮性は $\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 = 1$ なので，上式のような関係にしてみた。ただし，ここに p は平均応力（負の静水圧）である。また非圧縮性材料の 1 軸状態なので

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_T = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_L}}, \quad \sigma_T = 0$$

の条件から，p を Λ_L で表すことができる。$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{S}$ の場合には $\boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{E}$ を選択し，非圧縮性の場合には Cauchy 応力と Kirchhoff 応力は一致するので，$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma}$ に対しては $\boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{E}^E$ か $\boldsymbol{E}^L$ を選択した。結果的に

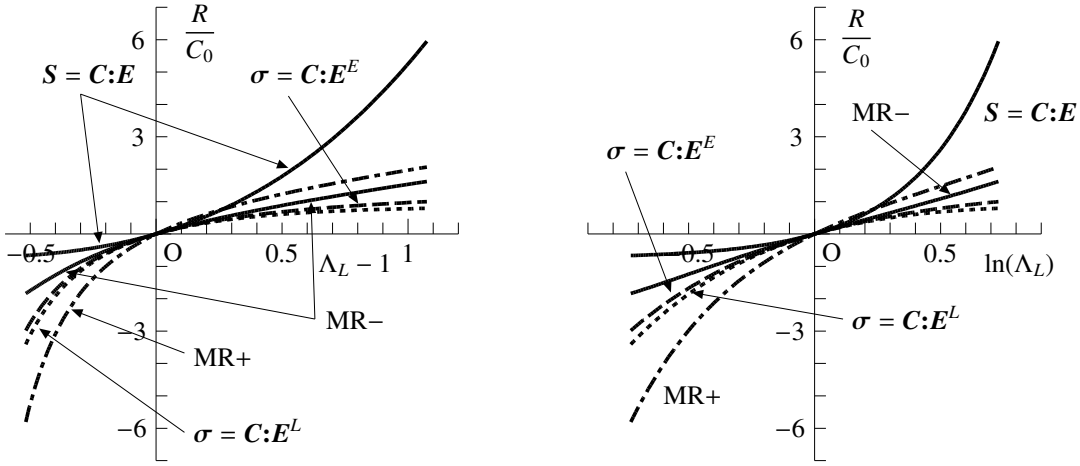
$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{S} \text{ で } \boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{E} \quad \text{のとき} \quad \frac{R}{C_0} = \frac{3}{4}\left(\Lambda_L^3 - 1\right),$$

$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma} \text{ で } \boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{E}^E \quad \text{のとき} \quad \frac{R}{C_0} = \frac{3}{2}\left(1 - \Lambda_L^{-3/2}\right), \quad \boldsymbol{\epsilon} := \boldsymbol{E}^L \quad \text{のとき} \quad \frac{R}{C_0} = \frac{9}{4}\frac{\ln(\Lambda_L)}{\Lambda_L}$$

となる。これを示したのが図 12.19 である。全体的な特性の違いは圧縮性材料の場合と同様だが，荷重のレベルが 3 倍くらいにまで大きくなっている。

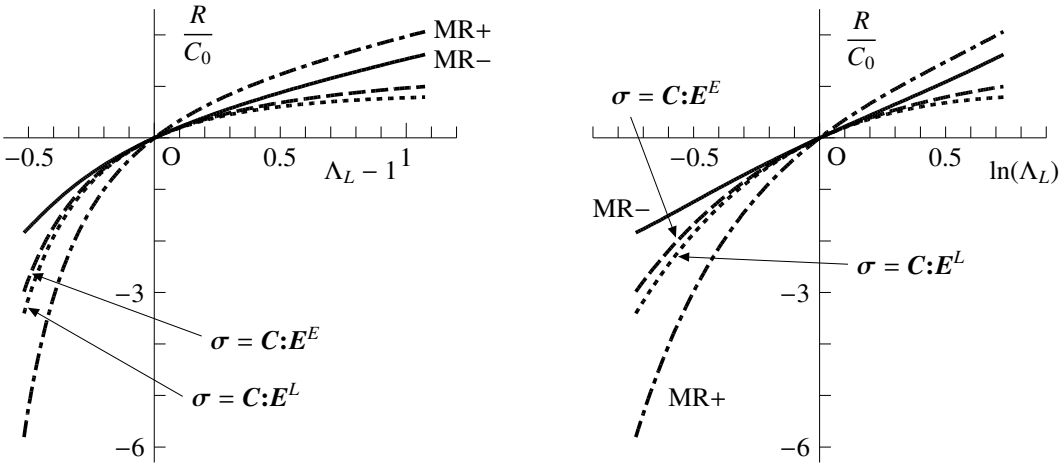
非圧縮性材料に対しては，ひずみエネルギ密度関数の例として挙げた式 (12.140) の **Mooney-Rivlin モデル**が有名である。これを一般化して

$$\phi = \frac{C_0}{2}(I_1 - 3) + C_1(I_2 - 3) \tag{12.146}$$



(a) 伸びひずみと荷重の関係　　(b) 対数ひずみと荷重の関係

図 12.19 非圧縮性弾性体の場合



(a) 伸びひずみと荷重の関係　　(b) 対数ひずみと荷重の関係

図 12.20 Cauchy 応力でモデル化した非圧縮性弾性体の場合

としてみよう。そして I_1, I_2 は変形テンソル $\boldsymbol{C}$ の第 1, 2 不変量とし

$$I_1 = F_{kJ}\,F_{kJ}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\left\{I_1^2 - (F_{kI}\,F_{kJ})\,(F_{lI}\,F_{lJ})\right\}, \quad \Big(F\Big) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\Lambda_1\Lambda_2} \end{pmatrix} \tag{12.147a, b, c}$$

としておこう。そして nominal 応力が

$$S_{Ij}^N = \frac{\partial\phi}{\partial x_{j,I}} - p\,X_{I,j} = C_0\,x_{j,I} - 2C_1\left\{(x_{k,J}x_{k,J})\,x_{j,I} - x_{j,K}x_{l,K}x_{l,I}\right\} + p\,X_{I,j} \tag{12.148}$$

と関係付けることができるものとする。ここに p は負の静水圧である。非圧縮性材料なので，これから Cauchy 応力は

$$\sigma_{ij} = x_{i,K}\,S_{Kj}^N = C_0\,x_{j,I}x_{i,I} - 2C_1\left\{(x_{k,J}x_{k,J})\,x_{j,I}x_{i,I} - x_{j,K}x_{l,K}x_{l,I}x_{i,I}\right\} + p\,\delta_{ij} \tag{12.149}$$

と表すことができる。そこで 1 軸載荷を想定して p を消去して Λ_2, Λ_3 を求めると，最終的に

$$\sigma_{11} = R\,\Lambda_L = \left(C_0 + 2C_1\frac{1}{\Lambda_L}\right)\left(\Lambda_L^2 - \frac{1}{\Lambda_L}\right), \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_L}}$$

という関係を得る。上の例の場合と $\Lambda_L = 1$ における勾配（剛性）を一致させようとすると

$$\frac{C_1}{C_0} = -\frac{1}{8}$$

と負になってしまうが，その結果を同じ図 12.19 に並べた。図中 ‘MR−’ とあるのがその結果である。 C_1 が負になっているが，これは微小変形理論において Poisson 比を $\nu = -1/7$ とした場合に相当し，その材料は安定ではあるものの複合材料のような特殊な材料特性に相当してしまうので，数値をそのまま正，つまり

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{8}$$

としたものも参考として ‘MR+’ として示しておいた。この場合も，第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた場合の挙動だけが他と少し違っている。 Mooney-Rivlin モデルはかなり非線形性の強い構成則に見えるが，荷重変形関係はほぼ線形になるのはとても興味深い。なお， Cauchy 応力を用いた結果だけを図 12.20 にまとめた。

(2) 増分で定義した場合

ある適切に定義された客観性を持つ速度応力 $\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})$ を用いて，客観性を持つ変形速度との間をある直交異方性を持つ材料<u>定数</u>で結びつけた

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}, \text{履歴}(\boldsymbol{X})) : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) \tag{12.150}$$

のような関係式で，構成則を定義することもできる。最も広く用いられているのは Cauchy 応力の Jaumann 速度と変形速度を弾性係数で関係付けるモデルだろう。つまり

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{d} \tag{12.151}$$

となる。これは**亜弾性**の一種で，このモデルが**保存的ではなくエネルギ散逸が避けられない**ということには注意する必要がある。再度， 3 軸方向への載荷状態を対象にすればスピンはすべて零なので，上式は

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d^L_{11} \\ d^L_{22} \\ d^L_{33} \end{Bmatrix} \tag{12.152}$$

となる。右辺の $\boldsymbol{d}^L$ は式 (12.66) で定義した対数ひずみ速度である。単純な載荷状態なので

$$\left(n\right) = \left(N\right) = \left(I\right), \quad \left(d^L\right) = [\,(\ln \Lambda)^{\cdot}\,]$$

となる。ここに $\left(I\right)$ は単位行列である。したがって，式 (12.134) の Cauchy 応力の更新規則を考慮すると，上式 (12.152) は容易に積分できて，結局

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ln \Lambda_1 \\ \ln \Lambda_2 \\ \ln \Lambda_3 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}^L$$

のように， Cauchy 応力と対数ひずみを線形関係で結び付けた前節のモデルの一つに一致する。したがって，引張試験の結果も前節の対応する結果と一致する。

あるいは式 (12.137) の**超弾性**のモデルから， ϕ が明確に定義できる場合にはそれを物質微分して

$$\dot{S}_{IJ} = \left(\frac{\partial\,(\rho_0\,\phi)}{\partial E_{IJ}}\right)^{\cdot} = \left(\frac{\partial^2\,(\rho_0\,\phi)}{\partial E_{IJ}\,\partial E_{KL}}\right)\dot{E}_{KL} \tag{$*$}$$

という増分関係も成立する。特に社会基盤構造に関係した材料の場合には，大変形を経験しつつある材料の真の初期状態を定義することは困難である。したがってある変形状態あるいは応力状態を仮の初期状態とするのだが，結局は各状態における増分関係（これからどうなろうとするのか）で構成則を定義する方が相応しいと考えられるので，固体の場合は updated Lagrange 的な構成則を定義してみよう。そこで上式 (∗) の updated Lagrange 的な極限をとって式 (12.121) (12.123) (12.124) を用いれば

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \overline{C}_{ijkl}\,(\rho, \boldsymbol{\sigma})\; d_{kl}, \quad \overline{C}_{ijkl}\,(\rho, \boldsymbol{\sigma}) \equiv \lim_{0 \to t} \left(\frac{\partial^2 (\rho_0\, \phi)}{\partial E_{IJ}\, \partial E_{KL}} \right) \tag{12.153a, b}$$

のように Truesdell 応力速度と変形速度の間の構成則が，超弾性とある種等価な増分構成則として成立する。最も基本的なモデルとして，この弾性係数 $\overline{\boldsymbol{C}}$ を定数係数の $\boldsymbol{C}$ で再定義して

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{d} \tag{12.154}$$

と関係付けた構成モデルも設定できる。この Truesdell 応力速度に近いもう一つの応力速度に Oldroyd 応力速度があるので，それを用いた

$$\overset{\sqcup}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{d} \tag{12.155}$$

という構成則も考えられる。

あるいは， Cauchy 応力ではなく，式 (12.118) の Kirchhoff 応力の Jaumann 速度と変形速度の間に

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}{}^{K} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{d} \tag{12.156}$$

という線形関係があるとするモデルも可能だ。式 (12.154) の場合と，式 (12.155) や式 (12.156) の場合の 3 者の例を， Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合と比較しておこう。いずれのモデルも

$$\dot{\sigma}_{11} = (\alpha + \beta\, \sigma_{11})\, \{\ln(\Lambda_L)\}^{\cdot} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\sigma}_{11}}{\alpha + \beta\, \sigma_{11}} = \frac{\dot{\Lambda}_L}{\Lambda_L}$$

と表すことができるので積分できて

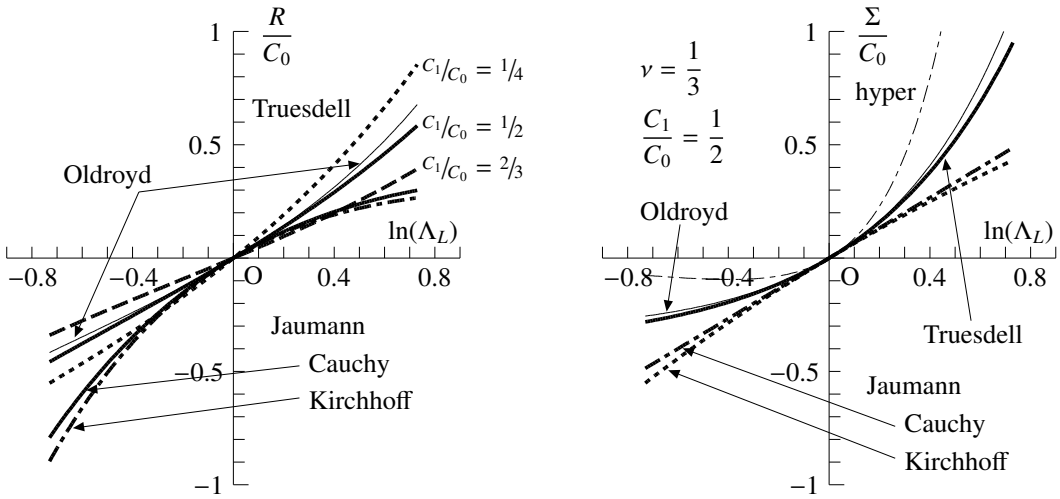
$$\sigma_{11} = \frac{R}{\Lambda_T^2} = \frac{\alpha}{\beta} \left(\Lambda_L^{\beta} - 1 \right), \quad \ln \Lambda_T = -\frac{C_1}{C_0 + C_1} \ln \Lambda_L$$

を得る。ここに α と β は各モデル毎に

$$\alpha \equiv \frac{C_0\,(C_0 + C_1) - 2C_1^2}{C_0 + C_1}, \quad \beta \equiv \begin{cases} -\dfrac{C_0 - C_1}{C_0 + C_1} : & \text{Kirchhoff 応力の Jaumann 速度} \\ \dfrac{C_0 + 3C_1}{C_0 + C_1} : & \text{Truesdell 応力速度} \\ 2 : & \text{Oldroyd 応力速度} \end{cases}$$

と定義される。

以上の四つのモデルで $C_1/C_0 = 1/2$ とした場合の結果を 3 本の実線と 1 本の一点鎖線で図 12.21 に示した。ただし Truesdell 応力速度の場合には $C_1/C_0 = 1/4,\ 2/3$ の場合も並べて破線で描いたが，これはそれぞれ微小変形理論の Poisson 比が $\nu = 0.2, 0.4$ の場合に相当する。細い実線が $C_1/C_0 = 1/2$ のときの Oldroyd 応力速度を用いた結果である。やはり応力速度の選択の違いによって引張試験の応答には大きな差が現れている。ところで， Truesdell 応力速度を用いた場合の結果は，縦軸の応力レベルや横軸の変形にあまり依存せず，その勾配がほぼ同じになっている。例えば鋼等の結晶金属材料を対象にすると，ほとんどの弾性変形成分は結晶格子そのものの歪みであろうし，それは応力レベルだけでなく，転位の移動による巨視的な非可逆変形のレベルに依存しない一



(a) 対数ひずみと荷重の関係　　(b) 対数ひずみと真応力（荷重）の関係

図 12.21 速度型で定義された弾性モデル

定の特性と考えてよさそうだ。そういう考察に基づけば，結晶金属材料の弾性部分には Truesdell 応力速度を用いるのが相応しいかもしれないと思い，この例でも 3 種類の材料パラメータで図示してみた。

では，どのモデルが材料の抵抗則を適切に表しているだろう。そこで図 12.21 (b) には縦軸に真応力 $\Sigma \equiv \sigma_{11}$ を用いて表現した材料の抵抗則を示した。式からも明らかなように， Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた亜弾性は Cauchy 応力そのものと対数ひずみを線形に関係付けていたから，この抵抗曲線は直線になっている。図中の ‘hyper’ は， $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}\!:\!\boldsymbol{E}$ と置いた簡易な超弾性の場合（非実用的な Saint Venant-Kirchhoff 材料）の抵抗則だが，これは圧縮側の

$$\Lambda_L^2 = \frac{1}{2\nu}\left\{(3+2\nu) - \sqrt{9+8\nu}\right\} \tag{12.157}$$

でピークを持ち，そのあとに明らかな軟化を示している。また

$$\Lambda_L^2 = \frac{1+\nu}{\nu} \tag{12.158}$$

で真応力 Σ は無限大（Λ_T が零）になる。例えば $\nu = \dfrac{1}{3}$ の場合は 2 倍の長さ（$\Lambda_L = 2$）にはならないことになる。これに対し Truesdell 応力速度を用いた場合は，引張では Poisson 比の影響で断面積が小さくなり，圧縮では逆に大きくなることを反映しているようにも見える。

非圧縮性材料の速度型構成則の場合は，非圧縮性の条件が式 (12.60) で与えられるので

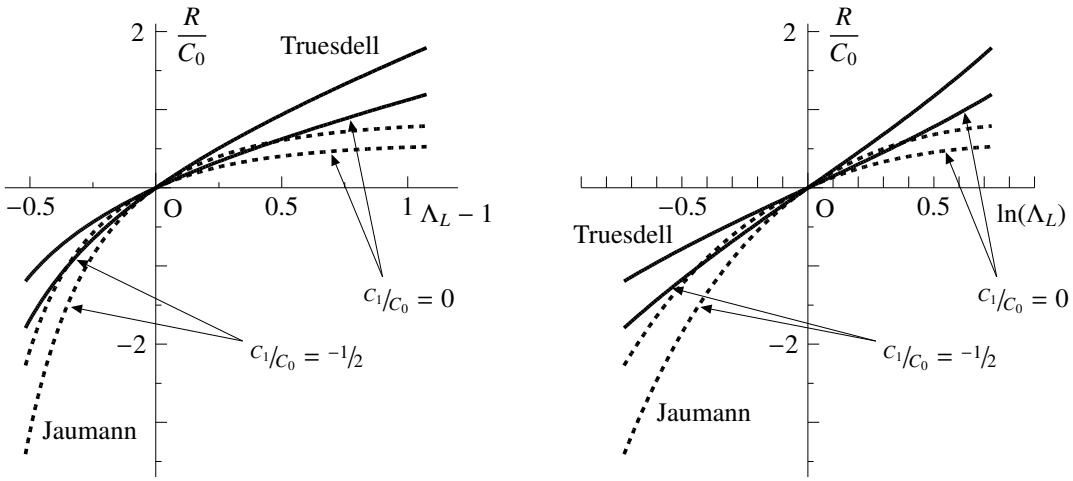
$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}\!:\!\boldsymbol{d} + p\,\boldsymbol{I} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \overset{\star}{\sigma}_{11} \\ \overset{\star}{\sigma}_{22} \\ \overset{\star}{\sigma}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix}, \quad d_{22} = d_{33} = -\frac{1}{2}\,d_{11}$$

のような関係でモデル化できる。 1 軸状態を対象とするので， $\dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{33} = 0$ から p を消去して，前節の場合と同様の演算を経て $\dot{\sigma}_{11}$ を求めると， Truesdell 応力速度の場合も

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}} := \overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}} \quad \rightarrow \quad R = \frac{3}{4\,\Lambda_L}\,(C_0 - C_1)\left(\Lambda_L^2 - 1\right)$$

と積分でき， Cauchy 応力の Jaumann 速度の場合も

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}} := \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} \quad \rightarrow \quad R = \frac{3}{2\,\Lambda_L}\,(C_0 - C_1)\ln(\Lambda_L)$$



(a) 伸びひずみと荷重の関係　　(b) 対数ひずみと荷重の関係

図 12.22 速度型で定義された非圧縮弾性モデル

のように積分できるが，後者は前節の結果と一致する。ちなみに $\Lambda_T^2 = 1/\Lambda_L$ である。前節と同様 $c_1/c_0 = -1/2$ にした場合（Poisson 比 $\nu = -1$ 相当）と，非圧縮粘性流体のように微小変形理論における式 (3.44) (3.45) の Hooke の法則でせん断挙動を記述するひずみには偏差ひずみではなく全ひずみを用いて

$$\sigma'_{ij} = 2G\,\epsilon'_{ij}, \quad \sigma_{kk} = K\,\epsilon_{kk} \quad \rightarrow \quad \sigma'_{ij} = 2G\,\epsilon_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3p$$

とみなした場合（$\nu = 1/2$ 相当），つまり $c_1/c_0 = 0$ の場合の結果を図 12.22 に示した。実線が Truesdell 応力速度を用いた場合で，破線が Cauchy 応力の Jaumann 速度の場合である。圧縮性材料モデルの場合とほぼ同様の傾向を示している。以上のいくつかの例で明らかなように，最も単純な定数係数の線形関係で構成則を定義しても，応力や応力速度およびひずみの定義に内在する非線形性によって，荷重変形関係は線形から大きくずれることには十分注意する必要がある。とても難しいとは思うが，材料試験に現れる非線形性のうち，どれがこの定義に内在する幾何学的非線形性によるもので，どれが材料そのものの非線形性なのかをきちんと区別する必要がある。

実は Cauchy 応力の Jaumann 速度には有名な特性 [58] が報告されているので，それについて Truesdell 応力速度を用いた場合と比べておこう。図 12.23 に示したように**高さと幅を保ったまま** x_1 方向にせん断変形 γ を与える。この変位成分は $u_1 = X_2 \tan\gamma$ だけなので

$$\left(F\right) = \begin{pmatrix} 1 & \tan\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(F\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。簡単のために 2×2 の部分のみを示す。高さと幅を保持しているので体積変化は無く $J = 1$ のままである。これから

$$\left(l\right) = \begin{pmatrix} 0 & (\tan\gamma)^{\cdot} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

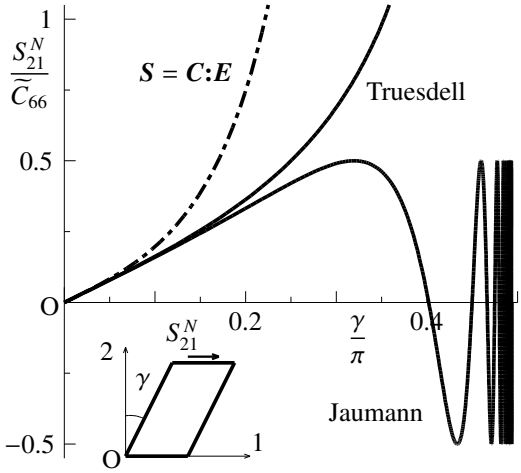


図 12.23 単純せん断

となり，変形速度とスピンは

$$\left(d\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2\,(\tan\gamma)^{\cdot} \\ 1/2\,(\tan\gamma)^{\cdot} & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(w\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2\,(\tan\gamma)^{\cdot} \\ -1/2\,(\tan\gamma)^{\cdot} & 0 \end{pmatrix}$$

のようになる。ロードセル等で測定できる変形前の単位面積当たりの外力は式 (12.83) の nominal 応力で定義すればいいので，この変形の場合は

$$S_{11}^N = \sigma_{11} - \sigma_{12}\,\tan\gamma, \quad S_{21}^N = \sigma_{12}, \quad S_{12}^N = \sigma_{12} - \sigma_{22}\,\tan\gamma, \quad S_{22}^N = \sigma_{22} \tag{$*$}$$

という関係になる。面白いことに当たり前だが，この関係は自動的にモーメントのつり合い $S_{21}^N - S_{12}^N - S_{22}^N \tan\gamma = 0$ を満足している。

まず Jaumann 応力速度で[35]構成則を定義する場合を考える。この変形の場合は式 (12.117) の定義から

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{11} - \sigma_{12}\,(\tan\gamma)^{\cdot}, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{22} + \sigma_{12}\,(\tan\gamma)^{\cdot}, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{12} + (\sigma_{11} - \sigma_{22})\,\frac{1}{2}\,(\tan\gamma)^{\cdot}$$

となる。これが $\boldsymbol{d}$ との間に直交異方性を持つ定数係数の線形関係にある弾性体とし，変形速度は $d_{12} = d_{21}$ のみが非零だから

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{11} = 0, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{22} = 0, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{12} = \widetilde{C}_{66}\,d_{12} = \frac{1}{2}\,\widetilde{C}_{66}\,(\tan\gamma)^{\cdot}$$

が成立する。$\widetilde{C}_{66}$ は式 (3.52) で定義したせん断接線係数で，微小変形理論の $2G$ に相当する。これから

$$\dot{\sigma}_{11} = \sigma_{12}\,(\tan\gamma)^{\cdot}, \quad \dot{\sigma}_{22} = -\sigma_{12}\,(\tan\gamma)^{\cdot}, \quad \dot{\sigma}_{12} = \frac{1}{2}\left\{\widetilde{C}_{66} - (\sigma_{11} - \sigma_{22})\right\}(\tan\gamma)^{\cdot}$$

となるので，まず

$$\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = 0$$

という関係と

$$\frac{\dot{\sigma}_{12}}{\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}} = \frac{\widetilde{C}_{66} - (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{4\,\sigma_{12}}$$

という関係が求められる。後者は積分できて

$$\left(\frac{2\,\sigma_{12}}{\widetilde{C}_{66}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}} - 1\right)^2 = 1$$

（楕円状の軌跡を描く）つまり

$$\frac{\sigma_{12}}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\,\sin\theta, \quad \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}} = 1 - \cos\theta$$

と置いていいので，これを上の応力速度 $\dot{\sigma}_{12}$ の式

$$\left(\frac{\dot{\sigma}_{12}}{\widetilde{C}_{66}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}}\right)(\tan\gamma)^{\cdot}$$

に代入すれば

$$\frac{1}{2}\,\cos\theta\,(\tan\gamma)^{\cdot} = \frac{1}{2}\,(\sin\theta)^{\cdot} \quad \rightarrow \quad (\tan\gamma)^{\cdot} = \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan\gamma$$

を得る。したがって，最終的に各応力成分は

$$\frac{\sigma_{12}}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\,\sin(\tan\gamma), \quad \frac{\sigma_{11}}{\widetilde{C}_{66}} = -\frac{\sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\,\{1 - \cos(\tan\gamma)\}$$

と求められ，これを式 ($*$) に代入して外力を求めると

$$\frac{S_{21}^N}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\,\sin(\tan\gamma), \quad \frac{S_{12}^N}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\left[\sin(\tan\gamma) + \tan\gamma\,\{1 - \cos(\tan\gamma)\}\right],$$
$$\frac{S_{11}^N}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\tan\gamma) - \tan\gamma\,\sin(\tan\gamma)\right], \quad \frac{S_{22}^N}{\widetilde{C}_{66}} = -\frac{1}{2}\,\{1 - \cos(\tan\gamma)\}$$

[35] この例は体積変化が無いので，Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合と Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いた場合とは同じ結果になる。

となる。この最初の式を図 12.23 に示した。γ が約 57.5 度で $1/2$ の最大値に達し，あとは $\gamma \to \pi/2$ に向けて無限に潰れて行く sine 曲線になる。これは直感的にもかなり奇妙な挙動になってしまっている。また消しゴムを潰してみて感じるように，S_{22}^N 等が零にならない結果は正しいようにも感じるかもしれないが，実験を無理に行った場合には，平均的にはこれも零になるのではないだろうか。いずれにしても，Jaumann 応力速度の適用範囲は，角度 γ でせいぜい 45 度くらいまでだろう。

次に，Truesdell 応力速度を用いて式 (12.154) のように構成則を定義する場合 [140] を考えよう。ここで対象とする変形には体積変化が無いので，構成則に Oldroyd 応力速度を用いた場合も同じ結果になる。式 (12.124) の定義から，この変形の場合は

$$\overset{\vee}{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{11} - 2\,\sigma_{12}\,(\tan\gamma)^{\cdot}, \quad \overset{\vee}{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{22}, \quad \overset{\vee}{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{12} - \sigma_{22}\,(\tan\gamma)^{\cdot}$$

となる。これが $\boldsymbol{d}$ との間に直交異方性を持つ定数係数の線形関係にある弾性体とすると，結局

$$\dot{\sigma}_{11} = 2\,\sigma_{12}\,(\tan\gamma)^{\cdot}, \quad \dot{\sigma}_{22} = 0, \quad \dot{\sigma}_{12} = \left\{\frac{1}{2}\,\widetilde{C}_{66} + \sigma_{22}\right\}(\tan\gamma)^{\cdot}$$

となる。これは容易に積分できて，最終的に各応力成分は

$$\frac{\sigma_{12}}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\,\tan\gamma, \quad \frac{\sigma_{11}}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\,\tan^2\gamma, \quad \frac{\sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}} = 0$$

と求めらる。これを式 (∗) に代入して外力を求めると

$$\frac{S_{21}^N}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{S_{12}^N}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2}\,\tan\gamma, \quad \frac{S_{11}^N}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{S_{22}^N}{\widetilde{C}_{66}} = 0$$

といった，とても単純な結果になる。この最初の式も図 12.23 に示したが，当然なことに γ が直角に近づくにつれて外力は無限大になる。ここで対象としているような変形を一様に起こす実験はほぼ不可能だが，消しゴムを潰してみたときに，平均的には S_{22}^N が零になることにはあまり抵抗は感じないのではないだろうか。外力状態は純せん断状態と同じになっている。ただもちろん，図 12.23 の縦軸の単位面積当たりの外力は弾性係数レベルというとんでもなく大きな値に至ることには注意して欲しい。

最後に式 (12.100) の第 2 Piola-Kirchhoff 応力を求めてみると

$$S_{11} = \sigma_{11} - 2\,\sigma_{12}\,\tan\gamma = -\frac{1}{2}\,\widetilde{C}_{66}\,\tan^2\gamma, \quad S_{22} = \sigma_{22} = 0, \quad S_{12} = \sigma_{12} = \frac{1}{2}\,\widetilde{C}_{66}\,\tan\gamma$$

となる。これに対応させて Green のひずみを求めると，式 (12.9) 等から

$$E_{11} = 0, \quad E_{22} = \frac{1}{2}\,\tan^2\gamma, \quad E_{12} = \frac{1}{2}\,\tan\gamma$$

と求められる。もし，第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみを直交異方性の定数係数で関係付けた弾性体で，ここで「実験した」Truesdell 応力速度を用いた構成則と等価なモデルにしようとすると

$$\left\{\begin{array}{c} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{array}\right\} = \left(\begin{array}{ccc} \widetilde{C}_{11} & -\widetilde{C}_{66} & 0 \\ -\widetilde{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{C}_{66} \end{array}\right)\left\{\begin{array}{c} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{array}\right\}$$

という材料に相当することになる。面白いことに，これで定義できる材料が存在するとすればそれは不安定である。あるいは逆に，第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみを直交異方性の定数係数で関係付けた構成則 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}{:}\boldsymbol{E}$ に従う材料の場合には

$$S_{11}^N = \frac{1}{2}\left(C_1 + \widetilde{C}_{66}\right)\tan^2\gamma, \quad S_{22}^N = \frac{1}{2}\,C_0\,\tan^2\gamma, \quad S_{12}^N = \frac{1}{2}\,\widetilde{C}_{66}\,\tan\gamma, \quad S_{21}^N = \frac{1}{2}\,\widetilde{C}_{66}\,\tan\gamma + \frac{1}{2}\,C_0\,\tan^3\gamma$$

となる。簡単のために前節の例と同様，$C_0/\widetilde{C}_{66} = 2$（微小変形理論における Hooke の法則の Poisson 比が $\nu = 1/3$ に相当する）とした場合の結果も図 12.23 に示した。ここまでの例では，Saint Venant-Kirchhoff 材料が亜弾性材料に比べてかなり剛な挙動を示すというのが一つの特徴だ。

(3) Truesdell 応力速度の物理的意味

第 12.3.4 節では材料と共に変形して回転する Lagrange 的な座標系で客観的な Oldroyd 応力速度を誘導したが，その中のスピン成分のみを残したものとして Cauchy 応力の Jaumann 速度が定義でき，多くの研究ではその Jaumann 速度が用いられている。なぜ $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ から回転成分だけを取り除いた成分でいいのだろうか。例えば立方晶の変形を念頭に置くと，弾塑性的に大きく変形したとしても，その直交する結晶面同士はほぼ直交性を保持しているだろうし，結晶間隔も弾性的に微小な伸び縮みしかしておらず，大きな変形は転位の移動による塑性変形で生じている。したがって材料の実質的な変形と関係付ける応力の変化つまり客観的な応力速度は結晶構造の回転成分だけを $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ から取り除けばいいことがわかる。しかしもっと一般的な材料の場合に，例えば藁を直交方向に編んだむしろや縦糸横糸を編み込んだ布のような微視構造を持った材料の場合には，変形前に直交していた繊維同士は変形によってその直交性も失うことは容易に想像できる。そのような材料に対しても単に回転成分だけを取り除いた客観的な応力速度を用いて構成モデルを構築しても大丈夫だろうか。

そこで具体的に，変形速度成分の除去も含む Truesdell 応力速度の物理的な意味について考察してみたい。その Truesdell 応力速度は，式 (12.153) で示したような意味で第 2 Piola-Kirchhoff 応力との関係が深いので，第 12.3.2 (2) 節で示した第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた有限変位理論の枠組の梁理論の特性に関連させて，その物理的な意味を説明する。ここでは変形速度の「除去」に関係する部分を説明する必要があるので，第 B.3 節で定式化される Timoshenko 梁理論の方を用いる。というのも，この理論の枠組では変形後の梁軸と断面が直交せず γ だけせん断変形が生じて，それが上述の縦糸横糸の歪みに相当するからだ。そのせん断力の構成則は

$$V = Gk_{\mathrm{T}}A\,\gamma + N\frac{\gamma}{1+\epsilon}$$

と表される。N は軸力で ϵ は軸の伸びひずみ，k_{T} はせん断に関する補正係数 [17] であり，A は断面積で G はせん断弾性係数である。このせん断変形 γ によって軸力 N とせん断力 V が直交しなくなるのだが，上式のせん断力の構成則の右辺第 1 項が材料そのものの抵抗則であり，第 2 項が梁軸と断面が直交しなくなることによって軸力が発生させる見かけのせん断抵抗なのだ。そしてこの第 2 項が Engesser の座屈公式 [95] にとってとても重要な項なのである。

このせん断力の構成式の物質微分をとると，増分構成則は左辺右辺を少し並び替えて

$$\dot{V} - N\left\{\frac{1}{1+\epsilon}\dot{\gamma} - \frac{\gamma}{(1+\epsilon)^2}\dot{\epsilon}\right\} = Gk_{\mathrm{T}}A\dot{\gamma} + EA\frac{\gamma}{1+\epsilon}\dot{\epsilon}$$

と表現できる。左辺第 2 項が梁軸と断面がせん断変形で直交しない状態で軸力が及ぼすせん断力増分への影響で，右辺は材料そのものの増分抵抗則である。断面力には梁の剛体的な回転は含まれていないから，この左辺第 2 項は梁の剛体的な回転とは既に関係が無い客観量である。以下で行う比較を単純化するために，もし現配置においてせん断変形が発生しておらず梁軸と断面が直交（$\gamma = 0$）していた場合に，さらに伸びひずみ ϵ が 1 に比べて無視できる程十分小さい場合には，上式は

$$\Delta\,(\text{実質的せん断弾性抵抗}) \equiv \dot{V} - N\,\dot{\gamma} = Gk_{\mathrm{T}}A\dot{\gamma} \tag{12.159}$$

となる。この左辺第 2 項の変形速度の効果が消えていないことに注意して欲しい。

上述のような瞬間的な変形状態における接線的な Timoshenko 梁の構成則の場合は，σ_{11} と σ_{13} だけが非零で，同時に $v_1 = v_1(x_1, x_3)$ で $v_3 = v_3(x_1)$ と考えていい。そこで，式 (12.159) と応力速度の関係を比較するために，例えば Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて等方弾性を式 (12.151) で定義した場合には

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13} - \sigma_{11}\,w_{31} = 2\mu\,d_{13}$$

のように左辺にはスピンのみしか残らず式 (12.159) とは整合しない。これに対し Truesdell 応力速度を用いて式 (12.154) で等方弾性を定義した場合には

$$\overset{\vee}{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13} - \sigma_{11}\, v_{3,1} = 2\mu\, d_{13} \tag{12.160}$$

のように変形速度も左辺に残るので式 (12.159) の左辺と整合している。あるいは， Oldroyd 応力速度を用いた式 (12.155) の構成則の場合は

$$\overset{\sqcup}{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13} - \sigma_{11}\, v_{3,1} - \sigma_{13}\, v_{1,1} = 2\mu\, d_{13}$$

となるが，梁理論では一般に軸線の伸びひずみ ϵ は他のひずみに比べて 1 オーダー小さいことから， $\epsilon \sim v_{1,1}$ も同様に他のひずみ速度より小さくなり，結局この式と式 (12.160) は本質的には同じである。このように応力が生じている現配置において，スピン項だけではなく変形速度項もうまく「除去」した応力速度を用いて弾性抵抗を定義することには，明確な力学的な意義が存在することがわかる。具体的に第 12.7.3 (1) 節では柱の座屈を対象とした数値解析を行って Engesser 公式等との定量的な比較をする。

(4) 増分仮想仕事と対称性

増分つり合い式 (12.131) は nominal 応力速度を用いて

$$\dot{n}_{ji,j} + \rho\, \dot{\pi}_i = 0$$

と表されていた。これと仮想速度場の内積で定義できる形式的な仮想仕事を現配置の体積 v に対して求め，式 (12.132) の境界条件を考慮すると，増分仮想仕事式は

$$-\int_v \delta v_i \left(\dot{n}_{ji,j} + \rho\, \dot{\pi}_i\right) \mathrm{d}v = \int_v \left(\delta v_{i,j}\, \dot{n}_{ji} - \rho\, \delta v_i\, \dot{\pi}_i\right) \mathrm{d}v - \int_s \delta v_i\, \dot{t}_i\, \mathrm{d}s = 0 \tag{12.161}$$

と表される。積分領域 s は現配置の表面を表す。なおこれは増分場と増分変位の内積なので物理的な仮想仕事ではないことには注意しておいて欲しい。一方どんな構成モデルであっても，式 (12.129) を用いれば nominal 応力速度で表した見かけ上の構成モデルは，速度勾配との間の

$$\dot{n}_{ji} = F_{jikl}\, v_{k,l}$$

という関係式で形式的には書き表すことができる。これを上の仮想仕事式に代入することによって，第 1 項の内力仮想仕事 $\delta U(v)$ は

$$\delta U(v) \equiv \int_v \delta v_{i,j}\, F_{jikl}\, v_{k,l}\, \mathrm{d}v$$

と表現できる。したがって，もし構成則が

$$F_{jikl} = F_{lkij} \tag{12.162}$$

のような対称性を持っている場合には，内力仮想仕事は瞬間的（updated Lagrange 的）には積分できて $U(v)$ が定義できる。つまり，真の構成則としては非保存的な亜弾性であるにもかかわらず， updated Lagrange 的には汎関数 $U(v)$ が定義できる構成モデルとして捉えることができる。

そこでまず Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて等方弾性を式 (12.151) と係数

$$C_{ijkl} = \mu \left(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}\right) + \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} \tag{12.163}$$

で定義した場合には， nominal 応力速度と速度勾配の関係は

$$F_{ijkl} = C_{ijkl} + \sigma_{ij}\, \delta_{kl} + \frac{1}{2}\sigma_{li}\, \delta_{jk} - \frac{1}{2}\sigma_{ki}\, \delta_{jl} - \frac{1}{2}\sigma_{lj}\, \delta_{ik} - \frac{1}{2}\sigma_{kj}\, \delta_{il} \quad \rightarrow \quad F_{ijkl} \neq F_{lkji}$$

となるので，上述のような対称性の式 (12.162) が成立せず汎関数 $U(v)$ は定義できない。しかし実は Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いた式 (12.156) の亜弾性の場合には式 (12.162) の対称性が成立する。一方， Truesdell 応力速度を用いて同様に等方弾性を式 (12.154) で定義すると

$$F_{ijkl} = C_{ijkl} + \sigma_{li}\,\delta_{jk} \quad \rightarrow \quad F_{ijkl} = F_{lkji}$$

のように式 (12.162) の対称性が成立し，汎関数 $U(v)$ を定義できる。具体的な「接線剛性行列」は第 12.7.1 (3) 節で示す。この意味では， Kirchhoff 応力の Jaumann 速度や Truesdell 応力速度を用いた二つの亜弾性と，それ以外の二つの亜弾性との間には大きな違いが存在している。接線弾性係数 F_{ijkl} は初期応力が存在する材料の接線的な弾性係数とも解釈できるので，それが対称性を持つことによって汎関数 $U(v)$ が定義できるのは望ましいと考えられる。

演習問題 12-4

4. この第 12.5.3 節で描いた図の関係を自ら求めて図示してみよ。

12.5.4 弾塑性体の代表例 — 速度非依存塑性

(1) Prandtl-Reuss モデル

最も代表的な Mises の降伏条件を用いた関連 J_2 流れ則のモデルを用いた有限変形の枠組のなかの記述の仕方を説明する。塑性の特性から塑性ひずみは非常に小さい増分しか定義できないので，弾性成分もその小さい応力増分に対する変化で抵抗則を記述しておいた方が便利である。あるいは結晶金属を念頭に置けば，弾性ひずみは非常に小さいので増分でモデル化することには問題は無いだろう。このように増分を扱う場合には，変形速度とスピンは式 (12.73) のように弾性成分と塑性成分に加算分解できて

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}) \tag{12.164a, b}$$

が厳密に成立する。

弾性は等方の Hooke の法則を拡張したものとして**超弾性**の式 (12.137) を根拠にして，それを物質微分した増分モデルとして式 (12.154) のような Truesdell 応力速度を用いた updated Lagrange 的な亜弾性を設定できる。しかし多くの研究では， Truesdell 応力速度の代わりに Cauchy 応力の Jaumann 速度が用いられている。そこでここでも式 (12.154) の代わりに式 (12.151) を採用し，さらに変形速度の弾性成分と式 (12.163) の弾性係数を用いて

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\,d^{\mathrm{e}}_{kl}, \quad C_{ijkl} = \mu\,(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}) + \left(K - \frac{2\mu}{3}\right)\delta_{ij}\,\delta_{kl} \tag{12.165a, b}$$

で亜弾性を表す。ここに K は体積弾性係数である。あるいはその逆関係は

$$d^{\mathrm{e}}_{ij} = D_{ijkl}\,\overset{\nabla}{\sigma}_{kl}, \quad D_{ijkl} = \frac{1}{4\mu}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu}\right)\delta_{ij}\,\delta_{kl} \tag{12.166a, b}$$

と表される。 Truesdell 応力速度を用いた例は第 12.6, 12.7 節で示す。

有限変形の枠組の Mises の降伏関数は

$$f \equiv \overline{\sigma} - \tau_{\mathrm{Y}}(\overline{\epsilon}^{\mathrm{p}}), \quad \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}} \equiv \int_{\text{履歴}} \sqrt{2\,d^{\mathrm{p}}_{ij}\,d^{\mathrm{p}}_{ij}}\,\mathrm{d}t \tag{12.167a, b}$$

で与えればいい。$\overline{\sigma}$ は式 (11.23a) で定義した相当応力である。一方，流れ則も同様に

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \lambda\,\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda\,\frac{\sigma'_{ij}}{2\overline{\sigma}} \tag{12.168}$$

で与えられる。さらに整合条件 $\left(\dot{f}=0\right)$ に式 (12.167a) を代入して

$$\lambda = \frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2H\overline{\sigma}}\dot{\sigma}_{ij}, \quad H \equiv \frac{\partial \tau_{\mathrm{Y}}(\overline{\epsilon}^{\mathrm{p}})}{\partial \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{12.169a, b}$$

を得る。 Mises の降伏条件は，材料中に方向性を持った微視的なメカニズムをモデル化したものではない。したがって材料と共に回転する観察者として流れ則を捉える必要は無く，また Cauchy 応力の更新は式 (12.134) のように Cauchy 応力の物質微係数の加算でいいことから，上式の整合条件も単純な物質微分で定義すればいいことになる。方向性を持つメカニズムの例は第 12.5.4 (4) 節に示した。これを式 (12.168) に代入して

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \frac{1}{H}\frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{4\overline{\sigma}^2}\dot{\sigma}_{kl} \tag{12.170}$$

のように塑性成分を表現できる。ここで，弾性の構成関係と対応させるために Cauchy 応力の物質微係数を Jaumann 速度に置き換える。右辺の応力と応力増分の積に式 (12.117) の Jaumann 速度を代入して，その中からスピンを含む項を一つ，例えば $\sigma'_{kl}w_{kj}\sigma_{jl}$ を取り出すと， Cauchy 応力の対称性から

$$\sigma'_{kl}w_{kj}\sigma_{jl} = \frac{1}{2}\left(\sigma'_{kl}w_{kj}\sigma_{jl} + \sigma'_{jl}w_{jk}\sigma_{kl}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma'_{kl}w_{kj}\sigma_{jl} - \sigma'_{jl}w_{kj}\sigma_{kl}\right) = \cdots = 0$$

となることを容易に確認できる。したがって，上式 (12.169a) (12.170) の応力増分を Jaumann 速度で置き換えてもよく，結局

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \frac{1}{H}\frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{4\overline{\sigma}^2}\overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \tag{12.171}$$

が塑性の構成則になる。

最終的に，式 (12.166) の弾性成分と式 (12.171) の塑性成分を式 (12.164) に代入すれば

$$d_{ij} = \left(D_{ijkl} + \frac{1}{H}\frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{4\overline{\sigma}^2}\right)\overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \tag{12.172}$$

という増分構成則が求められる。さらにその逆関係は

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \left(C_{ijkl} - \frac{\mu^2}{\mu+H}\frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2}\right)d_{kl} \tag{12.173}$$

となる。載荷等の条件も式 (11.40) から

$$\text{弾性:} \quad \lambda = 0 \quad \text{もし} \quad f < 0 \tag{12.174a}$$

$$\text{除荷:} \quad \lambda = 0 \quad \text{もし} \quad f = 0 \quad \text{かつ} \quad \sigma'_{ij}\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} < 0 \tag{12.174b}$$

$$\text{中立載荷:} \quad \lambda = 0 \quad \text{もし} \quad f = 0 \quad \text{かつ} \quad \sigma'_{ij}\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = 0 \tag{12.174c}$$

$$\text{載荷:} \quad \lambda > 0 \quad \text{もし} \quad f = 0 \quad \text{かつ} \quad \sigma'_{ij}\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} > 0 \tag{12.174d}$$

と書くことができる。

(2) 非関連流れ則

次に第 11.4.2 節で概説した一つの非関連流れ則 [75] を紹介しておこう。実はこちらが元で，第 11.4.2 節はその微小変形理論版である。まず降伏関数 f と塑性ポテンシャル g を

$$f \equiv \overline{\sigma} - F(\mathrm{I}_1, \Delta^{\mathrm{p}}, \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}}), \quad g \equiv \overline{\sigma} + G(\mathrm{I}_1) \tag{12.175a, b}$$

と定義している。ここに $\overline{\sigma}$ は式 (11.23a) で定義した相当応力であり，I_1 は式 (3.36) で定義した応力の第 1 不変量である。また塑性的体積ひずみとせん断ひずみはそれぞれ

$$\Delta^{\mathrm{p}} \equiv \int_{\text{履歴}} \frac{\rho_0}{\rho}\, d^{\mathrm{p}}_{kk}\, \mathrm{d}t, \quad \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}} \equiv \int_{\text{履歴}} \sqrt{2\, d^{\mathrm{p}\prime}_{ij}\, d^{\mathrm{p}\prime}_{ij}}\, \mathrm{d}t \tag{12.176a, b}$$

と定義した。

上式 (12.175) の塑性ポテンシャルを，流れ則の式 (11.74a) に代入すると

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \lambda \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\,\overline{\sigma}} + \beta\, \delta_{ij} \right\}, \quad \beta = \beta(\mathrm{I}_1) \equiv \frac{\partial G(\mathrm{I}_1)}{\partial \mathrm{I}_1} \tag{12.177a, b}$$

という関係になる。次に整合条件は

$$\dot{f} = \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}}\, \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \mathrm{I}_1}\, \dot{\mathrm{I}}_1 - \frac{\partial F}{\partial \Delta^{\mathrm{p}}}\, \dot{\Delta}^{\mathrm{p}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}}}\, \dot{\overline{\epsilon}}^{\mathrm{p}} = 0$$

となることから，式 (11.37) (12.176) を考慮すれば

$$\frac{\sigma'_{ij}}{2\,\overline{\sigma}}\, \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \mathrm{I}_1}\, \dot{\sigma}_{kk} = \frac{\rho_0}{\rho}\, \frac{\partial F}{\partial \Delta^{\mathrm{p}}}\, d^{\mathrm{p}}_{kk} + \frac{\partial F}{\partial \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}}}\, \sqrt{2\, d^{\mathrm{p}\prime}_{ij}\, d^{\mathrm{p}\prime}_{ij}} \tag{12.178}$$

となる。これに式 (12.177) を代入して整理すると λ が

$$\lambda = \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\,\overline{\sigma}} - \frac{\partial F}{\partial \mathrm{I}_1}\, \delta_{kl} \right) \dot{\sigma}_{kl}, \quad H \equiv 3\, \frac{\rho_0}{\rho}\, \frac{\partial F}{\partial \Delta^{\mathrm{p}}}\, \beta + \frac{\partial F}{\partial \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{12.179a, b}$$

と求められる。ここに H は**硬化係数**である。これを流れ則の式 (11.136) に代入し戻せば

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\,\overline{\sigma}} + \beta\, \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\,\overline{\sigma}} + \alpha\, \delta_{kl} \right\} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \alpha = \alpha(\mathrm{I}_1, \Delta^{\mathrm{p}}, \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}}) \equiv -\frac{\partial F(\mathrm{I}_1, \Delta^{\mathrm{p}}, \overline{\epsilon}^{\mathrm{p}})}{\partial \mathrm{I}_1} \tag{12.180a, b}$$

のように塑性ひずみ増分を表現できる。ここでも式 (12.171) の誘導と同様に，Cauchy 応力の物質微係数を Jaumann 速度に置き換えることができるので，結局

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\,\overline{\sigma}} + \beta\, \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\,\overline{\sigma}} + \alpha\, \delta_{kl} \right\} \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \tag{12.181}$$

を得る。

弾性は式 (12.166) の Hooke 則を満足するものとすると，結局加算則の式 (12.164) から

$$d_{ij} = D_{ijkl}\, \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} + \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\,\overline{\sigma}} + \beta\, \delta_{ij} \right) \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\,\overline{\sigma}} + \alpha\, \delta_{kl} \right) \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \tag{12.182}$$

を得る。されにその逆関係は

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\, d_{kl} - \frac{\left(\dfrac{\mu\, \sigma'_{ij}}{\overline{\sigma}} + 3K\, \beta\, \delta_{ij} \right) \left(\dfrac{\mu\, \sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}} + 3K\, \alpha\, \delta_{kl} \right)}{H + \mu + 9K\, \alpha\, \beta}\, d_{kl} \tag{12.183}$$

となる。それぞれ，式 (11.141) と式 (11.142) の応力速度を Cauchy 応力の Jaumann 速度で置き換えたものと形式的に一致する。

(3) 非共軸モデル

やはり地盤や岩盤のように，いわゆる法線則が成立しない材料もある。一つのモデルとして第 11.4.3 節で紹介したもの [82] がある。流れ則に，応力との非共軸項，つまり応力増分との共軸項を加えて

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \lambda\, \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{1}{2\, h_1} \left(\overset{\nabla}{\sigma}{}'_{ij} - \frac{1}{2\,\overline{\sigma}^2}\, \sigma'_{ij}\, \sigma'_{kl}\, \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \right) \tag{12.184}$$

と仮定している。降伏関数と塑性ポテンシャルは式 (12.175) と同じである。誘導は第 11.4.3 節に概説したので省略すると，塑性ひずみ増分が

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \frac{1}{H}\left\{\frac{\sigma'_{ij}}{2\overline{\sigma}} + \beta\,\delta_{ij}\right\}\left\{\frac{\sigma'_{kl}}{2\overline{\sigma}} + \alpha\,\delta_{kl}\right\}\overset{\nabla}{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2\,h_1}\left(\overset{\nabla}{\sigma}{}'_{ij} - \frac{1}{2\,\overline{\sigma}^2}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}\,\overset{\nabla}{\sigma}_{kl}\right) \tag{12.185}$$

のような近似的関係として求められる。ここでも弾性は前節と同様，式 (12.166) の Hooke 則を満足するものとすると，結局総ひずみ増分が

$$\begin{aligned} d_{ij} = {} & \frac{1}{2\mu}\,\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu}\right)\delta_{ij}\,\overset{\nabla}{\sigma}_{kk} \\ & + \frac{1}{H}\left\{\frac{\sigma'_{ij}}{2\overline{\sigma}} + \beta\,\delta_{ij}\right\}\left\{\frac{\sigma'_{kl}}{2\overline{\sigma}} + \alpha\,\delta_{kl}\right\}\overset{\nabla}{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2\,h_1}\left(\overset{\nabla}{\sigma}{}'_{ij} - \frac{1}{2\,\overline{\sigma}^2}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}\,\overset{\nabla}{\sigma}_{kl}\right) \end{aligned} \tag{12.186}$$

と表される。結局増分構成方程式は，式 (11.153) (11.154) の応力速度を Cauchy 応力の Jaumann 速度に置き換えたものになる。

(4) すべり系を持つ単結晶モデル

もう少し微視的にも物理的なモデルの例として，金属単結晶中の転位の移動により生じる塑性変形を連続体的に分布するすべりでモデル化した Asaro のモデル [3, 5] を紹介する。弾性は，結晶格子と共に弾性的に剛体回転した観察者から見た客観的な応力速度と変形速度の間に抵抗則を定義する。ただし， Cauchy 応力ではなく Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を増分変形の弾性成分だけを用いて

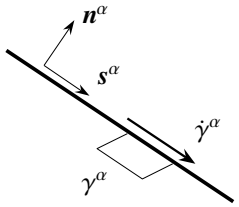


図 12.24 α すべり系

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\,d^{\mathrm{e}}_{kk} = C_{ijkl}\,d^{\mathrm{e}}_{kl} \tag{12.187}$$

と定義する。ここに弾性関連の Jaumann 速度は

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - w^{\mathrm{e}}_{ik}\,\sigma_{kj} - w^{\mathrm{e}}_{jk}\,\sigma_{ki} \tag{12.188}$$

と定義し直してある。式 (12.126) に示したように， Truesdell 応力速度は剛体的な回転と伸び縮みおよび歪みによる Cauchy 応力の補正項を三つ，ちょうど弾性座屈の幾何剛性項のように持っているが，上式 (12.187) では，結晶格子の弾性抵抗増分に含まれる剛体的な回転と格子間隔の伸び縮みによる二つの補正だけを考慮した応力速度で定義している。したがって結晶格子がジグザグになる影響はほぼ無視できるものと考えている。

これに対し塑性変形は転位の移動によって結晶格子間隔（Burgers ベクトル）分だけのズレあるいはすべり変形が連続的に分布・蓄積する[36]ものとしてモデル化する。つまり図 12.24 に示したように，単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}^\alpha$ とする α すべり面上ですべり変形増分 $\dot{\gamma}^\alpha$ が生じようとしていると考えるのだ。もちろん $\dot{\gamma}^\alpha$ は非可逆的な変形[37]と考え，単位方向ベクトル $\boldsymbol{s}^\alpha$ と逆向きのすべり系も同時に存在するものとする。このとき，この α すべり系に生じるすべり増分によって

$$v^{\mathrm{p}}_{i,j} = \dot{\gamma}^\alpha\,s^\alpha_i\,n^\alpha_j, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, N \tag{12.189}$$

のような塑性的な速度勾配成分が発生する。ここでは添え字 α は三つ現れていることからもわかるように，その総和はとらない。 N は存在するすべり系の数であり，結晶構造によってこの向きと数は決まる。例えば面心

[36] 転位が移動することによって結晶格子にズレが生じることから，移動する転位が通過した面上にあたかもすべり変形が残存したようにモデル化している。

[37] 第 1 著者が学生のとき，電子顕微鏡の映像の中で転位線が同じところを行ったり来たりしているのを見たことがある。界面に達するまでは元に戻れるのかな。

立方晶の図 11.16 を参照して欲しい。転位は止まっているときには何も変形を生じさせないが，それが移動することによって非可逆変形が生じるため，それが速度勾配場の発生でモデル化されている。したがって，変形速度とスピンの塑性成分は

$$d^{\mathrm{p}}_{ij} = \sum_{\alpha} p^{\alpha}_{ij}\,\dot{\gamma}^{\alpha}, \quad w^{\mathrm{p}}_{ij} = \sum_{\alpha} \omega^{\alpha}_{ij}\,\dot{\gamma}^{\alpha} \tag{12.190a, b}$$

となる。以下，すべり系についての添え字について総和をとるときには総和記号 $\sum_{\alpha}$ で明示するが，それは N 個のすべり系のうちの滑動しようとしている（後述する載荷条件を満足する）すべり系に対してのみ総和をとるものとする。また

$$p^{\alpha}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(s^{\alpha}_{i}\,n^{\alpha}_{j} + n^{\alpha}_{i}\,s^{\alpha}_{j}\right), \quad \omega^{\alpha}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(s^{\alpha}_{i}\,n^{\alpha}_{j} - n^{\alpha}_{i}\,s^{\alpha}_{j}\right) \tag{12.191a, b}$$

と定義されているが，ここも α については総和をとらない。転位が移動しても結晶格子は回転しないだろうから，この $\boldsymbol{w}^{\mathrm{p}}$ は弾性的なスピンを補って適合させるために生じているものと解釈される。したがって，すべり面そのものの運動は格子の弾性的な回転に依存するだけなので

$$\dot{s}^{\alpha}_{i} = w^{\mathrm{e}}_{ij}\,s^{\alpha}_{j}, \quad \dot{n}^{\alpha}_{i} = w^{\mathrm{e}}_{ij}\,n^{\alpha}_{j} \tag{12.192a, b}$$

のような単純な回転運動しかしないものとする。これによって，二つのベクトル $\boldsymbol{s}^{\alpha}$ と $\boldsymbol{n}^{\alpha}$ は単位ベクトルのままになるのでわかり易い。

あとは降伏条件と流れ則を定義すれば，弾塑性構成則をモデル化できる。これは各すべり系における摩擦とすべりでモデル化するのが最も素直で単純である。つまり，ある α すべり系のすべり面上のせん断応力がある規準値 $\tau^{\alpha}_{\mathrm{Y}}$ に達したとき，つまり

$$\tau^{\alpha} \equiv \sigma_{ij}\,s^{\alpha}_{i}\,n^{\alpha}_{j} = \tau^{\alpha}_{\mathrm{Y}} \tag{12.193}$$

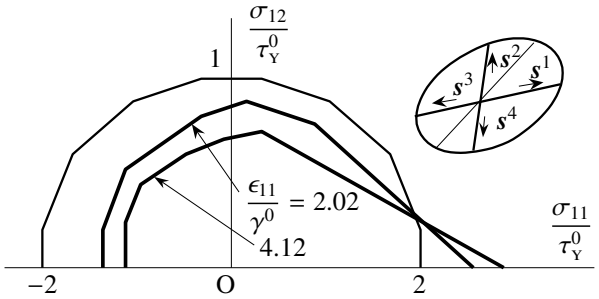


図 12.25 多結晶モデルの降伏曲面の模式図

を満足したときに転位が動き始めるものとし，$\tau^{\alpha}_{\mathrm{Y}}$ は最大摩擦力に相当する材料パラメータである。また流れ則はそれに対応して，そのすべり面上の **Schmid** 則で与える。それは上式 (12.193) の変化則に相当し

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \sum_{\beta} h^{\alpha\beta}\,\dot{\gamma}^{\beta} \tag{12.194}$$

とモデル化される。この $h^{\alpha\beta}$ は β 系のすべり増分によって α 系に生じるすべり抵抗力増分を与える材料パラメータで，動摩擦係数に相当する一種の硬化係数である。$\alpha \neq \beta$ の成分の物理的な意味については文献を参照して欲しい。

式 (12.193) を物質微分すると

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \dot{\sigma}_{ij}\,s^{\alpha}_{i}\,n^{\alpha}_{j} + \sigma\,\dot{s}^{\alpha}_{i}\,n^{\alpha}_{j} + \sigma\,s^{\alpha}_{i}\,\dot{n}^{\alpha}_{j}$$

となるので，すべり面の運動の式 (12.192) を代入して整理すると

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \dot{\sigma}_{ij}\,s^{\alpha}_{i}\,n^{\alpha}_{j} + \sigma\,w^{\mathrm{e}}_{ik}\,s^{\alpha}_{k}\,n^{\alpha}_{j} + \sigma\,s^{\alpha}_{i}\,w^{\mathrm{e}}_{jk}\,n^{\alpha}_{k} = s^{\alpha}_{i}\,n^{\alpha}_{j}\left(\dot{\sigma}_{ij} - w^{\mathrm{e}}_{ik}\,\sigma_{kj} - w^{\mathrm{e}}_{jk}\,\sigma_{ki}\right)$$

を得る。つまり式 (12.188) を参照すれば，この関係は

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij}\,s^{\alpha}_{i}\,n^{\alpha}_{j}$$

と表すことができる。つまり結晶格子と一緒に回転しながら観察した流れ則になっていて，ここが式 (12.169) の Prandtl-Reuss モデルの整合条件とは異なる点である。この結果を， Cauchy 応力の対称性を損なわないように定義し直して式 (12.194) に代入すれば，流れ則が

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} = \sum_{\beta} h^{\alpha\beta}\, \dot{\gamma}^{\beta} \tag{12.195}$$

と表される。同様に，降伏条件式 (12.193) も

$$\sigma_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} = \tau^{\alpha}_{\mathrm{Y}} \tag{12.196}$$

と書き直すことができる。したがって，ある α すべり系に対する載荷・除荷の条件は

$$\text{弾性:} \quad \dot{\gamma}^{\alpha} = 0 \quad \text{もし} \quad \sigma_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} < \tau^{\alpha}_{\mathrm{Y}} \tag{12.197a}$$

$$\text{除荷:} \quad \dot{\gamma}^{\alpha} = 0 \quad \text{もし} \quad \sigma_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} = \tau^{\alpha}_{\mathrm{Y}} \quad \text{かつ} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} < \sum_{\beta} h^{\alpha\beta}\, \dot{\gamma}^{\beta} \tag{12.197b}$$

$$\text{載荷:} \quad \dot{\gamma}^{\alpha} \geq 0 \quad \text{もし} \quad \sigma_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} = \tau^{\alpha}_{\mathrm{Y}} \quad \text{かつ} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} = \sum_{\beta} h^{\alpha\beta}\, \dot{\gamma}^{\beta} \tag{12.197c}$$

のように規定すればいい。

さて，式 (12.195) の流れ則の左辺に式 (12.187) の弾性関係を代入し，変形速度の加算則の式 (12.164) をそれに適用すると

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} = p^{\alpha}_{ij} \left(C_{ijkl}\, d_{kl} - \sigma_{ij}\, d_{kk} - C_{ijkl}\, d^{\mathrm{p}}_{kl} + \sigma_{ij}\, d^{\mathrm{p}}_{kk} \right)$$

を得る。これに式 (12.190a) の変形速度の塑性成分の運動学を代入すれば，結局式 (12.195) から

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij}\, p^{\alpha}_{ij} = p^{\alpha}_{ij} \left(C_{ijkl}\, d_{kl} - \sigma_{ij}\, d_{kk} \right) - \sum_{\beta} p^{\alpha}_{ij} \left(C_{ijkl}\, p^{\beta}_{kl} - \sigma_{ij}\, p^{\beta}_{kk} \right) \dot{\gamma}^{\beta} = \sum_{\beta} h^{\alpha\beta}\, \dot{\gamma}^{\beta}$$

という関係を得るので，載荷条件が満足されている場合には，この式からすべり増分が

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = \sum_{\beta} M^{\alpha\beta}\, p^{\beta}_{ij} \left(C_{ijkl} - \sigma_{ij}\, \delta_{kl} \right) d_{kl} \tag{12.198}$$

と求められる。ここに $M^{\alpha\beta}$ は次の $N^{\alpha\beta}$ の逆行列である。

$$M^{\alpha\beta} \equiv \left(N^{\alpha\beta} \right)^{-1}, \quad N^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} + p^{\alpha}_{ij} \left(C_{ijkl} - \sigma_{ij}\, \delta_{kl} \right) p^{\beta}_{kl} \tag{12.199a, b}$$

また，弾性の式 (12.187) に変形速度の加算則の式 (12.164) を利用すると

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\, d_{kk} = C_{ijkl}\, d_{kl} - \sum_{\alpha} \left(C_{ijkl}\, p^{\alpha}_{kl} - \sigma_{ij}\, p^{\alpha}_{kk} + \omega^{\alpha}_{ik}\, \sigma_{kj} + \omega^{\alpha}_{jk}\, \sigma_{ki} \right) \dot{\gamma}^{\alpha} \tag{12.200}$$

を得る。この二つの式 (12.198) (12.200) から単結晶体の増分弾塑性構成則が

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\, d_{kl} - \sigma_{ij}\, d_{kk} - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(C_{ijkl}\, p^{\alpha}_{kl} - \sigma_{ij}\, p^{\alpha}_{kk} + \omega^{\alpha}_{ik}\, \sigma_{kj} + \omega^{\alpha}_{jk}\, \sigma_{ki} \right) M^{\alpha\beta}\, p^{\beta}_{mn} \left(C_{mnpq} - \sigma_{mn}\, \delta_{pq} \right) d_{pq} \tag{12.201}$$

と求められる。

なお，このモデルの塑性変形はあくまでも転位の蓄積を連続体中に分布させたすべりでモデル化したものである。したがってこれを多結晶体のシミュレーションに用いて，応力集中等で粒界に塑性変形が集中したとしても，実際に界面で生じるであろう空隙や亀裂をモデル化できているとは限らない。そこでは，空隙の発生と

単結晶粒の剛体的な回転[38]も生じていると考えられるが，それをこの Asaro のモデルで適切にシミュレーションできるとは限らないので注意が必要である。一つだけ平面ひずみ問題の**多結晶金属モデル**の例 [51] を示しておこう。図 12.25 のインセットにあるように単結晶粒を楕円形で近似し，各結晶粒には挟む角 70 度で二つのすべり線（したがって四つのすべり系 $\alpha = 1\sim4$）のみがあるとする。この結晶粒の向きが 0 度から 90 度までに 2 度刻みで 46 種類等間隔で（つまり一様なランダム性で）分布しているものとする。各結晶粒内の微視的な構成則はこの節で示したモデルで与えられるものとし，式 (12.193) の基準値 $\tau_{\mathrm{Y}}^{\alpha}$ が硬化を含まず

$$\tau_{\mathrm{Y}}^{\alpha} = \tau_{\mathrm{Y}}^{0} = \mathrm{const.}, \quad \gamma^{0} \equiv \frac{\tau_{\mathrm{Y}}^{0}}{\overline{\mu}}$$

と一定であるとする。さらに多結晶体としての平均挙動は，付録 H にある解析的な平均化手法を有限変形増分理論に拡張したものでモデル化した。上式の $\overline{\mu}$ は，その手法を用いて求められる多結晶体の平均的なせん断弾性係数であり，単結晶間の相互作用を解析的平均化手法で考慮できる。このモデルに対して x_1 軸方向への単調載荷によって変化する降伏曲面を模式的に[39]示したのが図 12.25 である。初期にはほぼ等方で円状だった降伏曲面が，載荷に伴って載荷方向に尖っていき，応力状態の変化による**移動硬化**も現れている。また降伏曲面は，式 (12.193) で定義された全すべり系の降伏条件の中の最小条件から得られるので折れ線状になる。したがって降伏曲面に角点が生じるが，この角点では対応した二つのすべりが可能になるだけで，境界値問題の解としては唯一に塑性変形が決定できる（だろうと考えている）。鋼のように無数の単結晶粒の集合体である場合には，載荷方向以外の角点は無くなり滑らかな降伏面になると考えればいい。

12.6 非線形挙動の解析的予測の例

12.6.1 局所化条件

鋼の引張試験では降伏後に Lüders 帯と呼ばれる筋が観察される場合がある。多結晶体なので，結晶方位とは無関係な向きに生じる巨視的なすべり線とかせん断帯と捉えられている。これを解析的に予測する手法として文献 [40] のアプローチを紹介する。法線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{\nu}$ とするある不連続面があり，その面上で局所的なすべりが生じているとすると，その不連続面を境に速度勾配には式 (12.189) と同様に

$$\left\langle v_{i,j} \right\rangle = g_i \, \nu_j \tag{12.202}$$

という不連続量 $\boldsymbol{g}$ が生じる。この $\langle v_{i,j} \rangle$ は不連続面を挟む $v_{i,j}$ の不連続量を表す。しかしながら，連続体の枠組でこのような不連続現象をモデル化する場合には，ちょうど第 11.5.2 節のすべり線理論のように考えざるを得ず，上述の速度勾配の不連続は「生じようとしている」変形として捉えることになる。したがって連続体であり続ける以上は，この速度勾配の不連続面を境にした力の増分は連続していなければならないので，式 (12.132) の応力増分の境界条件を参考にして

$$\left\langle \nu_j \, \dot{n}_{ji} \right\rangle = 0 \tag{12.203}$$

が成立しなければならない。$\dot{\boldsymbol{n}}$ は nominal 応力速度である。

前述したように，材料の構成モデルにかかわらず形式的には増分構成則を

$$\dot{n}_{ji} = F_{jikl} \, v_{k,l} \tag{12.204}$$

という関係式に変換できるので，これに式 (12.202) を代入したものを式 (12.203) に代入すれば，応力増分の連続条件が

$$\left(\nu_j \, F_{jikl} \, \nu_l \right) g_k = 0 \tag{12.205}$$

[38] 村外志夫先生の impotent eigenstrain がこれかな? 呵呵。
[39] 正確な図は文献 [51] を。

と表される。したがって，このような不連続 $\boldsymbol{g}$ が生じ得るための必要条件が

$$\det\left(\nu_j\, F_{jikl}\, \nu_l\right) = 0 \tag{12.206}$$

と求められ，これが変形の局所化の発生条件として知られている。なお，式 (12.202) で表される局所化した変形は物体中に孤立して発生するような不連続面に相当している。したがって，構造部材の弾性座屈のような周期的な集中変形はあくまでも分散的な分岐解に相当していることから，厳密には局所変形とは呼ばない。文献 [40] でも，一様な場の解から分散的な解への分岐の方が先に生じることが述べられているのだが，第 12.7.3 (2) 節の数値解析例でも先行する分散的・周期的な変形が観察できる。

ところで，微小変形理論の枠組で紹介した Drucker の安定公準式 (11.60) からは

$$\dot{\sigma}_{ij}\, \dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{ij} \geq 0$$

という条件が派生する。これに弾塑性接線構成則を代入すると

$$\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{ij}\, C^{\mathrm{ep}}_{ijkl}\, \dot{\epsilon}_{kl} \geq 0, \quad \dot{\sigma}_{ij} = C^{\mathrm{ep}}_{ijkl}\, \dot{\epsilon}_{kl} \tag{$*$}$$

を得る。もし，弾性ひずみが無視できるほど小さく，上式 (12.202) のすべりが生じようとしているとすると

$$\dot{\epsilon}_{ij} \simeq \dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_i\, \nu_j + g_j\, \nu_i\right)$$

が成立するので，これを上式 ($*$) に代入して整理すると

$$g_j\, \left(\nu_i\, C^{\mathrm{ep}}_{ijkl}\, \nu_l\right)\, g_k \geq 0$$

が Drucker の安定材料の定義になる。この $\boldsymbol{g}$ についての 2 次形式が正値である条件は

$$\det\left(\nu_i\, C^{\mathrm{ep}}_{ijkl}\, \nu_l\right) \geq 0 \tag{$**$}$$

であり，この特異条件（等号の成立）が式 (12.206) の局所化条件と整合するように見える。しかし，式 (12.204) の $\boldsymbol{F}$ は比例載荷であっても材料と応力等の関数 $\boldsymbol{F}(\text{材料}, \boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}, \cdots)$ であるのに対し，微小変形理論の $\boldsymbol{C}^{\mathrm{ep}}$ は比例載荷では材料定数にしか依存しない。したがって式 ($**$) の等号成立は材料そのものの不安定に相当し，変形の局所化とは関係が無い。したがって，微小変形理論では一般に式 (12.206) の局所化条件は成立しない。微小変位理論で座屈が予測できないのと同じである。

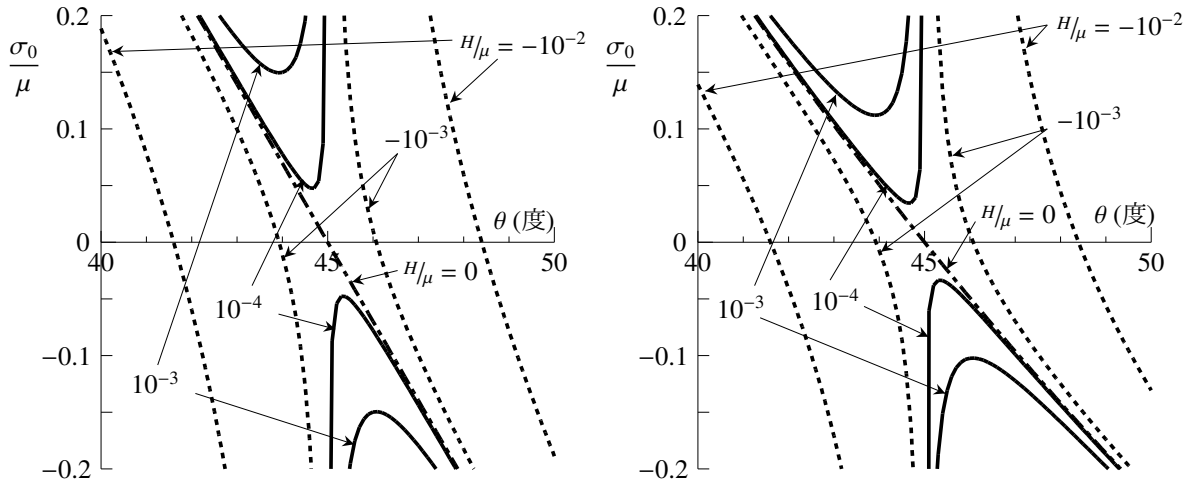
12.6.2 構成則の違いによる代表的な例

ここでは第 12.5.4 (1) 節で説明した最も基本的な Prandtl-Reuss の弾塑性体に対して 2 種類の亜弾性でモデル化された材料の結果 [104] を比較する。一つは Cauchy 応力の Jaumann 速度で等方弾性を定義した場合であり，もう一つは Truesdell 応力速度を用いた場合である。まず Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて等方亜弾性を定義した場合には

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu\, d_{ij} + \lambda\, \delta_{ij} d_{kk} - \frac{\mu^2}{\mu + H}\frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2} d_{kl} + w_{ik}\, \sigma_{kj} + w_{jk}\, \sigma_{ki} \tag{12.207}$$

となる。一方，亜弾性に Truesdell 応力速度を用いた場合には

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= 2\mu\, d_{ij} + \lambda\, \delta_{ij} d_{kk} - \frac{\mu^2}{\mu + H}\frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2} d_{kl} \\ &\quad + \frac{\mu}{\mu + H}\sigma'_{ij} d_{kk} - \frac{\mu}{2(\mu + H)}\frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{lm}}{\overline{\sigma}^2}\left(v_{l,k}\sigma_{km} + v_{m,k}\sigma_{kl}\right) + v_{i,k}\, \sigma_{kj} + v_{j,k}\, \sigma_{ki} - \sigma_{ij}\, d_{kk}\end{aligned} \tag{12.208}$$



(a) Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合　　(b) Truesdell 応力速度を用いた場合

図 12.26 局所化発生応力と向き（塑性的平面ひずみ状態）

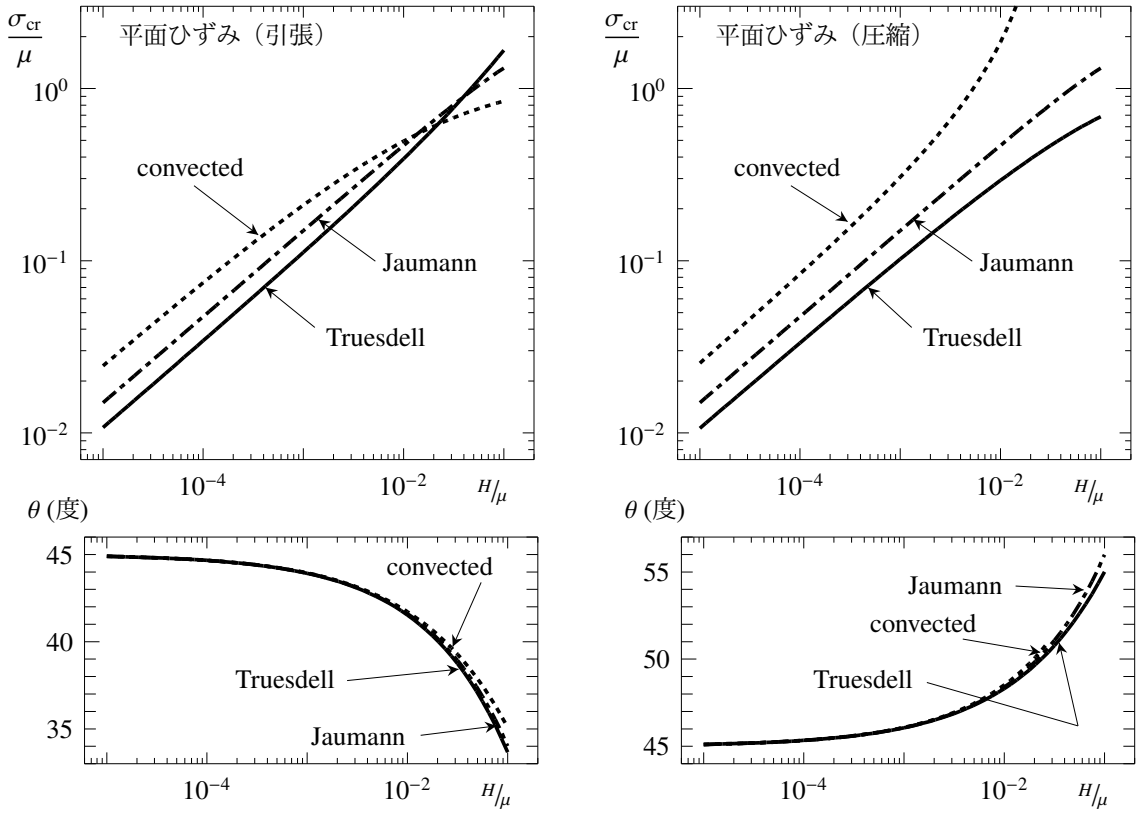
となる。両式の右辺第 4 項以降に応力速度による違いが含まれている。もちろん亜弾性部分の違いは塑性部分にも影響を及ぼしており，例えば式 (12.208) の右辺第 5 項は引張で見かけのせん断抵抗を弱める効果を持つことがわかる。

さて，式 (12.207) (12.208) を用いて式 (12.206) の局所化条件を満足する応力と硬化係数の関係を求めよう。ただし文献でも対象としているように，いわゆる「塑性的平面ひずみ」状態，つまり，式 (12.168) の流れ則を満足する塑性ひずみ増分の x_3 方向成分が零になる状態を対象とする。したがって応力状態は

$$d^{\mathrm{p}}_{33} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma'_{33} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

を満足しているものとする。この条件下で局所化が発生する可能性を図 12.26 に示した。引張試験を念頭に置いて，x_1 軸方向の応力 $\sigma_{11} = \sigma_0$ のみの 1 軸状態を対象とした。縦軸が局所化発生応力レベルであり，横軸はその局所変形帯の向きである。図からも明らかなように，一点鎖線と点線で表した負または零の硬化係数の（軟化）状態なら，任意の応力状態で局所化が発生する可能性があり，その局所変形帯の向きがこの図から求められる。一方，正の硬化係数の硬化状態（図中の実線）では，ある限定された向きに，ある特定の応力レベルでしか局所化が発生しないことがわかる。しかも，この図に示したような硬化係数のオーダーを持つ材料の場合には，その局所化発生応力はせん断弾性係数の一桁小さいくらいの非常に大きな応力レベルになっていて，現実的な予測ができていないことが明らかである。これはよく知られた結論であり，独立した局所変形が発生するのは材料が軟化したかなりあとになるとされている。しかもその前に周期的な変形の集中が生じるとされている。結局この二つの図を見比べる限りは弾性構成則に用いる応力速度の選択による差はそれほど大きくない。

正の硬化状態で発生する可能性のある局所化応力レベルと向きをまとめたのが図 12.27 である。比較のために convected 応力速度で弾性構成則を表した場合の結果も載せておいた。軟鋼のような零の硬化状態が存在する材料であれば，現実的な応力レベルで局所化が発生して，その帯の向きは載荷方向から 45 度方向だ。この角度は第 11.5.3 節の微小変形理論で予測された局所化の角度と一致する。しかし，ちょっとでも硬化がある場合の局所化発生応力レベルはとても大きくなる。その結果は，弾性を定義する構成則に用いる応力速度の選択で若干異なり， Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた材料モデルよりも Truesdell 応力速度を用いた方が比較的現実的な応力レベルにおける局所化を予測しているが，オーダー的にはそれほどの違いは無い。つまり，実験で観察される孤立した局所帯の発生をここで説明したような方法で予測することは困難であることを示してい



(a) 引張状態の局所化発生応力と向き　(b) 圧縮状態の局所化発生応力と向き

図 12.27 塑性的平面ひずみ状態で生じる局所化発生応力と向き

る。文献 [50]では第 12.5.4 (3) 節で概説した非共軸モデルを用いた場合の結果を示している。このモデルの弾塑性接線せん断剛性はかなり小さくできるので局所化発生応力レベルは現実的にはなるものの，本質的に持っている不安定な特性が局所化を誘発しているとも考えられる。

12.7 非線形挙動の数値的予測の例

12.7.1 updated Lagrange 的数値解析法

(1) 基礎方程式

多くの現実的な境界値問題に対しては数値的アプローチを使わざるを得ないだろう。そして非線形問題なので多くの研究者が繰り返し計算を必須としているようだが，ここでは敢えて単純な増分計算に基づく有限要素の定式化について簡単に説明しておく。基礎となる増分仮想仕事は式 (12.161) だが，これは現配置の Euler 記述ではなく updated Lagrange 記述である。各増分ステップにおける応力の更新は第 12.4.5 節で証明したように増分との単純な和

$$\sigma_{ij}(t+\Delta t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) \tag{12.209}$$

で算定できる。また updated Lagrange 記述をしているので物体の位置も増分毎に更新する必要があり，例えば有限要素の現配置における節点座標を $\boldsymbol{p}(t)$ とすると，各ステップ毎に

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t) + v_i(t) \tag{12.210}$$

で更新する必要がある。それを踏まえた有限要素による離散化を具体的に説明しておこう。

(2)　行列表記の増分内力仮想仕事項

コーディングのことを念頭に置いて各量を行列表記する。まず速度勾配ベクトルを行列表記で

$$\left\{\nabla v\right\} \equiv \lfloor \overset{1}{v_{1,1}} \quad \overset{2}{v_{2,2}} \quad \overset{3}{v_{3,3}} \quad \overset{4}{v_{3,2}} \quad \overset{5}{v_{2,3}} \quad \overset{6}{v_{1,3}} \quad \overset{7}{v_{3,1}} \quad \overset{8}{v_{2,1}} \quad \overset{9}{v_{1,2}} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{12.211}$$

の順番で定義することにする。そこで式 (12.161) の増分内力仮想仕事項における対応を念頭に置くと，nominal 応力速度ベクトルは

$$\left\{\dot{n}\right\} \equiv \lfloor \overset{1}{\dot{n}_{11}} \quad \overset{2}{\dot{n}_{22}} \quad \overset{3}{\dot{n}_{33}} \quad \overset{4}{\dot{n}_{23}} \quad \overset{5}{\dot{n}_{32}} \quad \overset{6}{\dot{n}_{31}} \quad \overset{7}{\dot{n}_{13}} \quad \overset{8}{\dot{n}_{12}} \quad \overset{9}{\dot{n}_{21}} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{12.212}$$

の順番で定義する必要がある。せん断成分の順番が，速度勾配のそれと逆になっていることに注意すること。これより増分内力仮想仕事項は

$$\delta U(t) \equiv \int_v \delta v_{i,j}\, \dot{n}_{ji}\, \mathrm{d}v = \int_v \delta\left\{\nabla v\right\}^{\mathrm{T}} \left\{\dot{n}\right\} \mathrm{d}v$$

と定義できる。積分領域の v は現配置の物体領域を表すので厳密には履歴の関数 $v(t)$ と記した方がいいが，ここは簡素化した。

速度勾配を，有限要素法の標準的手順で用いるような行列表記で速度と関係付けると

$$\left\{\nabla v\right\} = \left(\ S\ \right)\left\{v\right\}, \quad \left\{v\right\} \equiv \lfloor\ v_1 \quad v_2 \quad v_3\ \rfloor^{\mathrm{T}}, \tag{12.213a, b}$$

$$\left(\ S\ \right) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12.213c}$$

と表されるので，増分内力仮想仕事項は

$$\delta U(t) = \int_v \delta\left\{v\right\}^{\mathrm{T}} \left(\ S\ \right)^{\mathrm{T}} \left\{\dot{n}\right\} \mathrm{d}v$$

となる。また，任意の亜弾性構成則は，応力速度間の関係を用いれば形式的には

$$\dot{n}_{ij} = F_{ijkl}\, v_{k,l} \quad \rightarrow \quad \left\{\dot{n}\right\} = \left(\ F\ \right)\left\{\nabla v\right\} \tag{12.214}$$

と書くことができるので，結局，増分内力仮想仕事項は

$$\delta U(t) = \int_v \delta\left\{v\right\}^{\mathrm{T}} \left(\ S\ \right)^{\mathrm{T}} \left(\ F\ \right)\left(\ S\ \right)\left\{v\right\} \mathrm{d}v \tag{12.215}$$

と表される。一般的には $\boldsymbol{F}$ が応力の関数であることにも注意すること。

(3)　亜弾性の行列表記

応力増分:　まず Cauchy 応力増分ベクトルを

$$\left\{\dot{\sigma}\right\} \equiv \lfloor \overset{1}{\dot{\sigma}_{11}} \quad \overset{2}{\dot{\sigma}_{22}} \quad \overset{3}{\dot{\sigma}_{33}} \quad \overset{4}{\dot{\sigma}_{23}} \quad \overset{5}{\dot{\sigma}_{31}} \quad \overset{6}{\dot{\sigma}_{12}} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{12.216}$$

と定義して，応力増分と速度勾配の関係式を行列表示で

$$\left\{\dot{\sigma}\right\} = \left(\ G\ \right)\left\{\nabla v\right\} \tag{12.217}$$

と記す。速度勾配との関係式にしたことから $\left(\ G\ \right)$ は正方行列ではなく 6×9 の行列である。

Cauchy 応力の Jaumann 速度で定義した場合: 式 (12.151) のように Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて亜弾性を定義すると，応力増分は

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu\, d_{ij} + \lambda\, \delta_{ij}\, d_{kk} + w_{ik}\, \sigma_{kj} + w_{jk}\, \sigma_{ki}$$

と表される。したがって式 (12.217) の係数行列 $\Big(\ G\ \Big)$ は

$$\Big(\ G\ \Big) \equiv \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & \sigma_{13} & -\sigma_{13} & -\sigma_{12} & \sigma_{12} \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & -\sigma_{23} & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{12} & -\sigma_{12} \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & \sigma_{23} & -\sigma_{23} & -\sigma_{13} & \sigma_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{33}+\frac{1}{2}\sigma_{22} & \mu+\frac{1}{2}\sigma_{33}-\frac{1}{2}\sigma_{22} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{2}\sigma_{13} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{11}+\frac{1}{2}\sigma_{33} & \mu+\frac{1}{2}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\sigma_{33} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \frac{1}{2}\sigma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{22}+\frac{1}{2}\sigma_{11} & \mu+\frac{1}{2}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\sigma_{11} \end{pmatrix} \tag{12.218}$$

と定義される。初期状態（零応力状態）では通常の微小変形理論の Hooke の法則に一致する。

また，その構成則を nominal 応力速度で表すと

$$\dot{n}_{ij} = 2\mu\, d_{ij} + \lambda\, \delta_{ij}\, d_{kk} + \sigma_{ij}\, d_{kk} + w_{jk}\, \sigma_{ki} - d_{ik}\, \sigma_{kj}$$

となるので，行列表示した場合の式 (12.214) の係数 $\Big(\ F\ \Big)$ は

$$\Big(\ F\ \Big) \equiv \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda+\sigma_{11} & \lambda+\sigma_{11} & 0 & 0 & 0 & -\sigma_{13} & -\sigma_{12} & 0 \\ \lambda+\sigma_{22} & \lambda+2\mu & \lambda+\sigma_{22} & -\sigma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_{12} \\ \lambda+\sigma_{33} & \lambda+\sigma_{33} & \lambda+2\mu & 0 & -\sigma_{23} & -\sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{23} & 0 & \sigma_{23} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{33}+\frac{1}{2}\sigma_{22} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{33}-\frac{1}{2}\sigma_{22} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} \\ \sigma_{23} & \sigma_{23} & 0 & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{33}-\frac{1}{2}\sigma_{22} & \mu+\frac{1}{2}\sigma_{33}-\frac{1}{2}\sigma_{22} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{13} & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{11}+\frac{1}{2}\sigma_{33} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\sigma_{33} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \frac{1}{2}\sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{13} & \sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\sigma_{33} & \mu+\frac{1}{2}\sigma_{11}-\frac{1}{2}\sigma_{33} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{12} & \sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{13} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{22}+\frac{1}{2}\sigma_{11} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\sigma_{11} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \mu-\frac{1}{2}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\sigma_{11} & \mu+\frac{1}{2}\sigma_{22}-\frac{1}{2}\sigma_{11} \end{pmatrix} \tag{12.219}$$

となり，これが 9×9 の非対称行列になることには注意すること。ただし，初期状態（零応力状態）では通常の微小変形理論の Hooke の法則に一致する。汎用プログラムの多くは Cauchy 応力の Jaumann 速度で定義した亜弾性構成則を用いていると思われるが，接線剛性行列は非対称になっているのだろうか。

Truesdell 応力速度で定義した場合: 式 (12.154) のように Truesdell 応力速度を用いて亜弾性を定義すると

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu\, d_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\, d_{kk} - \sigma_{ij}\, d_{kk} + v_{i,k}\,\sigma_{kj} + v_{j,k}\,\sigma_{ki}$$

となるので，行列表示した場合の式 (12.217) の係数 $\Big(\ G\ \Big)$ は

$$\Big(\ G\ \Big) \equiv \tag{12.220}$$

$$\begin{pmatrix}
\lambda+2\mu+\sigma_{11} & \lambda-\sigma_{11} & \lambda-\sigma_{11} & 0 & 0 & 2\sigma_{13} & 0 & 0 & 2\sigma_{12} \\
\lambda-\sigma_{22} & \lambda+2\mu+\sigma_{22} & \lambda-\sigma_{22} & 0 & 2\sigma_{23} & 0 & 0 & 2\sigma_{12} & 0 \\
\lambda-\sigma_{33} & \lambda-\sigma_{33} & \lambda+2\mu+\sigma_{33} & 2\sigma_{23} & 0 & 0 & 2\sigma_{13} & 0 & 0 \\
-\sigma_{23} & 0 & 0 & \mu+\sigma_{22} & \mu+\sigma_{33} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 \\
0 & -\sigma_{13} & 0 & \sigma_{12} & 0 & \mu+\sigma_{33} & \mu+\sigma_{11} & 0 & \sigma_{23} \\
0 & 0 & -\sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 & \mu+\sigma_{11} & \mu+\sigma_{22}
\end{pmatrix}$$

で定義される。ただし，初期状態（零応力状態）では通常の微小変形理論の Hooke の法則に一致する。

最終的に nominal 応力速度で表した構成則は

$$\dot{n}_{ij} = \Big\{\mu\,\Big(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\Big) + \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \sigma_{li}\,\delta_{jk}\Big\}\, v_{k,l} = F_{ijkl}\, v_{k,l} \quad \rightarrow \quad F_{ijkl} = F_{lkji}$$

となり，(ij) と (lk) が可換であるから，ここで定義した順番の式 (12.214) の行列表示係数 $\Big(\ F\ \Big)$ は，次に示すような対称行列になる。

$$\Big(\ F\ \Big) \equiv \tag{12.221}$$

$$\begin{pmatrix}
\lambda+2\mu+\sigma_{11} & \lambda & \lambda & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{12} \\
\lambda & \lambda+2\mu+\sigma_{22} & \lambda & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 \\
\lambda & \lambda & \lambda+2\mu+\sigma_{33} & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sigma_{23} & \mu+\sigma_{22} & \mu & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 \\
0 & \sigma_{23} & 0 & \mu & \mu+\sigma_{33} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 \\
\sigma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+\sigma_{33} & \mu & 0 & \sigma_{23} \\
0 & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{12} & 0 & \mu & \mu+\sigma_{11} & 0 & 0 \\
0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \mu+\sigma_{11} & \mu \\
\sigma_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & \mu & \mu+\sigma_{22}
\end{pmatrix}$$

これも，初期状態（零応力状態）では通常の微小変形理論の Hooke の法則に一致する。ちなみに Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いた亜弾性式 (12.156) の場合も上式に対応する抵抗係数は対称行列になる。

この結論からは，現配置において速度勾配で表した接線的関係は，「瞬間（updated Lagrange）的には保存的」な弾性構成モデルになっていることがわかる。つまり，現配置の瞬間的弱形式が

$$\delta\Pi(t) \equiv \int_{v(t)} \delta\Big\{\nabla v\Big\}^{\mathrm{T}}\Big(\ F(t)\ \Big)\Big\{\nabla v\Big\}\,\mathrm{d}v - \int_{v(t)} \delta\Big\{v\Big\}^{\mathrm{T}}\Big\{\dot{\pi}\Big\}\rho\,\mathrm{d}v - \int_{s(t)} \delta\Big\{v\Big\}^{\mathrm{T}}\Big\{\dot{t}\Big\}\,\mathrm{d}s = 0$$

のように対称行列$\left(F \right)$を用いて定義できるので積分できて，対応する汎関数を

$$\Pi(t) \equiv \frac{1}{2}\int_{v(t)} \left\{ \nabla v \right\}^{\mathrm{T}} \left(F(t) \right) \left\{ \nabla v \right\} \mathrm{d}v - \int_{v(t)} \left\{ v \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \dot{\pi} \right\} \rho \, \mathrm{d}v - \int_{s(t)} \left\{ v \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \dot{t} \right\} \mathrm{d}s$$

のように定義できる。第 3 項の積分領域 $s(t)$ は現配置の表面領域である。第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた超弾性の updated Lagrange 記述の増分として Truesdell 応力速度を用いた亜弾性構成則が定義できていることから，もしかしたら当たり前の（力学分野では自明の）帰結なのかもしれない。逆に前述した Cauchy 応力の Jaumann 速度で亜弾性を定義した場合は，$\left(F \right)$が非対称なので $\delta\Pi$ は積分できない。ただし，どちらの場合も物体領域 $v(t)$ や表面 $s(t)$ は時々刻々変化する上に，係数行列にも現配置の応力が含まれていることから，構成則そのものは「非保存的」のままであり，増分仮想仕事も履歴方向には可積ではない。

(4) 標準的離散化

有限要素法による離散化では標準的手法を用いればいいだけなので，有限要素近似で用いる区分的多項式で適切に定義した試行関数を $N(x_1, x_2, x_3)$ とすると，速度の有限要素近似は

$$\left\{ v \right\} = \left(N(x_1, x_2, x_3) \right) \left\{ \dot{p} \right\} \tag{12.222}$$

となる。ここに$\left\{ \dot{p} \right\}$は節点速度（多項式の選択によって異なるが増分変位等）ベクトルである。式 (12.210) のように節点座標を時々刻々更新する必要があるので，ここでは定ひずみの四節点四面体要素を用いることにする。この近似によって応力増分は式 (12.213a) と式 (12.217) から

$$\left\{ \dot{\sigma} \right\} = \left(G \right) \left(S \right) \left(N \right) \left\{ \dot{p} \right\} = \left(G \right) \left(B \right) \left\{ \dot{p} \right\}, \quad \left(B \right) \equiv \left(S \right) \left(N \right) \tag{12.223a, b}$$

で計算でき，接線剛性行列は式 (12.215) の増分内力仮想仕事項から

$$\left(k \right) = \int_v \left(N \right)^{\mathrm{T}} \left(S \right)^{\mathrm{T}} \left(F \right) \left(S \right) \left(N \right) \mathrm{d}v = \int_v \left(B \right)^{\mathrm{T}} \left(F \right) \left(B \right) \mathrm{d}v \tag{12.224}$$

で算定できる。 Cauchy 応力の Jaumann 速度を亜弾性の定義に用いた場合の接線剛性行列は非対称だが， Truesdell 応力速度を用いた場合の行列は対称になる。一般には式 (12.223b) の$\left(B \right)$も多項式を含む行列になるのだが，更新 Lagrange 記述上の増分計算を念頭に置くと，節点座標を増分毎に更新する必要があるので，これは定数行列であることが望ましい。そうでない場合には，応力増分の算定を積分点等で解釈し直す等が必要になる。

分布外力増分と表面外力増分も標準的手順に沿って

$$\left\{ \dot{h} \right\} \equiv \int_v \left(N \right)^{\mathrm{T}} \left\{ \dot{\pi} \right\} \rho \, \mathrm{d}v, \quad \left\{ \dot{f} \right\} \equiv \int_s \left(N \right)^{\mathrm{T}} \left\{ \dot{t} \right\} \mathrm{d}s \tag{12.225a, b}$$

で離散定義すれば，増分仮想仕事式から増分（接線）剛性方程式は

$$\left(k \right) \left\{ \dot{p} \right\} = \left\{ \dot{h} \right\} + \left\{ \dot{f} \right\} \tag{12.226}$$

と表されるので，これを微小増分毎に時々刻々解いていけばいい。なお節点の座標値を$\left\{ p \right\}$と記すことにすると，増分解析する毎にその座標値を式 (12.210) のように

$$\left\{ p \right\}^{(t+\Delta t)} = \left\{ p \right\}^{(t)} + \left\{ \dot{p} \right\}^{(t)} \tag{12.227}$$

で更新する必要がある。同様に等価節点外力も

$$\left\{h\right\}^{(t+\Delta t)} = \left\{h\right\}^{(t)} + \left\{\dot{h}\right\}^{(t)}, \quad \left\{f\right\}^{(t+\Delta t)} = \left\{f\right\}^{(t)} + \left\{\dot{f}\right\}^{(t)} \tag{12.228a, b}$$

のように更新する。また各要素（積分点）の応力も， Cauchy 応力ベクトルも式 (12.209) のように

$$\left\{\sigma\right\} \equiv \lfloor \overset{1}{\sigma_{11}} \quad \overset{2}{\sigma_{22}} \quad \overset{3}{\sigma_{33}} \quad \overset{4}{\sigma_{23}} \quad \overset{5}{\sigma_{31}} \quad \overset{6}{\sigma_{12}} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{12.229}$$

と定義しておけば

$$\left\{\sigma\right\}^{(t+\Delta t)} = \left\{\sigma\right\}^{(t)} + \left\{\dot{\sigma}\right\}^{(t)} \tag{12.230}$$

で更新する。

(5) 弾塑性接線係数等の行列表記

相当応力と相当塑性ひずみ: Prandtle-Reuss モデルの有限要素化を簡単に説明しておく。まず偏差応力ベクトルの 6×1 縦ベクトルの場合を

$$\left\{\sigma'\right\} \equiv \lfloor \overset{1}{\sigma'_{11}} \quad \overset{2}{\sigma'_{22}} \quad \overset{3}{\sigma'_{33}} \quad \overset{4}{\sigma_{23}} \quad \overset{5}{\sigma_{31}} \quad \overset{6}{\sigma_{12}} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{12.231}$$

と定義して， 9×1 縦ベクトルの場合を

$$\left\{s\right\} \equiv \lfloor \overset{1}{\sigma'_{11}} \quad \overset{2}{\sigma'_{22}} \quad \overset{3}{\sigma'_{33}} \quad \overset{4}{\sigma_{23}} \quad \overset{5}{\sigma_{23}} \quad \overset{6}{\sigma_{13}} \quad \overset{7}{\sigma_{13}} \quad \overset{8}{\sigma_{12}} \quad \overset{9}{\sigma_{12}} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{12.232}$$

と定義しておく。すると，それぞれ応力ベクトルとは

$$\left\{\sigma'\right\} = \left(\ R\ \right)\left\{\sigma\right\} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{\sigma\right\} \tag{12.233}$$

および

$$\left\{s\right\} = \left(\ T\ \right)\left\{\sigma\right\} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{\sigma\right\} \tag{12.234}$$

という関係になる。このベクトルを用いれば，相当応力（の 2 乗）は

$$\overline{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \frac{1}{2}\left\{s\right\}^{\mathrm{T}}\left\{s\right\} \tag{12.235}$$

と表すことができる。また相当塑性ひずみは，定義式 (12.167b) の物質微分の

$$\dot{\overline{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \equiv \sqrt{2\,d^{\mathrm{p}}_{ij}\,d^{\mathrm{p}}_{ij}} = \frac{1}{2H\overline{\sigma}}\sigma'_{kl}\dot{\sigma}_{kl} = \frac{1}{2H\overline{\sigma}}\sigma'_{kl}\dot{\sigma}'_{kl} = \frac{1}{2H\overline{\sigma}}\left\{s\right\}^{\mathrm{T}}\left\{\dot{s}\right\} \tag{12.236}$$

で算定した増分を累積させて計算すればいい。右辺の内積は，理論的には載荷状態の間は正になるはずである。偏差応力増分も，上の行列を用いて

$$\left\{\dot{s}\right\} = \left(\ T\ \right)\left\{\dot{\sigma}\right\} = \left(\ T\ \right)\left(\ G\ \right)\left(\ S\ \right)\left(\ N\ \right)\left\{\dot{p}\right\} = \left(\ T\ \right)\left(\ G\ \right)\left(\ B\ \right)\left\{\dot{p}\right\} \tag{12.237}$$

で算定できる。$\left(\ B\ \right)$ が定数行列ではない場合には，偏差応力増分の算定を積分点等で解釈し直す必要が生じる。硬化係数 H が定数の場合のせん断降伏応力 τ_{Y} は $\tau_{\mathrm{Y}} = \tau_{\mathrm{Y}}^{0} + H\,\overline{\epsilon}^{\mathrm{p}}$ で与えられる。

弾塑性接線係数等: 塑性変形を伴う場合の応力増分は

$$\left\{\dot{\sigma}\right\} = \left(\left(\ G\ \right) - \left(\ G^{\mathrm{p}}\ \right)\right)\left\{\nabla v\right\} \tag{12.238}$$

と関係付けられる。ここに行列 $\left(\ G^{\mathrm{p}}\ \right)$ が塑性による影響である。また nominal 応力速度で表した構成則も

$$\left\{\dot{n}\right\} = \left(\left(\ F\ \right) - \left(\ F^{\mathrm{p}}\ \right)\right)\left\{\nabla v\right\} \tag{12.239}$$

と表される。ここに行列 $\left(\ F^{\mathrm{p}}\ \right)$ が塑性による影響である。

Cauchy 応力の Jaumann 速度で亜弾性を定義した場合: この場合の応力増分で表した構成則は

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu\, d_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\, d_{kk} + w_{ik}\,\sigma_{kj} + w_{jk}\,\sigma_{ki} - \frac{\mu^2}{\mu + H}\frac{\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2}\, d_{kl}$$

となるので，式 (12.238) の行列 $\left(\ G^{\mathrm{p}}\ \right)$ は

$$\left(\ G^{\mathrm{p}}\ \right) \equiv \frac{\mu^2}{(\mu + H)\,\overline{\sigma}^2}\left\{\sigma'\right\}\left\{s\right\}^{\mathrm{T}} \tag{12.240}$$

で定義できる。また nominal 応力速度で表した構成則も同様に

$$\dot{n}_{ij} = 2\mu\, d_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\, d_{kk} + \sigma_{ij}\, d_{kk} + w_{jk}\,\sigma_{ki} - d_{ik}\,\sigma_{kj} - \frac{\mu^2}{\mu + H}\frac{\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2}\, d_{kl}$$

となるので，式 (12.239) の行列 $\left(\ F^{\mathrm{p}}\ \right)$ は

$$\left(\ F^{\mathrm{p}}\ \right) \equiv \frac{\mu^2}{(\mu + H)\,\overline{\sigma}^2}\left\{s\right\}\left\{s\right\}^{\mathrm{T}} \tag{12.241}$$

で定義できる。

Truesdell 応力速度で亜弾性を定義した場合: まず 1×9 の横ベクトル

$$\left\lfloor P \right\rfloor \equiv \left\lfloor \overset{1}{1}\ \ \overset{2}{1}\ \ \overset{3}{1}\ \ \overset{4}{0}\ \ \overset{5}{0}\ \ \overset{6}{0}\ \ \overset{7}{0}\ \ \overset{8}{0}\ \ \overset{9}{0} \right\rfloor \tag{12.242}$$

と，同様の横ベクトル

$$\left\lfloor Q \right\rfloor \equiv \left\lfloor \overset{1}{Q_1}\ \ \overset{2}{Q_2}\ \ \overset{3}{Q_3}\ \ \overset{4}{Q_4}\ \ \overset{5}{Q_5}\ \ \overset{6}{Q_6}\ \ \overset{7}{Q_7}\ \ \overset{8}{Q_8}\ \ \overset{9}{Q_9} \right\rfloor \tag{12.243}$$

の二つを定義しておく。ここに

$$Q_1 \equiv \sigma_{11}\,\sigma'_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2, \quad Q_2 \equiv \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\,\sigma'_{22} + \sigma_{23}^2, \quad Q_3 \equiv \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\,\sigma'_{33}, \tag{12.244a, b, c}$$

$$Q_4 \equiv \sigma_{12}\,\sigma_{13} + \sigma_{23}\,\sigma_{22} + \sigma_{23}\,\sigma'_{33}, \quad Q_5 \equiv \sigma_{12}\,\sigma_{13} + \sigma_{23}\,\sigma'_{22} + \sigma_{23}\,\sigma_{33}, \tag{12.244d, e}$$

$$Q_6 \equiv \sigma_{13}\,\sigma'_{11} + \sigma_{12}\,\sigma_{23} + \sigma_{13}\,\sigma_{33}, \quad Q_7 \equiv \sigma_{13}\,\sigma_{11} + \sigma_{12}\,\sigma_{23} + \sigma_{13}\,\sigma'_{33}, \tag{12.244f, g}$$

$$Q_8 \equiv \sigma_{12}\,\sigma_{11} + \sigma_{12}\,\sigma'_{22} + \sigma_{13}\,\sigma_{23}, \quad Q_9 \equiv \sigma_{12}\,\sigma'_{11} + \sigma_{12}\,\sigma_{22} + \sigma_{13}\,\sigma_{23} \tag{12.244h, i}$$

と定義した。この場合の応力増分で表した構成則は

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= 2\mu\, d_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\, d_{kk} - \sigma_{ij}\, d_{kk} + v_{i,k}\,\sigma_{kj} + v_{j,k}\,\sigma_{ki} \\ &\quad - \frac{\mu^2}{\mu+H}\frac{\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2}\, d_{kl} - \frac{\mu}{2\,(\mu+H)}\frac{\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2}\,\left(v_{k,m}\,\sigma_{ml} + v_{l,m}\,\sigma_{mk}\right) + \frac{\mu}{\mu+H}\,\sigma'_{ij}\, d_{kk}\end{aligned}$$

となる。したがって式 (12.238) の行列 $\left(\ G^{\mathrm{p}}\ \right)$ は

$$\left(\ G^{\mathrm{p}}\ \right) \equiv \frac{\mu^2}{(\mu+H)\,\overline{\sigma}^2}\left\{\sigma'\right\}\left\{s\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{\mu}{(\mu+H)\,\overline{\sigma}^2}\left\{\sigma'\right\}\lfloor Q \rfloor - \frac{\mu}{\mu+H}\left\{\sigma'\right\}\lfloor P \rfloor \tag{12.245}$$

で定義できる。また nominal 応力速度で表した構成則は

$$\begin{aligned}\dot{n}_{ij} &= 2\mu\, d_{ij} + \lambda\, d_{kk} + \sigma_{ki}\, v_{j,k} \\ &\quad - \frac{\mu^2}{\mu+H}\frac{\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2}\, d_{kl} - \frac{\mu}{2\,(\mu+H)}\frac{\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl}}{\overline{\sigma}^2}\,\left(v_{k,m}\,\sigma_{ml} + v_{l,m}\,\sigma_{mk}\right) + \frac{\mu}{\mu+H}\,\sigma'_{ij}\, d_{kk}\end{aligned}$$

となるので，式 (12.239) の行列 $\left(\ F^{\mathrm{p}}\ \right)$ は

$$\left(\ F^{\mathrm{p}}\ \right) \equiv \frac{\mu^2}{(\mu+H)\,\overline{\sigma}^2}\left\{s\right\}\left\{s\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{\mu}{(\mu+H)\,\overline{\sigma}^2}\left\{s\right\}\lfloor Q \rfloor - \frac{\mu}{\mu+H}\left\{s\right\}\lfloor P \rfloor \tag{12.246}$$

で定義できる。興味深いのは，第 12.5.3 (4) 節で示したように Truesdell 応力速度を用いた場合には弾性接線係数が対称になるのに対し，塑性接線係数は逆に Cauchy 応力の Jaumann 速度用いた場合に対称になる[40]ことだ。

12.7.2 数値解析例 — 弾性体の 1 軸載荷

構成則の違いによる影響の可視化とコーディングの確認が目的なので架空の材料として非常に柔らかい材料を選んで，$E = 10\,\mathrm{MN/m^2}$, $\nu = 1/3$ としてみる。よって $C_0 \equiv \lambda + 2\mu = 15\,\mathrm{MN/m^2}$, $C_1 \equiv \lambda = 7.5\,\mathrm{MN/m^2}$, $\mu = 3.75\,\mathrm{MN/m^2}$ となる。解析対象は図 12.28 に示したような辺長が 1 m の立方体である。境界下面の節点はすべて x_2 方向に固定した上で，下面中央を x_1, x_3 方向に，点 A を x_1 方向に，点 B を x_3 方向に固定した。そして上面を x_2 方向に 1 m あるいは −0.5 m だけ強制変位させたときの応答を二種類の亜弾性モデルで求めて比較する。この境界条件の下では数値解析上も物体には一様変形しか生じないのでもっと少ない要素数でも十分なのだが，できるだけ 3 方向に対称性を持ち均質な変形をするような境界条件が与え易いように，35 節点 96 要素のデータを斉木功先生に作っていただいた。中央付近には細かい要素が自動生成されているが，一様な変形をそれが乱すことは無かった。なお，プログラムそのものも斉木功先生に作っていただいた微小変形理論のプログラムを元にして接線係数だけを変更したのだが，以下の例で用いる初期不整の無いデータも斉木功先生に作っていただいた。

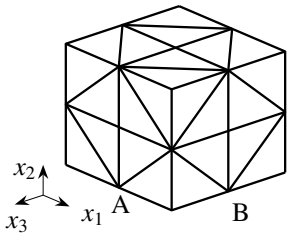


図 12.28 要素分割

[40] 弾性接線係数は初期応力が存在する材料の弾性係数なので対称であることは望ましいが，損失を伴う塑性接線係数が対称である必要は無いだろうと思うのだが。

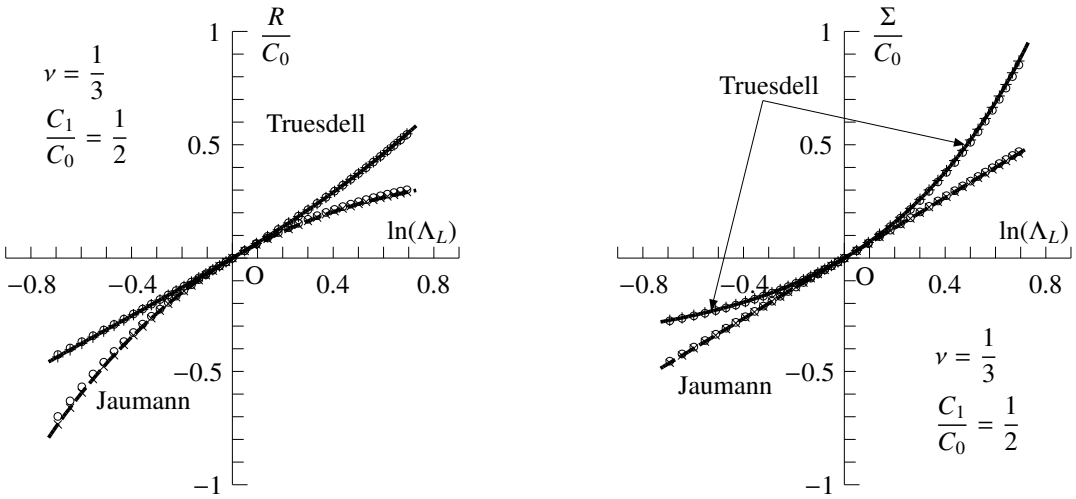


図 12.29 1 軸載荷状態の数値結果と解析解の比較 — 公称応力と真応力

数値結果を示した図 12.29 では解析解を示した図 12.21 と同じ軸を用いたが，実曲線が Truesdell 応力速度を用いて亜弾性を定義した場合の式 (12.154) による解析解であり，破曲線が Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合の式 (12.151) による解析解である。それは有限要素法の収束解がある積分点で満足すべき解であり，ここの載荷条件では有限要素解もそれに一致すべき解なので，それを参照解として必要な増分ステップ数について比較する。数値解の x_2 方向の公称直応力 R は上面（あるいは下面）の反力の総和から求め， x_2 方向の Cauchy 直応力 Σ は積分点で求められた値そのものを用いた。図中の○が最終状態までを 20 ステップで求めた数値解で， × と ＋が 20000 ステップで求めた数値解でこちらは解析解とほぼ重なっている。 $\Lambda_L = 0.5$ あるいは 2 の状態における公称応力の絶対値の解析解に対する相対誤差を表 12.1 に示した。倍や半分まで変形させるために，繰り返し計算を用いない 200 ステップ程度で十分な精度が得られることは興味深い。

表 12.1 公称応力 R の数値解析誤差

model-steps	$\Lambda_L = 0.5$	$\Lambda_L = 2.0$
Jaumann-20	-4.84×10^{-2}	$+3.80 \times 10^{-2}$
J-200	-5.01×10^{-3}	$+3.69 \times 10^{-3}$
J-2000	-5.02×10^{-4}	$+3.68 \times 10^{-4}$
J-20000	-5.03×10^{-5}	$+3.68 \times 10^{-5}$
Truesdell-20	-2.31×10^{-2}	-3.63×10^{-3}
T-200	-2.39×10^{-3}	-4.34×10^{-4}
T-2000	-2.40×10^{-4}	-4.41×10^{-5}
T-20000	-2.40×10^{-5}	-4.43×10^{-6}

12.7.3 構成則の違いによる代表的な例

(1) 弾性座屈解との比較

異なる亜弾性を用いれば当然接線剛性も違ってくるから数値解にも差異が生じるはずだ。どれが正しいのだろう。あるいはどちらがどういう特性を持っているのだろう。有限変形理論あるいは有限変位理論の範囲の境界値問題の解析解はそんなに多くはない。ただし「近似された連続体力学理論」としての構造力学理論の枠組の中の有限変位弾性理論解はいくつかある。そこで，接線剛性の特性が直接支配する弾性座屈問題を解析すれば，二種類の亜弾性の特性を明らかにすることができるかもしれないと考え，図 12.30 のような非常に短い柱（x_1 方向が柱の長さ方向）の座屈を 3 次元有限要素解析する。詳細は文献 [111] に記した。 Young 率と Poisson 比は

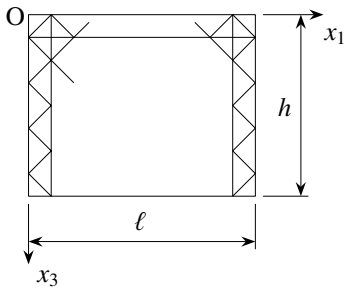


図 12.30 対象と要素分割

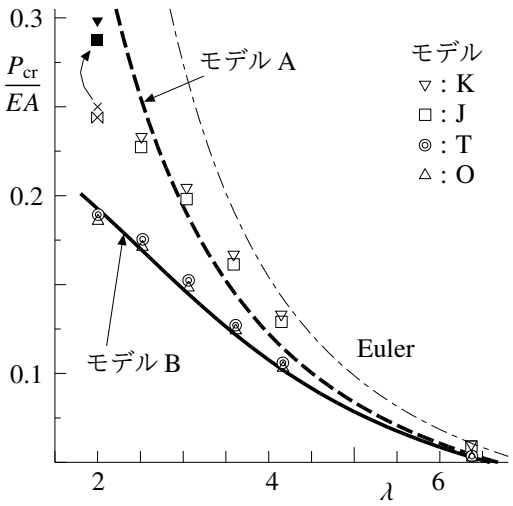


図 **12.31** 座屈荷重

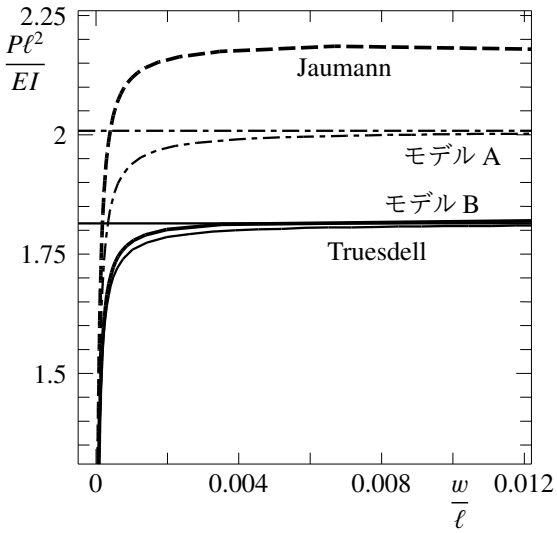


図 **12.32** 座屈後挙動

前節と同じとし，寸法は $h = 16\,\mathrm{cm}$ の長さ $\ell = 10 \sim 40\,\mathrm{cm}$ で x_2 方向の厚さ t は 5 mm とした。要素分割は $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ の場合， x_1 方向には 40 分割で x_3 方向には 32 分割として，厚さ方向にはところどころに板厚中心面に節点を置き， 3,985 節点・ 15,360 要素とした。分割数の影響は 1,034 節点・ 3,840 要素の粗い場合の解と比較して正確性を確認してある。片持ち梁をモデル化するために，境界条件は $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ の原点の節点は全方向固定し， $x_2 = 0$ にある節点はすべて x_2 方向に固定することによって弱軸回りの座屈と横倒れ座屈を抑制した。 $x_1 = 0, x_2 = t$ の節点は x_1 方向と x_3 方向を固定し，この節点と原点以外の $x_1 = 0$ にあるすべての節点は x_1 方向にも固定し， $x_1 = \ell$ の節点に x_1 の負方向に分布荷重を載せて圧縮し，総荷重を P と記す。Timoshenko 梁の解析解と数値解を求める際のせん断変形に関する補正係数 k_{T} は式 (A.7b) を用いた。数種類の荷重増分を試したあと十分小さい増分を用いて，接線係数行列 $\begin{pmatrix} F \end{pmatrix}$ を LU 分解したあとの対角項に負の要素が初めて現れるステップを「正値性の喪失」と捉え，そこを座屈発生状態と定義した。

図 12.31 に，数値的に求められた座屈荷重 P_{cr} と細長比 λ の関係と解析解を示した。座屈自体は座屈する瞬間の接線的力学特性だから，この図で用いている梁の断面積 A と断面 2 次モーメント I は数値解析上で正値性を失った瞬間の断面寸法で求めてある。ただ参照する座屈公式では梁の有限な縮み量を考慮してあるので，長さ ℓ には梁の元の長さを用いて結果を整理した。後述する 1 ケースを除き，柱は座屈点までは一様変形を保持していた。図中の J (□) と K (▽) はそれぞれ Cauchy 応力と Kirchhoff 応力の Jaumann 速度で亜弾性を定義した場合の座屈解であり， T (◎) と O (△) が Truesdell 応力速度と Oldroyd 応力速度を用いた場合だ。一点鎖線はせん断変形の影響を無視した Euler 座屈荷重である。実線が Timoshenko 梁の「モデル B」の式 (B.56) を，破線が「モデル A」の式 (B.59) の解をプロットしたものだが，前者が軸力とせん断力の直交性がせん断変形によって失われるモデルであり，後者はその直交性を近似的に保持させたモデルである。 Truesdell 応力速度あるいは Oldroyd 応力速度を用いた解は「モデル B」の実線とほぼ重なっているのに対し， Jaumann 速度を用いた二つの結果はほぼ「モデル A」の破線付近の解になっている。つまり Jaumann 速度を用いた亜弾性は他の二つの亜弾性よりもやや剛なせん断抵抗をモデル化したものになっていることがわかる。なお，図の $\lambda = 2$ 付近の極端に短い柱[41]に対する Jaumann 速度を用いた亜弾性の結果は，記号 ⋈ と × で示した外力レベルで一旦正値性を失ったが，そのあとすぐに正値に戻り，最後の記号 ■ および ▼ のレベルで再度正値性を失った。これはこの場合に限り柱が一様には変形できず，その非一様性による数値的な乱れが原因だと推測される。

[41] 長さ ℓ が h よりも小さいものを柱と呼べるかどうかはともかく，図の縦軸はほぼ柱の縮みなので座屈時には 25% も縮んでいることには注意が必要だ。

座屈点だけではなく有限変形挙動の違いを観るために，初期不整を導入した長さ $\ell = 20\,\mathrm{cm}$（図 12.31 で細長比 λ がほぼ 4）の柱の座屈後の非線形挙動を図 12.32 に示した。座屈後の挙動を安定的に追跡するために $x_1 = 0$ の節点の x_3 方向の変位も拘束した上で，長方形状の側面図が平行四辺形になるような初期不整を入れた。初期不整の詳細は文献 [111] を参照して欲しい。横軸の w は右端面中央 $x_1 = \ell$, $x_2 = 0$, $x_3 = h/2$ の x_3 方向の変位（たわみ）である。太い破線が Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた亜弾性モデルの結果であり，太い実線が Truesdell 応力速度を用いた場合の結果である。参照解の方は第 B.6.2 節で定式化した有限要素で求め，細い実線が「モデル B」の梁の座屈後挙動で一点鎖線が「モデル A」の挙動である。やはり Truesdell 応力速度を用いた亜弾性モデルの挙動は座屈後も「モデル B」のそれと非常によく似ているのに対し， Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた結果は「モデル A」よりもやや大きい荷重レベルにまで達してしまっているが，やはり座屈はしている。このように，接線剛性が非対称な場合であっても上述の「正値性の喪失」の時点でたわみが大きくなっているのがわかる。

この結果だけで判断するのは危険ではあるが，図 12.23 に示した単純せん断における振動特性も踏まえて，著者は次のように [111][42] 考えている。

- Kirchhoff 応力の Jaumann 速度と Truesdell 応力速度を用いた亜弾性の場合は接線係数行列 $\begin{pmatrix} F \end{pmatrix}$ が対称になることから，どちらかと言えばこの二つを選択した方が， Cauchy 応力の Jaumann 速度や Oldroyd 応力速度を用いるモデルよりも超弾性に半歩くらい近い。
- せん断変形の扱い方が異なる二つのモデルによる座屈解との比較から， Jaumann 速度は比較的せん断抵抗が大きい材料，例えば単結晶金属等のモデル化に適している。実際 Asaro は Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いて非常に美しい亜弾塑性構成モデル [3, 5] を構築している。
- 大きな変形状態で，例えば第 2 Piola-Kirchhoff 応力の初期に直交していた 2 方向成分がせん断変形の影響で歪むくらいせん断抵抗が小さい材料には， Truesdell 応力速度を用いるのが望ましい。

(2) 基本的な材料試験の弾塑性シミュレーション

基本的なモデルを用いて変形の局所化にも関連するような弾塑性変形挙動[43] をいくつか数値解析[44] する。比較する亜弾性モデルは Truesdell 応力速度を用いたものと Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いたものの 2 種類である。ここでも繰り返し無しの単純な増分解析をするので，一つ前の増分ステップ時に載荷と除荷を判定している。対象は図 12.30 と同様の領域で

ほぼ正方形: $h = 16\,\mathrm{cm}$ を 16 分割し $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ を 20 分割した上で，厚さ $t = 1\,\mathrm{cm}$ 方向にはところどころに板厚中心面に節点を置いた 1,034 節点・ 3,840 要素。以下これを「四角板」と呼ぶ。

長方形: 上の「四角板」を半分にしたもので， $h = 8\,\mathrm{cm}$ を 32 分割し $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ を 40 分割した上で，厚さを半分にした $t = 5\,\mathrm{mm}$ 方向にはところどころに板厚中心面に節点を置いた 2,034 節点・ 7,680 要素。以下これを「細長板」と呼ぶ。

とした。この節の解析例の基本的な材料定数は鋼を念頭に置いて $E = 200\,\mathrm{GN/m^2}$, $\nu = 1/3$ とし，初期せん断降伏応力は $\tau_Y = 140\,\mathrm{MN/m^2}$ で硬化係数を $H = 0.25\,\mathrm{MN/m^2}$ とした。硬化係数が一般に用いられている値よりもかなり小さいのは変形の非一様化を促すためである。硬化係数の影響については少しだけ後述する。

[42] 第 1 著者の卒業論文・修士論文・ PhD 論文を通して持った長年の疑問を解決するための「辞職論文」を投稿したものだ。

[43] ポストプロセスでは研究室所有の Femap （Copyright © 2012 Siemens Product Lifecycle Management Software Inc., Version 10.3.1 日本語版）を利用した。

[44] これ以下は 2017 年 2 月までの 1 年間に「辞職論文」に発表した解析と併行して実行した基礎的な数値解析結果なので論文公表をしていない。したがって結果の検証が不十分なことには注意して欲しい。ちょっと疲労ぎみなのでご容赦願いたい。

板の左右端 $x_1 = 0$ と $x_1 = \ell$ の境界条件は前節と同じに[45]したが，作用は外力ではなく強制変位で与えた。$x_2 = 0$ と $x_2 = t$ の境界条件は

ほぼ平面ひずみ: この両面の x_2 方向の変位を拘束した。板厚中心面にある節点の変位は自由にしたため「ほぼ」と書いたが，以下「平面ひずみ」状態と呼ぶ。

ほぼ平面応力: この両面のすべての変位を自由にした。まず平面応力状態は実際の実験では厳密には実現できないことに注意して「ほぼ」と書いたが，実際の引張試験の平滑板の状況と同じである。以下の数値解析結果では，変形がほぼ一様な状態では $|\sigma_{22}|$ は $|\sigma_{11}|$ の 10^{-6} より小さかった。本質的には 3 次元状態にあるが，以下「平面応力」状態と呼ぶ。

の 2 種類とした。さらに，変形が非一様化することを促すための初期不整として

右端面の隅一箇所の板厚を薄く: $x_1 = \ell$ で $x_2 = t, x_3 = h$ に配置した節点とその x_1 方向の隣の節点の x_2 座標を 20% 小さくして，板厚を薄くした。以下「片側」初期不整と略記する。

右端面の両隅の板厚を薄く: 「片側」初期不整の設定に加えて， $x_1 = \ell$ で $x_2 = t, x_3 = 0$ に配置した節点とその x_1 方向の隣の節点の x_2 座標も 20% 小さくした。以下「両側」初期不整と略記する。

右端面隅と中央の対角配置箇所の板厚を薄く: 「片側」初期不整の設定に加えて， $x_1 = \ell/2$ で $x_2 = t, x_3 = 0$ に配置した節点とその x_1 の負方向の隣の節点の x_2 座標も 20% 小さくした。以下「対角」初期不整と略記する。

の 3 種類を与えた場合も解析して結果を比較検討する。

状態を区別して変形履歴を図化するためだけに用いた公称応力 σ_{N} と工学（伸び）ひずみ ϵ は

$$\sigma_{\mathrm{N}} \equiv \frac{P}{ht}, \quad \epsilon \equiv \frac{U}{\ell} \tag{12.247a, b}$$

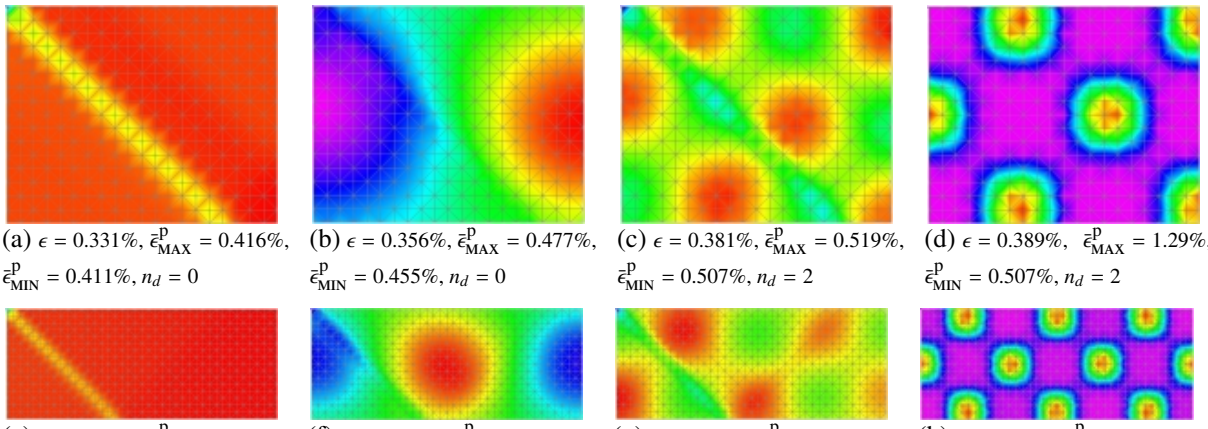
で定義した。ここに P は右端表面の全節点の x_1 の負方向の反力の合計で， U は右端表面 $x_1 = \ell$ にある全節点に与える x_1 方向の強制変位である。また，接線剛性行列の LU 分解後の対角項に現れる負の要素の数を n_d で表す。変形図は対象の実寸比の形状で，コンター図には相当（累積）塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}$ を

最小 最大

のような色のグラデーション[46]で表示する。コンター図等の描画設定はすべてポストプロセサのデフォルトままである。以下，特に断らない限り Truesdell 応力速度を用いた亜弾性モデルによる結果である。

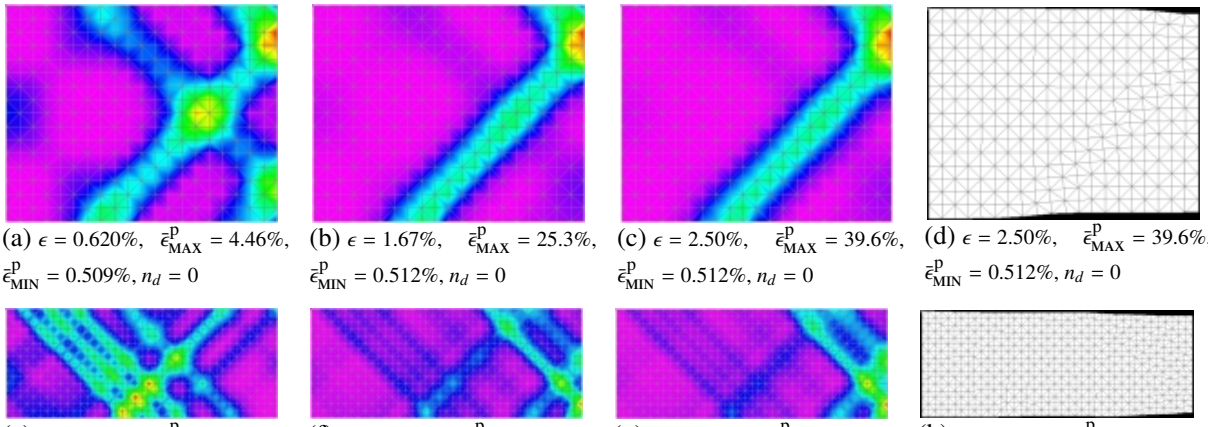
平面ひずみ状態の引張: 初期不整の無いまっすぐな板の右端面の節点を x_1 方向に変位させる。公称応力のピーク前後の変形状態を図 12.33 に示したが，この $\epsilon = 0.4\%$ 程度では一瞬境界から生じた応力集中が観察されるが，そのあと $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}$ の最大値と最小値がせいぜい 2 倍程度の周期的変形が生じる。その周期は板の小さい方の寸法つまり h に支配され，境界値問題の設定によってその周期が決まることを示している。しかもその周期は全体の変形に伴って徐々に変化する。このピーク前後では接線剛性行列の対角項に負の要素が発生し，その個数 n_d の変化が変形パターンの周期の変化に対応している。多分複数の分岐経路が存在するのだろうがその追跡は試みていない。ただ，さらに変形が大きくなると接線剛性行列の対角項はすべて正に戻る。

[45] $x_1 = 0, x_3 = h/2$ を全方向固定にしなかったのは， x_3 方向の非対称性に初期不整の効果を持たせるためである。
[46] 基本的な 12 色相環の順番「赤·橙·黄橙·黄·黄緑·緑·青緑·緑青·青·青紫·紫·赤紫」であるが，この文書では最小側を「紫」と呼ぶ。



(a) $\epsilon = 0.331\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.416\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.411\%$, $n_d = 0$
(b) $\epsilon = 0.356\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.477\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.455\%$, $n_d = 0$
(c) $\epsilon = 0.381\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.519\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.507\%$, $n_d = 2$
(d) $\epsilon = 0.389\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 1.29\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.507\%$, $n_d = 2$
(e) $\epsilon = 0.306\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.367\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.362\%$, $n_d = 0$
(f) $\epsilon = 0.356\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.472\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.457\%$, $n_d = 1$
(g) $\epsilon = 0.364\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.485\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.474\%$, $n_d = 2$
(h) $\epsilon = 0.389\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.718\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.510\%$, $n_d = 4$

図 12.33 平面ひずみ状態で公称応力のピーク前後



(a) $\epsilon = 0.620\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 4.46\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.509\%$, $n_d = 0$
(b) $\epsilon = 1.67\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 25.3\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.512\%$, $n_d = 0$
(c) $\epsilon = 2.50\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 39.6\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.512\%$, $n_d = 0$
(d) $\epsilon = 2.50\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 39.6\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.512\%$, $n_d = 0$
(e) $\epsilon = 0.795\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 6.20\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.532\%$, $n_d = 1$
(f) $\epsilon = 1.83\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 27.6\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.565\%$, $n_d = 0$
(g) $\epsilon = 2.50\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 40.0\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.565\%$, $n_d = 0$
(h) $\epsilon = 2.50\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 40.0\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.565\%$, $n_d = 0$

図 12.34 平面ひずみ状態で公称応力のピーク後

さらに大きな変形が生じた状態を図 12.34 に示したが，周期的変形が次第に消滅して引張方向から 45 度方向に伸びた変形集中帯が生じ始めてそれが発達する。これは周期的な大きな変形部分が発達して結合したものであり，いわゆる式 (12.206) で定義されるような支配方程式の楕円性の喪失といった微視的かつ孤立した局所変形ではないかもしれない。またその周期も増分ステップ毎に変化するが，ある程度変形が大きくなると接線剛性行列の対角項はすべて正に戻り，いくつかの巨視的な変形集中帯が孤立するような傾向を示す。最終的に $\epsilon = 2.5\%$ に達したあたりの黒背景のメッシュ図からわかるように， 45 度方向のせん断の変形集中帯の発達に起因する絞りが顕著になった。解析的な研究 [40] でも，ピーク前後に周期的な変形が先行したあとに式 (12.206) で定義された変形の局所化が生じると指摘されている。解析的研究の偉大さと重要さを再認識させる数値結果である。なお相当塑性ひずみが非常に大きな値になるのは用いた硬化係数 H が非常に小さいからである。

これに対し図 12.35 には亜弾性に Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた結果を示した。まず図 12.35 (f) に生じた変形の周期が，その直前の図 12.35 (e) や前述の Truesdell 応力速度を用いた図 12.33 (h) の周期と異なるのは興味深い。また四角板の場合， Truesdell 応力速度を用いた場合には接線剛性行列の対角項に現れる負の要素数 n_d が 1 ないし 2 であったのに対し， Jaumann 速度を用いた場合は 1 から 3 の間になっていた。また細長板では，前者の n_d が 1 から 4 の間であったのに対し，後者は 1 から 7 までにわたり， Jaumann 速度を用いた場合には比較的短い周期の応力分布も発生していることを示唆している。応力速度の違いだけがその原因だとは

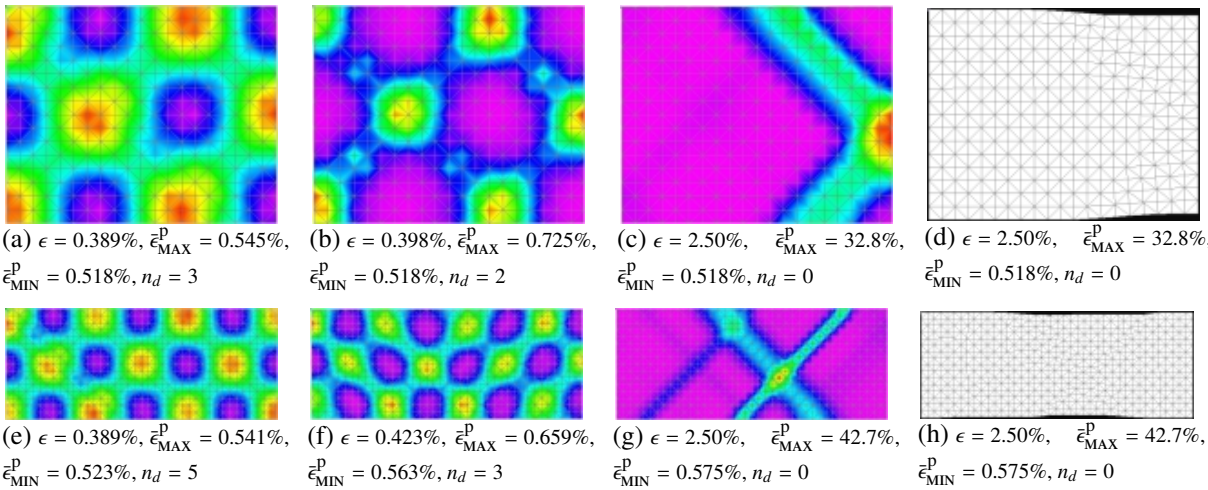
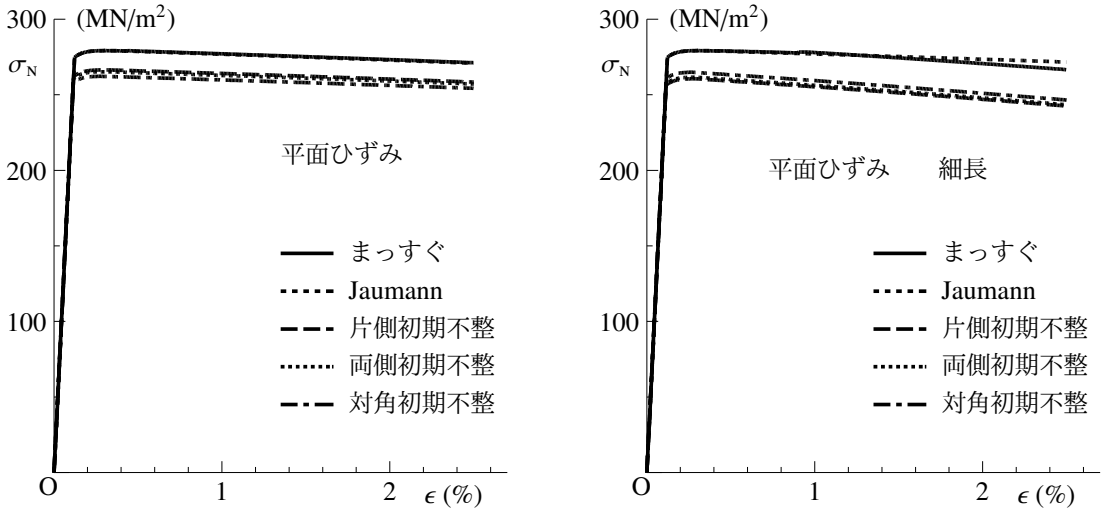


図 12.35 平面ひずみ状態で Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合

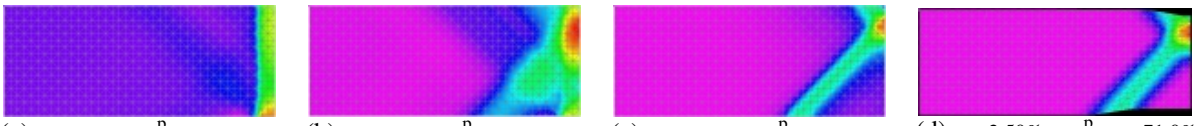


(a) 四角板の場合 (b) 細長板の場合

図 12.36 平面ひずみ状態の引張

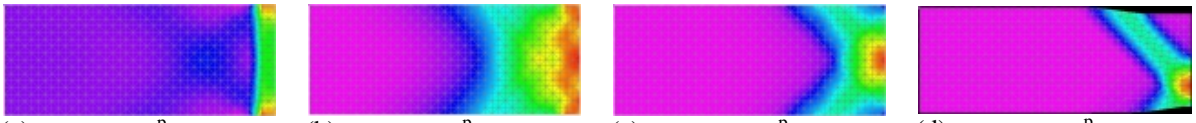
断定できないが，ここで対象とした領域の辺長比が整数でないことを念頭に置いて次のように推測してみた。前節までの比較の結果から Truesdell 応力速度を用いた構成則は比較的せん断抵抗が小さいので，周期が比較的長い変形パターンを辺長比が整数でない領域に無理やり埋め込むことができたのに対し，せん断抵抗が比較的剛になる Jaumann 速度を用いた材料中には短い周期パターンの変形も生じようとしたのではないだろうか。

公称応力と工学ひずみの関係図 12.36 から明らかなように，平面ひずみ状態では式 (11.170) の $\sigma_{\mathrm{Y}} = 2\tau_{\mathrm{Y}} = 280\,\mathrm{MN/m^2}$ で初期降伏が始まっている。また硬化係数をかなり小さくしたので巨視的な挙動には初期の硬化後のピークと軟化が現れているが，弾性座屈のような明確な分岐点は現れていない。特に細長板では $\epsilon = 1\%$ を越えたあたりから， Truesdell 応力速度を用いた場合と Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合との間の違いが顕著になる。まず Truesdell 応力速度を用いた場合の $\epsilon = 2\%$ の状態の図 12.34 (g) を見ると，変形集中帯が右端にしか現れていないが， Jaumann 速度を用いた図 12.35 (g) では変形集中帯が中央に位置している。そこでこの細長い領域を一種の x_1 方向の周期的対象に対するユニットセルだと解釈すると，前者は 2ℓ の周期で変形集中帯が現れているのに対し，後者は ℓ の周期で変形集中帯が現れていることになり，それがこの応力ひずみ関係の違いになったものとも推測される。ただし， Truesdell 応力速度を用いた場合の応答の方が常に柔らかくなるとは限らず，後述する平面応力状態の場合にはそれが逆転する。



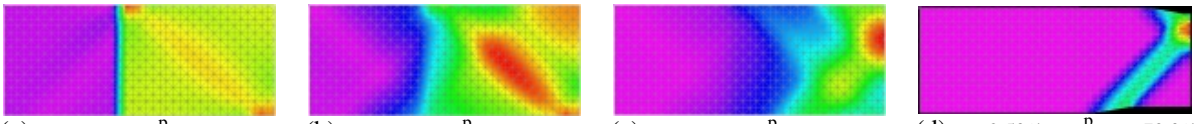
(a) $\epsilon = 0.164\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.110\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.0938\%$, $n_d = 0$ (b) $\epsilon = 0.248\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.292\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.254\%$, $n_d = 0$ (c) $\epsilon = 0.331\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 2.62\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.303\%$, $n_d = 0$ (d) $\epsilon = 2.50\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 71.0\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.303\%$, $n_d = 0$

図 12.37 初期不整がある場合：片側



(a) $\epsilon = 0.165\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.111\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.0938\%$, $n_d = 0$ (b) $\epsilon = 0.281\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.399\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.300\%$, $n_d = 0$ (c) $\epsilon = 0.373\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 2.24\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.300\%$, $n_d = 1$ (d) $\epsilon = 2.50\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 59.8\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.300\%$, $n_d = 0$

図 12.38 初期不整がある場合：両側



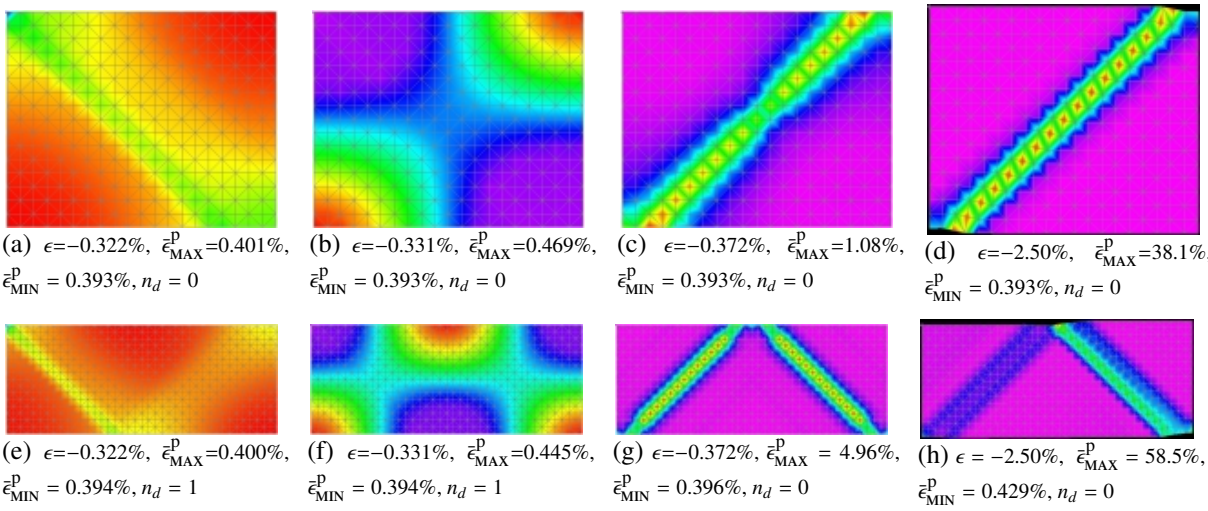
(a) $\epsilon = 0.141\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.0635%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.0465\%$, $n_d = 0$ (b) $\epsilon = 0.250\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.334\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.210\%$, $n_d = 0$ (c) $\epsilon = 0.291\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.788\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.214\%$, $n_d = 0$ (d) $\epsilon = 2.50\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 73.0\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.214\%$, $n_d = 0$

図 12.39 初期不整がある場合：対角

図 12.36 には 3 種類の初期不整を与えた場合の応力ひずみ関係も示したが，どの初期不整の場合でも局所的な応力集中によって巨視的な初期降伏応力がまっすぐな場合よりも若干小さくなる。四角板では接線剛性行列の対角項には負の要素は発生しなかった。どの場合もまっすぐな板に現れる周期的な変形を経ないまま孤立した 45 度方向の変形集中帯が生じた。これは，変形の初期段階に現れる可能性がある周期構造を初期不整が抑制したためだと考えられる。これに対し細長板の変形パターンを図 12.37~12.39 に示した。両側に初期不整を与えた場合にのみピーク後の $\epsilon \simeq 0.4\%$ 前後に $n_d = 1$ になったものの，そこを除けば常に $n_d = 0$ だった。これは，両側初期不整は x_3 方向の対称性をまだ残しているので初期不整が無い状況にやや近くなり，そのため周期的な変形が少しだけ生じたからだと推測される。片側および対角に初期不整を与えた場合には接線剛性行列の対角項に負の値は発生しなかった。これは図 12.37, 12.39 にあるように周期的な変形が初期不整によって抑制されたからだと考えられる。最終的に $\epsilon = 2.5\%$ に達した状態の変形図は初期不整の無い場合とほぼ同様だ。ただ最終状態までに生じた相当塑性ひずみは，初期不整による変形の集中による累積の分だけかなり大きくなっている。

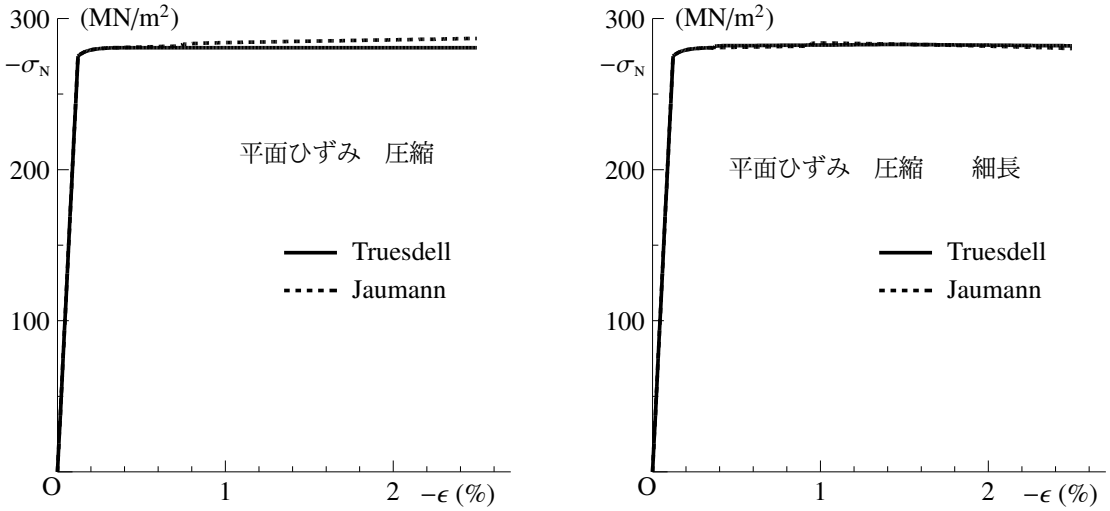
平面ひずみ状態の圧縮: 強制変位の向きを x_1 の負の方向に変更して圧縮する。この場合も図 12.40 に示したように小さい方の寸法 h で支配された周期構造が発生する。しかし引張とは異なり，異なる周期分布が次々に現れることは無かった。四角板では接線剛性行列の対角項はすべて正だが，細長板では周期分布状態で $n_d = 1$ になる状況が発生した。最終的に $\epsilon = 2.5\%$ の変形状態はそれぞれがほぼ同様になり，引張の場合と同様の明確な変形集中帯が発生し，それに伴う絞りも生じた。また図 12.41 に示したように引張の場合よりも巨視的軟化の程度は小さかった。

Jaumann 速度を用いた細長板の変形状態が図 12.40 だが，この場合はピーク付近で異なる周期モードが次々に発生したが，その振幅はそれほど大きくはない。また図 12.40 (g) と図 12.42 (d) の比較からわかるように，Jaumann 速度を用いた場合には短い周期パターンが現れる。これは接線剛性行列の対角項の負の個数 n_d が Truesdell 応力速度を用いた場合よりも多いことに対応していると考えられる。相当塑性ひずみは Truesdell 応力速度を用いた場合の方が大きいが，これはそのモデルの方がせん断抵抗が比較的小さいからだと推測される。同じ



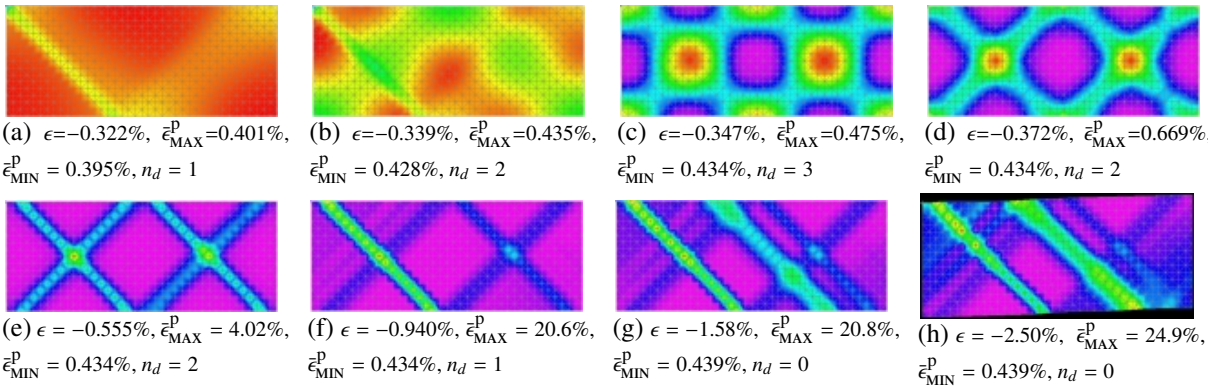
(a) ϵ=−0.322%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.401%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.393%, n_d = 0
(b) ϵ=−0.331%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.469%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.393%, n_d = 0
(c) ϵ=−0.372%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=1.08%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.393%, n_d = 0
(d) ϵ=−2.50%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=38.1%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.393%, n_d = 0
(e) ϵ=−0.322%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.400%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.394%, n_d = 1
(f) ϵ=−0.331%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.445%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.394%, n_d = 1
(g) ϵ=−0.372%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 4.96%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.396%, n_d = 0
(h) ϵ = −2.50%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 58.5%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.429%, n_d = 0

図 12.40 平面ひずみ状態の圧縮



(a) 四角板の場合　(b) 細長板の場合

図 12.41 平面ひずみ状態の圧縮

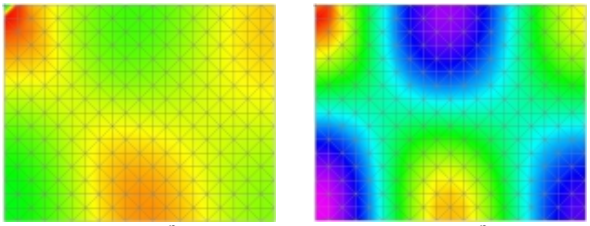


(a) ϵ=−0.322%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.401%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.395%, n_d = 1
(b) ϵ=−0.339%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.435%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.428%, n_d = 2
(c) ϵ=−0.347%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.475%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.434%, n_d = 3
(d) ϵ=−0.372%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.669%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.434%, n_d = 2
(e) ϵ = −0.555%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 4.02%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.434%, n_d = 2
(f) ϵ = −0.940%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 20.6%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.434%, n_d = 1
(g) ϵ = −1.58%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 20.8%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.439%, n_d = 0
(h) ϵ = −2.50%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 24.9%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.439%, n_d = 0

図 12.42 Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合の平面ひずみ状態の圧縮

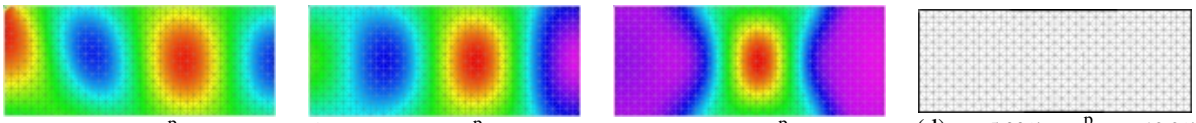
理由で，最終的に ϵ = 2.5% に至った状態では Jaumann 速度を用いた場合の方に短い周期パターンが複数現れている。これも用いる応力速度の違いだけが原因であると断定できないが，巨視的な挙動がほぼ同じであっても，構成モデルの違いによって微視的な変形パターン等には顕著な差異が生じることを示している。

平面応力状態の引張: 平滑板の引張試験をシミュレーションするために，平面応力状態で引張る。四角板の場合は図 12.43 に示したように $\epsilon = 5\%$ までには絞りも現れず，ほぼ一様な変形状態でやや周期性が見られる[47]だけである。これは Jaumann 速度を用いた場合もほとんど同じだった。そのあと，Truesdell 応力速度を用いた場合は $\epsilon = 15\%$ を越えたくらいから，また Jaumann 速度を用いた場合は $\epsilon = 20\%$ を越えたくらいからようやく変形の集中と絞りが生じ始める。しかし後述する細長板とは異なり x_3 方向にも振幅が非常に小さい周期性を持つだけでほぼ一様な状態を維持し，かなり大きな変形を与えないと絞りが発生しなかった。



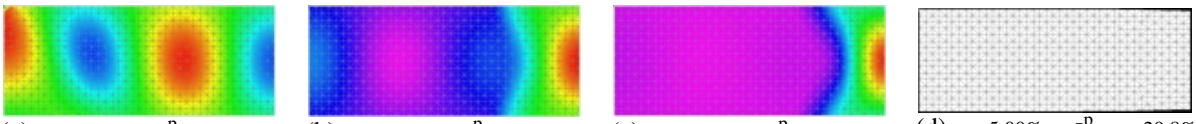
(a) $\epsilon = 2.33\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 3.80\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 3.79\%$, $n_d = 1$ (b) $\epsilon = 5.00\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 8.26\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 8.26\%$, $n_d = 1$

図 12.43 平面応力状態のまっすぐな四角板



(a) $\epsilon = 2.25\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 3.65\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 3.65\%$, $n_d = 2$ (b) $\epsilon = 4.25\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 7.39\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 6.68\%$, $n_d = 0$ (c) $\epsilon = 5.00\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 12.2\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 6.68\%$, $n_d = 0$ (d) $\epsilon = 5.00\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 12.2\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 6.68\%$, $n_d = 0$

図 12.44 Truesdell 応力速度を用いた場合の板状引張試験片の引張



(a) $\epsilon = 2.25\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 3.65\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 3.64\%$, $n_d = 2$ (b) $\epsilon = 4.25\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 8.36\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 6.65\%$, $n_d = 0$ (c) $\epsilon = 5.00\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 20.8\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 6.65\%$, $n_d = 0$ (d) $\epsilon = 5.00\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 20.8\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 6.65\%$, $n_d = 0$

図 12.45 Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合の板状引張試験片の引張

これに対し細長板の場合は図 12.44，12.45 に示したように周期的な変形が x_1 方向だけに顕著になり，$\epsilon = 5\%$ で変形の集中と絞りが顕著になった。ただ変形集中帯は発生せず，絞りはせん断変形によってではなく，ちょうど Poisson 効果による挙動のような滑らかな変形として現れている。図 12.46 に応力ひずみ関係を示したが，平面応力状態は 3 次元状態と同じなので，式 (11.28) の $\sigma_{\mathrm{Y}} = \sqrt{3}\,\tau_{\mathrm{Y}} = 242\,\mathrm{MN/m^2}$ で初期降伏する。また平面ひずみ状態とは異なり初期降伏時がピークになりその後はすぐに軟化する。また Truesdell 応力速度を用いた場合は $\epsilon = 5\%$ の段階で板中央部の変形が大きくなり，前述のようにユニットセル的捉え方をすると x_1 方向に ℓ の周期で大きな変形が発生している。一方 Jaumann 速度を用いた場合は板の右端の変形が大きくなり，これも前述のように捉えると x_1 方向の 2ℓ 周期で大きな変形が発生している。このため図 12.46 に示したように ϵ が 4% あたりから 2 種類の構成則による応答の間に若干の差が生じ，Truesdell 応力速度を用いた場合の方がやや剛な挙動をする。これは前述の平面ひずみ状態の場合とは逆である。

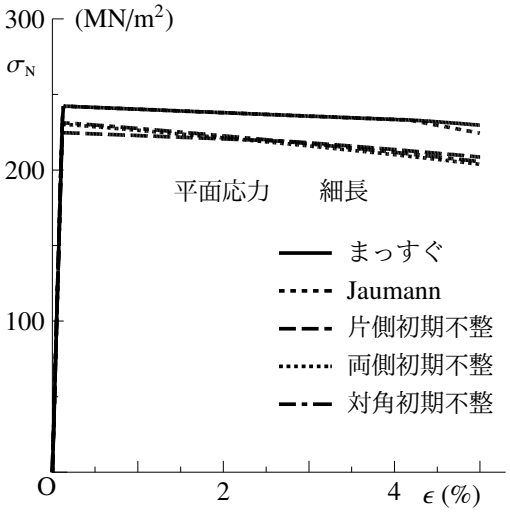
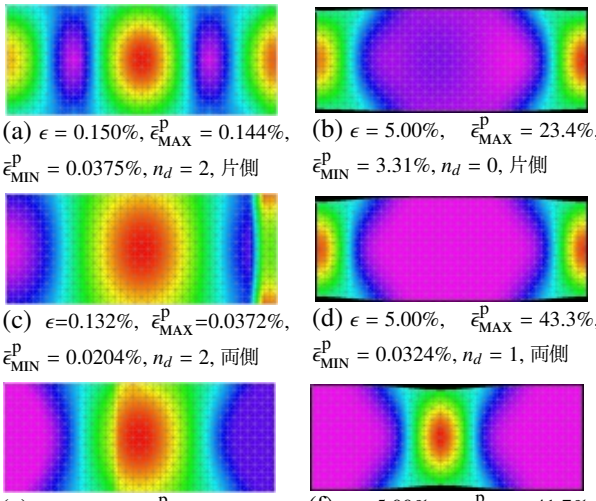


図 12.46 平面応力状態の細長板の引張

[47] ポストプロセサに騙されている可能性もあるが。

また図 12.47 からわかるように初期不整も結果にかなり影響を及ぼしている。まず図 12.47 の両側あるいは対角に初期不整がある場合には，片側だけの初期不整の場合よりも変形の集中度（最大値と最小値の差）が高くなっており，変形の発達の仕方が初期不整から大きな影響を受けている。ただ変形集中帯は観察されず，絞りは滑らかな変形として生じている。また初期不整の位置によっても変形パターンが異なる。ただし図 12.46 の巨視的な挙動にはその違いが顕著ではなかったことから，微視的な挙動と巨視的な挙動の両方に着目して数値解析を実行する必要性・重要性を示唆している。



(a) $\epsilon = 0.150\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 0.144\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.0375\%$, $n_d = 2$, 片側

(b) $\epsilon = 5.00\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 23.4\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 3.31\%$, $n_d = 0$, 片側

(c) ϵ=0.132%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.0372%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.0204\%$, $n_d = 2$, 両側

(d) $\epsilon = 5.00\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 43.3\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.0324\%$, $n_d = 1$, 両側

(e) ϵ=0.133%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.0893%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.00\%$, $n_d = 0$, 対角

(f) $\epsilon = 5.00\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 41.7\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.00\%$, $n_d = 0$, 対角

図 12.47 初期不整の影響

さて，図 12.44 (c) の $\epsilon = 5\%$ に達した状態では巨視的には $\sigma_{11} \simeq 240\,\mathrm{MN/m^2}$ の一軸応力状態にあるが，絞りによって断面が小さくなった箇所で x_3 方向の中央部では塑性ひずみつまりせん断変形が卓越していることから，実際の板状引張試験片ではそこの転位密度が高くなっていき，界面や結晶内部にはいろいろな欠陥がその中央部で比較的多く発生すると予想される。そこで図 12.48 には平均応力 σ_{AVE} を， $85\,\mathrm{MN/m^2}$ 以上を赤で， $75\,\mathrm{MN/m^2}$ 以下を紫でコンター図示したが，せん断変形が大きくなった中央の領域の平均応力も周辺に比べると比較的高くなっていることがわかる。したがって多数発生し始めた欠陥の成長や結合も生じ易く，ボイドも発生し始めている可能性も高いことが予想される。したがって延性破壊は試験片の x_3 方向の中央部から発生し始めると推測できる。

弾塑性解析では用いる亜弾性モデルの違いが原因で生じる差はほとんど無いと考えられている。しかし以上の数値結果は，履歴依存の弾塑性体の数値解析では初期不整やちょとした数値的な誤差によって，その変形パターンの現れ方や破断箇所等が用いる亜弾性によっても異なることを示している。ただし，巨視的な挙動にはそれほど顕著な差異は現れないことにも注意すべきだろう。つまり有限変形の枠組で数値解析する場合には，巨視的な挙動と微視的な挙動の両方について複数の構成則を用いて数値シミュレーションする必要性を示唆している。

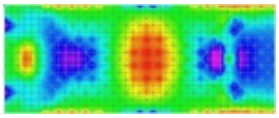


図 12.48 平均応力分布

(3) 平滑板の引張試験で現れる Lüders 帯は一体何?

膨張の無い特性曲線としての α, β すべり線の向き ϕ を求める Hill [39] の規準式 (11.188) は流れ則のみを考慮した不完全な基準ではあるが，それに前節で求められた数値解を代入してせん断帯の向きについて考察しておく。まず式 (11.188) を有限変形の枠組に拡張すると，例えば x_1-x_3 面では

$$d_{11}\,\cos^2\phi + 2d_{13}\,\sin\phi\,\cos\phi + d_{13}\,\sin^2\phi = 0, \quad d_{11}\,\sin^2\phi - 2d_{13}\,\sin\phi\,\cos\phi + d_{13}\,\cos^2\phi = 0 \qquad (12.248\mathrm{a,b})$$

と表される。孤立した局所変形が顕著になる載荷段階では弾性成分は塑性変形に比べて無視できて上式は

$$d^{\mathrm{p}}_{11}\,\cos^2\phi + 2d^{\mathrm{p}}_{13}\,\sin\phi\,\cos\phi + d^{\mathrm{p}}_{13}\,\sin^2\phi = 0, \quad d^{\mathrm{p}}_{11}\,\sin^2\phi - 2d^{\mathrm{p}}_{13}\,\sin\phi\,\cos\phi + d^{\mathrm{p}}_{13}\,\cos^2\phi = 0 \qquad (12.249\mathrm{a,b})$$

と近似できる。これに Prandtl-Reuss の流れ則の式 (12.168) を代入した

$$\sigma'_{11}\,\cos^2\phi + 2\sigma'_{13}\,\sin\phi\,\cos\phi + \sigma'_{33}\,\sin^2\phi = 0, \quad \sigma'_{11}\,\sin^2\phi - 2\sigma'_{13}\,\sin\phi\,\cos\phi + \sigma'_{33}\,\cos^2\phi = 0 \qquad (12.250\mathrm{a,b})$$

に数値解析で求められた応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を代入すれば， Prandtl-Reuss の流れ則以外の構成モデルの影響も少しは考慮できるかもしれない。そこで，平面ひずみ状態の引張の場合の数値解を上式 (12.248)~(12.250) に代入してその局所帯の向きを求めると，降伏直前には Hill の解と同様（数値解の 1.41 を $\sqrt{2}$ とみなした）

$$x_1\text{-}x_3 \text{ 面:} \quad \tan\phi \simeq \pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_1\text{-}x_2 \text{ 面:} \quad \tan\phi \simeq 0, \pm\infty \tag{12.251a, b}$$

だったものが変形に伴って変化していき，ほぼ一様な塑性状態の段階には

$$x_1\text{-}x_3 \text{ 面:} \quad \tan\phi \simeq \pm 1, \quad x_1\text{-}x_2 \text{ 面:} \quad \tan\phi = \text{種々の値} \tag{12.252a, b}$$

になった。つまり，少なくとも x_1-x_3 面上のすべり線は x_1 方向から ±45 度方向に伸びることがわかる。これは圧縮の場合も同様だった。したがって，平面ひずみ状態では x_1-x_3 面上で

- Hill の規準で求められる微視的な α, β すべり線の向きは x_1 方向から ±45 度方向である。
- 支配方程式の楕円性喪失という規準式 (12.206) による微視的なせん断帯の向きも，平面ひずみ状態においては図 12.27 に示したように硬化係数が小さい場合にはほぼ ±45 度方向である。
- 巨視的な応力場の最大せん断応力の向きとせん断帯の向きがほぼ同じになる。
- 本数値解析で観察される相当塑性ひずみの巨視的な集中帯もその ±45 度方向に発展した。

という結論を得る。そして Asaro [4] も示しているように，これに加えてさらに結晶格子の向きに依存した局所すべり面等[48]も同時に発生すると考えられる。ただ文献 [51] でこの Asaro のモデルを用いて得られた 2 次元状態のすべり線の向きも 44 度だった。

これに対し平面応力状態の引張の場合，つまり平滑板の引張試験に対する数値解の応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の値を用いると，降伏直前には x_1-x_3 および x_1-x_2 のどちらの面でも（数値解の 1.73 を $\sqrt{3}$ とみなした）

$$\tan\phi \simeq \pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \phi \simeq \pm 60\text{度}, \pm 30\text{度} \tag{12.253}$$

だったものが変形に伴って変化して，ほぼ一様な塑性状態の段階では（数値解の 1.41 を $\sqrt{2}$ とみなした）

$$\tan\phi \simeq \pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \phi \simeq \pm 54.7\text{度}, \pm 35.3\text{度} \tag{12.254}$$

になった。つまり，すべり線方向は Hill が求めた向き [39] と同じになる。一般に Lüders 帯の向き ϕ は 50 度前後であると認識されている。これは上式 (12.250) の Hill の解と整合している。しかし数値解析結果には巨視的な変形集中帯は観察されなかったのだ。ということは，鋼のような多結晶体の引張試験で観察される Lüders 帯の発生を予測するためには，例えば Asaro のモデル [4] のような結晶特性を 3 次元の構成則に導入しておく必要があるのかもしれない・・・のかな。

硬化係数の影響: 以上ではかなり小さい硬化係数を用いて考察した。これを 100 倍の $H = 25\,\mathrm{MN/m^2}$ にした場合，平面ひずみ状態の巨視的な公称応力-工学ひずみ関係はまだ軟化を示すが， $\epsilon = 2.5\%$ に至った段階でようやく図 12.33 (c) 程度の軽い周期性を持つ変形パターンしか生じない。また多くの研究で便宜的に用いられる Young 率の $1/1000$ 程度に当たる $H = 250\,\mathrm{MN/m^2}$ にすると，巨視的な公称応力-工学ひずみ関係は硬化を示しほとんど均一な変形しか生じない。一方平面応力状態の場合は， $H = 25\,\mathrm{MN/m^2}$ の場合は前節の $\epsilon = 2.5\%$ の状

[48] 結晶格子の特性としての稠密面であるすべり面や kink band・ coarse slip band (CSB)・ macroscopic slip band (MSB) 等があるが，著者はその区別を理解していない。

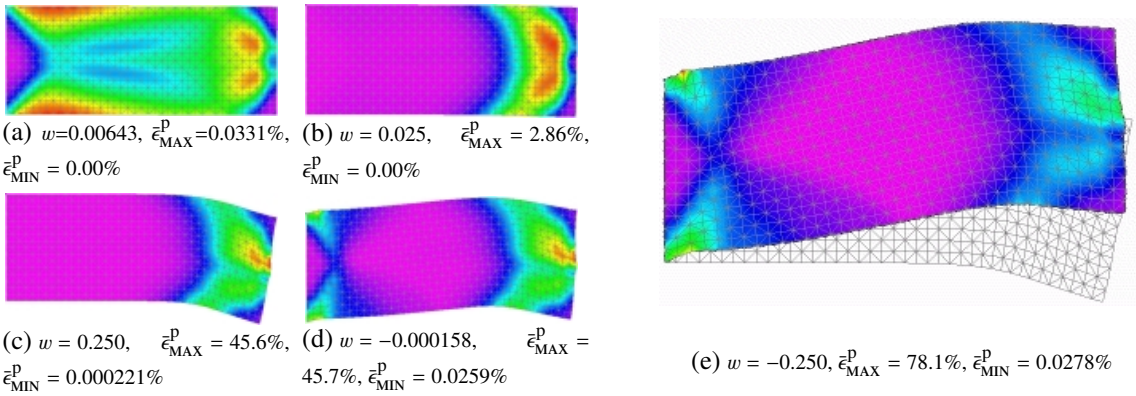


図 12.49 平面ひずみ状態の細長板の除荷と再載荷

態とほぼ同じような変形の集中が発生するが，$H = 250\,\mathrm{MN/m^2}$ にすると平面ひずみ状態の場合と同様ほとんど均一な変形しか生じない。これは図 12.27 からも明らかなように，硬化係数が大きくなると変形集中帯の発生応力レベルがかなり大きくなることとも整合する。じゃーぁ，なぜ鋼の引張試験片に Lüders 帯は発生するのだろう。構成則の問題か，さらなる 3 次元解析? が必要なのか・・・

(4) 逆向きの載荷で除荷を模擬する

片持ち梁のような，しかし非常に短い板の曲げをシミュレーションするために平面ひずみ状態の細長板の左端面の境界条件を変更し，すべての節点をすべての方向に固定する。そして，右端面の中央の 2 節点を強制的に x_3 方向に変位させることによって曲げるが，ある変形状態に至った時点で強制変位の向きを逆転させることによって除荷過程を含む応答を求める。結果の整理には平面ひずみ状態なので $\sigma_{\mathrm{Y}} = 2\,\tau_{\mathrm{Y}}$ として

$$w \equiv \frac{W}{h}, \quad p \equiv \frac{P}{P_{\mathrm{Y}}}, \quad P_{\mathrm{Y}} \equiv \frac{M_{\mathrm{Y}}}{\ell}, \quad M_{\mathrm{Y}} \equiv \frac{h^2 t}{6}\sigma_{\mathrm{Y}} \tag{12.255a, b, c, d}$$

の諸量を用いたが，W は右端表面中央 $x_1 = \ell$, $x_3 = h/2$ の $x_2 = 0, t$ にある 2 節点に与えた x_3 方向変位で，P はその 2 節点の x_3 の負方向の反力の合計である。

たわみが $w \simeq 0.0055$ くらいに達するまでは固定した左端側の上下面の応力 σ_{11} が大きくなって，そこがまず降伏するが，この図 12.49 (a) に至るあたりから載荷点に近い所にも大きなせん断変形が偏在し始める。実はその原因は小さい硬化係数なのだが，それについては後述する。その結果，それ以降は対象の右半分にのみ大きな塑性変形が集中して $w = 0.25$ に至る。そのあと逆向きに強制変位を与えるが，右半分に生じた大きな塑性変形は硬化のために元に戻るような変形は比較的小さく留まり，それに伴って，今度は対象の左半分の方に大きな塑性変形が拡がり始める。最終的に $w = -0.25$ に至った状態を $w = 0.25$ の状態と比較したのが図 12.49 (e) である。針金を思い切り曲げて塑性変形を導入（冷間加工）すると，どんなに頑張っても元のまっすぐな状態には戻せないことを再現したような数値結果になっている。図 12.50 には荷重変位関係を示した。正の曲げでは p が 1 に達するレベルまで高まるが，曲げが負方向に変わったあとは，それまで除荷していた左半分の領域の降伏が主に発達することから，逆向きの荷重 p は −1 に達する前に軟化を始めている。つまり，最初の載荷時に降伏した領域と再載荷時に降伏した

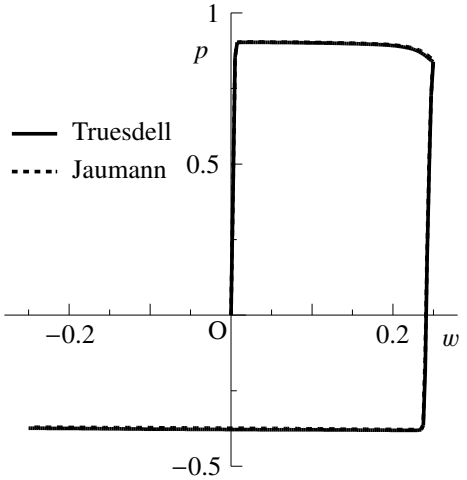


図 12.50 平面ひずみ状態の細長板の正負曲げ

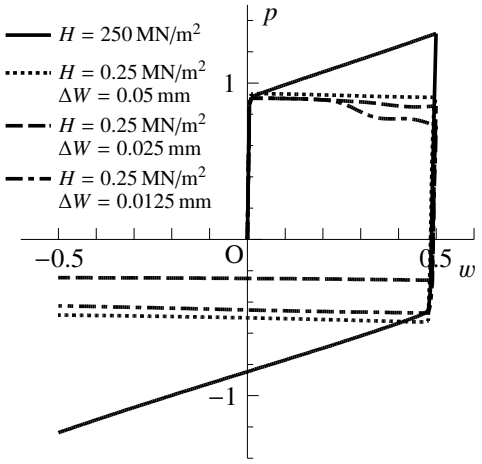
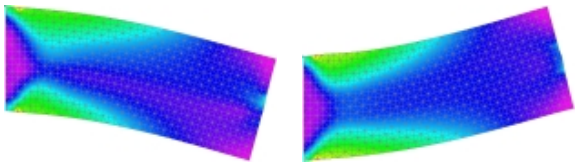
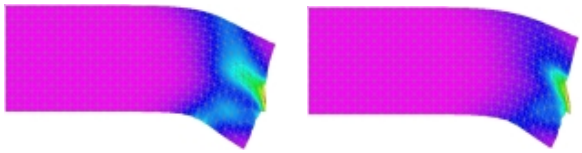


図 **12.51** 硬化係数と荷重変位関係



(a) w = 0.500, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 25.0%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.145% (b) w = −0.500, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 68.8%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.819%

図 **12.52** 大きい硬化係数 H = 250 MN/m^2



(a) ΔW = 0.025 mm, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 163%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.000648% (b) ΔW = 0.0125 mm, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$ = 230%, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$ = 0.000237%

図 **12.53** 小さい硬化係数 H = 0.25 MN/m^2; w = 0.5

領域とは異なっているわけだ。また用いる亜弾性の違いによる差異は顕著ではなく，接線剛性行列の対角項は常に正のままだった。

普通に板を曲げると固定している側に変形が集中するはずではないかと思った読者は少なくないのではないだろうか。著者も実はそうだった。そこで硬化係数を大きく H = 250 MN/m^2 としてさらに大きく曲げてみると，図 12.51 の実線のような抵抗を示し，確かに塑性変形も想像した通りの分布図 12.52 になるのだ。等方硬化モデルなのに曲げでは移動硬化のような巨視的挙動を示して[49]いるのは興味深い。このとき変位増分 ΔW は 0.05 mm 程度の増分で十分だった。そこで，これと同じ強制変位量を硬化係数の小さい前述のモデルに与えると，同じ図 12.51 に示したように，変位増分 ΔW の大きさによって異なる抵抗を示した。それに対応した塑性変形の分布を図 12.53 に示したが，相当塑性ひずみが非常に大きくなり，微視的には硬化材料であるにもかかわらず，変位増分を小さくすればするほど載荷位置周辺の要素だけに局所的な変形が集積している。構成則には速度依存性のような特性は含まれていないにもかかわらず軟化材料の数値解析で問題になるメッシュ依存性に似た増分依存性が生じている。これは一体?

(5) 3 次元挙動の例

斉木功先生のお陰でようやく 3 次元挙動の数値解析プログラムができたので，薄板の横倒れ挙動を計算した。対象の左端の境界条件は前節の板曲げ問題と同じ片持ち状にしたが，こちらは平面応力状態と同じ境界条件にした上で，右端中央の $x_1 = \ell$, $x_2 = t$, $x_3 = h/2$ の 1 点のみを x_3 方向に強制変位させて，この板が x_1-x_3 面外に倒れてねじれながら曲がる（横倒れる）挙動を調べた。ただし x_2 方向の要素はせいぜい 2 分割になっているため，2 軸曲げや曲げねじり・そり変位の影響は十分には考慮されておらず，剛な結果になっているはずなので注意して欲しい。与える x_3 方向の強制変位量を W とし，そこの x_3 の負方向の反力を P とした上で，式 (12.255) の定義を用いて結果を整理する。ただし 3 次元状態なので $\sigma_{\mathrm{Y}} = \sqrt{3}\tau_{\mathrm{Y}}$ を用いている。載荷位置が $x_2 = t/2$ の x_1-x_3 肉厚中心面に対して対称ではないことが実質的な初期不整になっているため，いわゆる分岐座屈のようなことは起きない。

[49] ひょっとするとプログラムにバグ有りか? 一軸載荷の単純な除荷・再載荷では等方硬化挙動を確認してあるのだが。

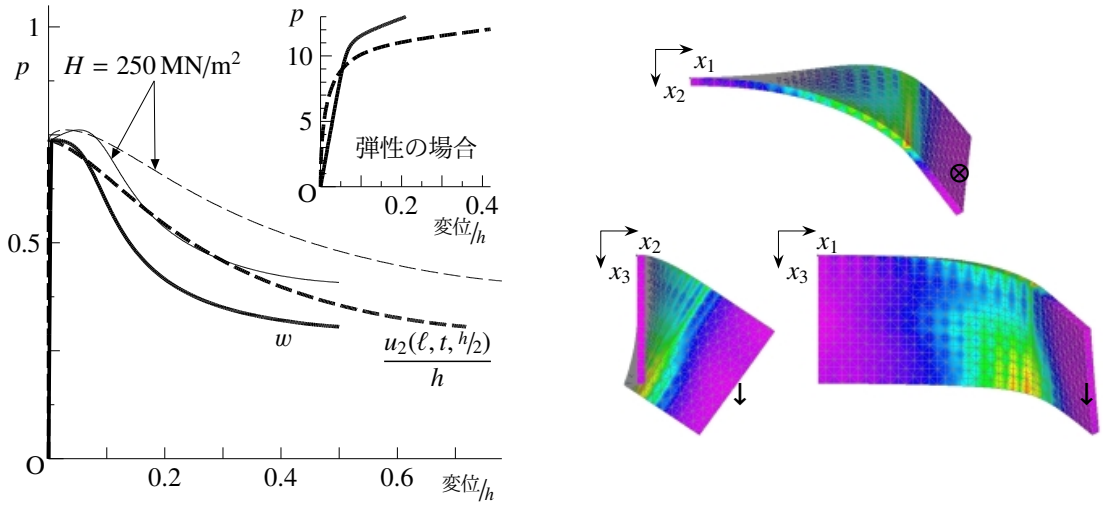
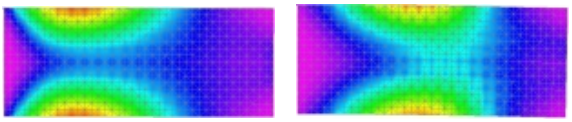


図 12.54 薄板の横倒れ挙動と $w = 0.5$ のときの変形と変位性状; $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 19.2\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.0255\%$

荷重変位関係と $w = 0.5$ に達したときの形状と相当塑性ひずみ分布を図 12.54 に示した。反力が $p = 1$ に達する前に横倒れが発生しており，左端の固定端で塑性モーメントに達する前に，図 12.55 に示したように板の中央部で塑性化が発生してその周辺へと発達する。また，対象を弾性体にした場合の同じ境界条件と要素分割による結果を図 12.54 のインセットに示したが，反力 p が 10 程度つまり $P \simeq 65\,\mathrm{kN}$ 程度が弾性横倒れ座屈荷重に相当し，その $1/10$ 程度の反力レベルで弾塑性体の横倒れが発生している。また弾性座屈の場合は座屈後に反力が単調増加することから安定な分岐座屈であるのに対し，弾塑性体の場合は横倒れのあと巨視的には軟化する。そこで硬化係数を大きくして $H = 250\,\mathrm{MN/m^2}$ にした場合を細い曲線で示したが，初期降伏後に一旦反力は増加するもののすぐに軟化し始める。ただしその場合，図 12.56 に示したように大きな塑性変形領域は相対的に固定端側に偏る。なお接線剛性行列の対角項は常に正のままであり，それは，この巨視的軟化は塑性という材料特性が原因であって凸性を持つべき何らかのポテンシャルに基づく変分原理的な安定問題とは関係が無いからであろう。また用いる亜弾性の違いによる差異は顕著ではなかった。



(a) w=0.00656, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=0.0848%　(b) w=0.0333, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}}$=1.23%

図 12.55 降伏直後の変形状況; $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}}$=0%

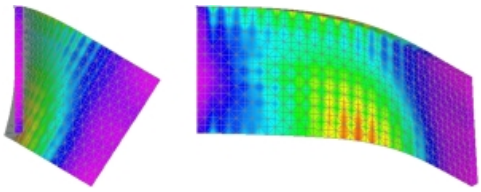


図 12.56 大きい硬化係数 $H = 250\,\mathrm{MN/m^2}$, $w = 0.5$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MAX}} = 11.1\%$, $\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{MIN}} = 0.0621\%$

こんな風にプリ・ポストプロセサのおかげで面白いようにすぐに結果を表示したり確認したりできる。これがあれば，どんどん面白い計算でも，多くのパラメトリックスタディでも，新しいテーマでも・・・と勉強できるはずなんだがなぁ。と独り言。

第 IV 部

補足と蛇足

移設後の高麗橋と桜島

気仙沼大島大橋（仮称：気仙沼湾横断橋） 2017 年 3 月ヤードにて

付録 A

Timoshenko 梁理論

A.1　支配方程式

A.1.1　運動場の仮定と合応力

第 4 章では，梁の軸線と断面の直交性が変形後も保持されるという，いわゆる Bernoulli-Euler 梁の定式化をした。その仮定の範囲内で求められる直応力とつり合うせん断応力が放物線分布することは，第 4.6.1 節で示した通りで，しかもそれは平面問題の解式 (3.199b) とも整合していた。より（連続体力学として）正確な梁理論を求めたければ，この放物線分布に対応するせん断変形を予め考慮して梁理論の定式化をし直せばいいが，ここではもっと簡便な古典的理論を誘導する。なおこの章では簡単のために括弧無しの太字で行列を表している。

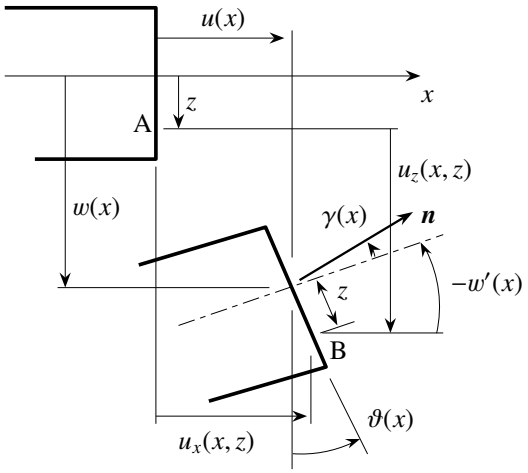


図 **A.1** Timoshenko 梁の運動場

その理論は Timoshenko 梁理論と呼ばれ， Bernoulli-Euler の仮定を緩め，ある断面には一様なせん断変形が発生すると仮定する。すなわち基本的な仮定のうちの式 (4.2) の代わりに

$$2\,\epsilon_{xz}(x,z) = \gamma(x) \tag{A.1}$$

を前提とする。ただ，梁理論では梁の上下面には直接外力が作用することは無いので，せん断ひずみもそこで零にならなければならないことを踏まえると，この断面内一様な（z の関数ではない）せん断ひずみ分布は容認できない。しかしせん断変形は細長い梁にとっては 2 次的なものであり，この程度の差異について別途調整（後述の k_{T} の導入）ができるなら，これで簡便でかつ精度のいいモデルが構築できると考えられる。

この仮定に従って梁の運動を記述したのが図 A.1 である。図から明らかなように，断面内任意点の x, z 方向変位成分は微小変位の範囲内で，これも式 (4.3) の代わりに

$$u_x(x,z) = u(x) + z\,\vartheta(x), \quad u_z(x,z) = w(x) \tag{A.2a, b}$$

となる。ここに $\vartheta(x)$ は軸のたわみ角ではなく断面の回転角を表している。式 (A.1) 左辺に式 (3.6) のひずみ変位関係を用いて式 (A.2) を代入すると

$$2\,\epsilon_{xz}(x,z) = \vartheta(x) + w'(x) = \gamma(x) \quad \rightarrow \quad \vartheta = -w' + \gamma \tag{A.3}$$

という関係を得る。ここにプライムは x に関する微分を表す。つまり，式 (4.4) の θ に代わる ϑ はたわみ角 $-w'$ には一致せず，せん断変形分の γ だけずれる。以上より伸びひずみは

$$\epsilon_{xx}(x,y,z) = u' + z\,\vartheta' = u' + z\,(\gamma' - w'') \tag{A.4}$$

となる。

直応力は 1 次元の Hooke の法則式 (3.183a) に，せん断応力は Hooke の法則式 (3.46) に従うものとすれば，以上のひずみ成分をそれに代入することによって

$$\sigma_{xx} = E\,\epsilon_{xx} = E\,\{u' + z\,(\gamma' - w'')\}, \quad \sigma_{xz} = 2G\,\epsilon_{xz} = G\,\gamma \tag{A.5a, b}$$

となる。ここに E と G はそれぞれ Young 率とせん断弾性係数である。 x 軸が図心を通るように選べば，これを用いて断面に発生する合応力は

$$N(x) \equiv \int_A \sigma_{xx}\,\mathrm{d}A = EA\,u', \quad M(x) \equiv \int_A z\,\sigma_{xx}\,\mathrm{d}A = EI\,(\gamma' - w'') = EI\,\vartheta', \quad V(x) \equiv \int_A \sigma_{xz}\,\mathrm{d}A = Gk_{\mathrm{T}}A\,\gamma \tag{A.6a, b, c}$$

と定義され，変位と関係付けられる。ただし簡単のために均質材料でできた等断面の梁とした。また，せん断力の定義式 (A.6c) の k_{T} はその定義通りなら 1 になるはずだが，前述のように本来一様ではない断面内のせん断変形を一様な場 $\gamma(x)$ で近似したことを補正するために導入された係数で，断面形状と Poisson 比に依存 [17] する。例えば

$$k_{\mathrm{T}}(\text{円形断面}) = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}, \quad k_{\mathrm{T}}(\text{矩形断面}) = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \tag{A.7a, b}$$

といった値を持つ。ちなみに，文献 [17] の誘導からも明らかなように，第 4.6.1 (1) 節の最後で求めたせん断応力の最大値と平均値の関係を表す係数（矩形の場合の $3/2$）とは全く関係無いことには注意すること。

A.1.2 つり合い式と境界条件

つり合い式と境界条件は第 4.9 節と同様， 3 次元の仮想仕事式に前節の変位場・ひずみ場と断面力の定義とを代入すれば求めることができる。式 (A.2) の変位場と式 (A.3) (A.4) のひずみ場の変分は

$$\delta u_x = \delta u + z\,\delta\vartheta, \quad \delta u_z = \delta w, \quad \delta\epsilon_{xx} = \delta u' + z\,\delta\vartheta', \quad 2\delta\epsilon_{xz} = \delta\vartheta + \delta w'$$

と表される。 Bernoulli-Euler 梁とは異なりせん断成分もあるので，内力仮想仕事項は

$$\int_V (\sigma_{xx}\,\delta\epsilon_{xx} + 2\sigma_{xz}\,\delta\epsilon_{xz})\,\mathrm{d}V = \int_0^\ell \left\{ \int_A \sigma_{xx}\,(\delta u' + z\,\delta\vartheta') + \sigma_{xz}\,(\delta\vartheta + \delta w') \right\} \mathrm{d}A\,\mathrm{d}x$$

となる。これに式 (A.6) で定義した断面力を用いると

$$= \int_0^\ell \{N\,\delta u' + M\,\delta\vartheta' + V\,(\delta\vartheta + \delta w')\}\,\mathrm{d}x$$

と書くことができるので，部分積分すると

$$= [N\,\delta u + M\,\delta\vartheta + V\,\delta w]\Big|_0^\ell - \int_0^\ell \{N'\,\delta u + (M' - V)\,\delta\vartheta + V'\,\delta w\}\,\mathrm{d}x$$

を得る。あるいは式 (4.26) の記号を用いると

$$= n_i\,[N\,\delta u + M\,\delta\vartheta + V\,\delta w]\Big|_{x=0,\ell} - \int_0^\ell \{N'\,\delta u + (M' - V)\,\delta\vartheta + V'\,\delta w\}\,\mathrm{d}x \tag{A.8}$$

とも表すことができる。

体積力と表面力による仮想仕事項については，Bernoulli-Euler 梁の対応する項におけるたわみ角 $-w'$ を断面の回転角 ϑ に置き換えるだけでいいので，それぞれ

$$\int_0^\ell (p\,\delta u + m\,\delta\vartheta + q\,\delta w)\ \mathrm{d}x, \quad \left[F_i\,\delta u + C_i\,\delta\vartheta + S_i\,\delta w\right]\Big|_{x=0,\ell} \tag{A.9a, b}$$

と書くことができる。以上の式 (A.8) (A.9) をすべて結合すると，**Timoshenko 梁の仮想仕事式**は

$$\begin{aligned}&\left[(n_i N - F_i)\ \delta u + (n_i V - S_i)\ \delta w + (n_i M - C_i)\ \delta\vartheta\right]\Big|_{x=0,\ell}\\ &\quad - \int_0^\ell \left[(N' + p)\ \delta u + (M' - V + m)\ \delta\vartheta + (V' + q)\ \delta w\right] \mathrm{d}x = 0\end{aligned} \tag{A.10}$$

のように表現できる。したがって断面力で表したつり合い式は

$$N' + p = 0, \quad V' + q = 0, \quad M' - V + m = 0 \tag{A.11a, b, c}$$

と表される。以下分布モーメント外力 m は無視する。さらに境界条件は

$$\{u = u_i \quad \text{あるいは} \quad n_i N = F_i\}, \qquad \{w = w_i \quad \text{あるいは} \quad n_i V = S_i\}, \qquad \{\vartheta = \vartheta_i \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i\} \tag{A.12a, b, c}$$

となる。ここに n_i は式 (4.26) で定義した記号であり，u_i 等は端部で与える変位量である。たわみ角の境界条件を除けば他は Bernoulli-Euler 梁の式 (4.25) と同じである。ここではせん断変形を許しているので，梁の中間載荷点等では軸線が滑らかでたわみ角が連続するとは限らないが，その代わり断面の回転角 ϑ は連続しなければ連続体としての梁の連続性は失われてしまう。したがって，モーメントの境界条件に対応する変位の境界条件はたわみ角の代わりに ϑ を与える条件で与えられなければならないのである。つまり回転角についての境界条件については，γ そのものや $-w'$ を与えるようなことはできないし，この 2 者が中間載荷点や中間支点で連続になる必要も無いことには十分注意する必要がある。

A.1.3 たわみで表した支配方程式

前節で示したように，軸方向の問題は初等梁理論のそれと同じなので，以下では曲げ問題のみを扱う。不静定構造を解くことを念頭に置いて，曲げ問題の支配方程式と境界条件式をたわみ $w(x)$ で表しておく。式 (A.6) を式 (A.11) (A.12) に代入し，式 (A.3) を考慮して γ と ϑ を消去すると，つり合い式は

$$-EI\,w'''' + q - \overline{\alpha}_\mathrm{T}\,q'' = 0 \tag{A.13}$$

となり，境界条件式 (A.12) は

$$w = w_i \quad \text{あるいは} \quad n_i\left\{-EI\,w''' - \overline{\alpha}_\mathrm{T}\,q'\right\} = S_i, \tag{A.14a}$$

$$-w' - \overline{\alpha}_\mathrm{T}\left(w''' + \overline{\alpha}_\mathrm{T}\,\frac{q'}{EI}\right) = \vartheta_i \quad \text{あるいは} \quad n_i\left\{-EI\,w'' - \overline{\alpha}_\mathrm{T}\,q\right\} = C_i \tag{A.14b}$$

と表される。ここに

$$\overline{\alpha}_\mathrm{T} \equiv \frac{EI}{Gk_\mathrm{T}A} = \ell^2\,\alpha_\mathrm{T}, \quad \alpha_\mathrm{T} \equiv \frac{E}{G(\lambda_\mathrm{T})^2}, \quad \lambda_\mathrm{T} \equiv \frac{\ell}{\sqrt{I/(k_\mathrm{T}A)}} \tag{A.15a, b, c}$$

と定義した。λ_T は Timoshenko 梁の細長さの特性を表す一種の細長比である。構造力学公式集の中には k_T 中の Poisson 比を無視したものもあるので，ここでも幾何量である細長比 λ_T の方に組み込んである。$G \to \infty$ の極限で $\alpha_\mathrm{T} \to 0$ および $\overline{\alpha}_\mathrm{T} \to 0$ になり，上式はすべて初等梁理論の支配方程式に一致する。

式 (4.88) には両端単純支持の静定梁の中央における解を示したが，左半分の任意点のたわみは

$$w(x) = -\frac{P}{12EI}\,x^3 + \frac{P\ell^2}{16EI}\,x + \frac{P}{2Gk_{\mathrm{T}}A}\,x \tag{A.16}$$

となる。このときせん断変形 $\gamma(x)$ は

$$\gamma(x) = \frac{P}{2Gk_{\mathrm{T}}A} \tag{A.17}$$

なので，上式第 3 項がこのせん断変形によるたわみ成分であることがわかる。当然前 2 項が Bernoulli-Euler 梁の解である。また等分布外力 q が作用した両端単純支持梁の場合は

$$w(x) = \frac{q}{24EI}\,x\,(x-\ell)\left(x^2 - \ell x - \ell^2\right) + \frac{q}{2Gk_{\mathrm{T}}A}\,x\,(\ell - x) \tag{A.18}$$

となるが，この場合のせん断変形は

$$\gamma(x) = -\frac{q}{Gk_{\mathrm{T}}A}\left(x - \frac{\ell}{2}\right) \tag{A.19}$$

となることから，せん断変形によるたわみ成分 $w_{\mathrm{shear}}(x)$ は

$$w_{\mathrm{shear}}(x) = \int_0^x \gamma(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{A.20}$$

で求めることができ，果たして上式 (A.18) の第 2 項に一致する。

次に不静定梁の例として両端固定梁を解いておこう。まず中央に集中外力 P が作用した場合の左半分のたわみは

$$w(x) = -\frac{P}{12EI}\,x^3 + \frac{P\ell}{16EI}\,x^2 + \frac{P}{2Gk_{\mathrm{T}}A}\,x \tag{A.21}$$

となる。このときのせん断変形 $\gamma(x)$ は両端単純支持梁と同じなので，上式第 3 項がこのせん断変形によるたわみ成分 $w_{\mathrm{shear}}(x)$ であることがわかる。また等分布外力 q が作用した場合の解は

$$w(x) = \frac{q}{24EI}\,x^2\,(\ell - x)^2 + \frac{q}{2Gk_{\mathrm{T}}A}\,x\,(\ell - x) \tag{A.22}$$

となる。第 1 項が Bernoulli-Euler 梁の曲げの解であり，第 2 項がせん断変形によるたわみ $w_{\mathrm{shear}}(x)$ である。

最後に右端を Δ だけ強制的にたわませた場合の解を求めてみると

$$w(x) = \Delta\,\frac{1}{\ell^3}\,x^2\,(3\ell - 2x) + \Delta\,\frac{12\alpha_{\mathrm{T}}}{\ell^3\,(1 + 12\alpha_{\mathrm{T}})}\,x\,(\ell - 2x)\,(\ell - x) \tag{A.23}$$

となり，これも曲げ成分とせん断成分に分解表示が可能になっている。せん断によるたわみ成分は両端と中央では生じていないのは興味深い。というのも，せん断変形とせん断力は

$$\gamma = \frac{12\alpha_{\mathrm{T}}\,\Delta}{\ell\,(1 + 12\alpha_{\mathrm{T}})}, \quad V = \frac{12EI\,\Delta}{\ell^3\,(1 + 12\alpha_{\mathrm{T}})} = \frac{12EI\,\Delta}{\ell^3}\left(1 - \frac{12\alpha_{\mathrm{T}}}{1 + 12\alpha_{\mathrm{T}}}\right) \tag{A.24a, b}$$

と一定になっているからだ。ただしこの場合には，せん断変形の影響の仕方は前の例のような α_{T} 倍という形ではなく，${}^{12\alpha_{\mathrm{T}}}/_{(1+12\alpha_{\mathrm{T}})}$ という影響係数で支配されていることは覚えておいて欲しい。

A.2 曲げ問題の仮想仕事式と剛性方程式

A.2.1 仮想仕事式

つり合い式の基本的な弱形式は，式 (A.11) のつり合い式から

$$0 = -\int_0^\ell \left\{\delta w\,(V' + q) + \delta\vartheta\,(M' - V)\right\}\mathrm{d}x$$

と書くことができるから，部分積分をして境界条件式 (A.12) を代入すると

$$= \int_0^\ell \left\{ V\,\delta(\vartheta + w') + M\,\delta\vartheta' \right\} \mathrm{d}x - \int_0^\ell q\,\delta w\,\mathrm{d}x - \left[S_1\,\delta w_1 + C_1\,\delta\vartheta_1 + S_2\,\delta w_2 + C_2\,\delta\vartheta_2 \right]$$

となる。これに式 (A.3) を考慮して式 (A.5) を代入すると，最終的な仮想仕事式が

$$\int_0^\ell \left\{ Gk_{\mathrm{T}}A\gamma\,\delta\gamma + EI\vartheta'\,\delta\vartheta' \right\} \mathrm{d}x - \int_0^\ell q\,\delta w\,\mathrm{d}x - \left[S_1\,\delta w_1 + C_1\,\delta\vartheta_1 + S_2\,\delta w_2 + C_2\,\delta\vartheta_2 \right] = 0 \tag{A.25}$$

となる。第 A.1.2 節の誘導を逆向きにたどっただけである。内力仮想仕事項は式 (A.3) を考慮すると

$$\int_0^\ell \left\{ Gk_{\mathrm{T}}A\gamma\,\delta\gamma + EI\,(-w'' + \gamma')\,\delta(-w'' + \gamma') \right\} \mathrm{d}x \tag{A.26}$$

とも表すことができる。

A.2.2 剛性方程式

(1) かなり低次な要素

式 (A.25) を見る限り γ は要素内一定，ϑ は 1 次多項式でよさそうだ。したがって式 (A.3) を考慮すれば w には 2 次多項式でいいことになる。これで四つの未定係数で γ, w を表すことができ，節点における連続条件を満足すべき四つの w_i, ϑ_i を係数とする変位関数が仮定できる。しかし式 (A.26) を見ると，これでは被積分関数第 2 項の γ の微係数が落ちてしまう。だからといって γ に 1 次の多項式を仮定すると未定係数の数が一つ増え，後述の高次要素と同じような煩雑さを伴う。ただこの第 2 項は曲げの項であり，γ の貢献は主に第 1 項であろうから，思い切ってこの最も簡単な変位関数を採用して試してみよう。つまり

$$\gamma(x) = \frac{w_2 - w_1}{\ell} + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad w(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) w_1 + \frac{x(x-\ell)}{2\ell}\,\vartheta_1 + \frac{x}{\ell}\,w_2 + \frac{x(\ell - x)}{2\ell}\,\vartheta_2$$

と置く。これを式 (A.26) に代入して剛性行列を求めると

$$\begin{pmatrix} \dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A}{\ell} & -\dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A}{2} & -\dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A}{\ell} & -\dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A}{2} \\ & \left(\dfrac{EI}{\ell} + \dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A\ell}{4}\right) & \dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A}{2} & \left(-\dfrac{EI}{\ell} + \dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A\ell}{4}\right) \\ & & \dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A}{\ell} & \dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A}{2} \\ \text{Symm.} & & & \left(\dfrac{EI}{\ell} + \dfrac{Gk_{\mathrm{T}}A\ell}{4}\right) \end{pmatrix} \tag{A.27}$$

となる。

ここでは敢えて（精度が悪いことはわかっていて）変位関数に対する最低条件を満足する低次多項式を用いてみた。しかし Timoshenko 梁理論は Bernoulli-Euler 梁の拡張理論であり，$G \to \infty$ の極限で各基礎式は初等梁理論のそれに整合するはずである。ところが式 (A.27) の剛性行列は $G \to \infty$ の極限で式 (5.25) にはならない。しかも式 (A.27) を用いた有限要素解析による数値解は，要素数を非常に多く用いなければならない等，厳密解への収束が非常に遅い [44] こともわかっている。

(2) 高次要素 — 適正な要素

たわみ w で表したつり合い式 (A.13) を見ると明らかなように，最も重要な項は初等梁理論と同様，たわみについての 4 階の微係数であった。したがって，w に対しては 3 次の多項式を用いるのが望ましいことは明らか

なのだが，前節では故意に簡単な要素を誘導してみた。そこでここでは，γ については定数として

$$\gamma(x) = \gamma_0, \tag{A.28a}$$

$$\begin{aligned} w(x) &= w_1\,\psi_1(x) - w'\,\psi_2(x) + w_2\,\psi_3(x) - w_2'\,\psi_4(x) = w_1\,\psi_1 + (\vartheta_1 - \gamma_0)\,\psi_2 + w_2\,\psi_3 + (\vartheta_2 - \gamma_0)\,\psi_4 \\ &= w_1\,\psi_1(x) + \vartheta_1\,\psi_2(x) + w_2\,\psi_3(x) + \vartheta_2\,\psi_4(x) + \gamma_0\,\psi_5(x) \end{aligned} \tag{A.28b}$$

と置いてみよう。ここに ψ_n は式 (5.22) で定義した多項式であり，新たに

$$\psi_5(x) \equiv -\psi_2(x) - \psi_4(x) = x - 3\,\frac{x^2}{\ell} + 2\,\frac{x^3}{\ell^2}$$

と定義した。

ここでも γ を定数と置いているから，式 (A.26) の被積分関数第 2 項の γ の微係数が落ちてしまう。しかし，式 (A.28) の w の方の変位関数表現に γ_0 の項があることから，少なからずせん断変形の影響がこの第 2 項にも及ぶことが期待できる。また γ を 1 次多項式にしても，実は求められる剛性方程式が同じになることは，ちょっと面倒な演算で示すことができて興味深い。

式 (A.28) を式 (A.25) に代入して「要素」剛性方程式を求めると

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \boldsymbol{k}_b & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{Bmatrix} \\ \boldsymbol{h} \\ \\ \end{Bmatrix} \\ \lfloor\ \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\ \rfloor & h_5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \gamma_0 \end{Bmatrix} \tag{$*$}$$

となる。ここで $\boldsymbol{k}_b$ は式 (5.23a) (5.25) で定義された初等梁の剛性行列であり，q_i $(i = 1\sim4)$ は式 (5.23b) で定義された等価節点外力である。h_5 や $\boldsymbol{h}$ の具体的な表現は省略するが

$$\boldsymbol{h} \equiv \lfloor h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4 \rfloor^{\mathrm{T}}, \quad q_5 \equiv \int_0^{\ell} q\,\psi_5\,\mathrm{d}x, \tag{A.29a, b}$$

$$h_n \equiv EI \int_0^{\ell} \psi_n''\,\psi_5''\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, 3, 4), \quad h_5 \equiv Gk_{\mathrm{T}}A\ell + \int_0^{\ell} EI\,(\psi_5'')^2\,\mathrm{d}x \tag{A.29c, d}$$

と定義した。等分布荷重の場合の q_5 は零になる。剛性方程式 $(*)$ の第 5 行の式は，境界条件から判断して左辺の外力に相当する部分が零になっており，これは要素剛性方程式の段階における余剰な自由度 γ_0 に対する拘束条件と考えなければならない。つまり式 (A.12) の境界条件から判断して γ は要素間で連続になる必要が無いから，式 $(*)$ の要素剛性方程式の段階で γ_0 を残しておく必要は無くなる。したがって，式 $(*)$ 第 5 行から γ_0 を計算してしまい，それを残りの行に代入して剛性行列の縮約を行う。まず第 5 行の式は

$$\gamma_0 = \frac{q_5 - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}}{h_5} \tag{$**$}$$

となる。便宜上

$$\boldsymbol{v} \equiv \lfloor w_1 \quad \vartheta_1 \quad w_2 \quad \vartheta_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$$

と置いた。式 $(**)$ を式 $(*)$ の上 4 行右辺に代入すると

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{h}\,\gamma_0 = \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{h}\,\frac{q_5 - \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}}{h_5}$$

となる。したがって最終的な剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \boldsymbol{q}^{(\mathrm{T})} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} \tag{A.30}$$

と表すことができる。ここに

$$\boldsymbol{q}^{(\mathrm{T})} \equiv \left\{ q_i^{(\mathrm{T})} \right\}, \quad q_i^{(\mathrm{T})} \equiv q_i - \frac{q_5\, h_i}{h_5}, \tag{A.31a, b}$$

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{T}} \equiv \boldsymbol{k}_b - \frac{\boldsymbol{h}\,\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}}{h_5} = \frac{EI}{1+12\alpha_{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} \dfrac{12}{\ell^3} & -\dfrac{6}{\ell^2} & -\dfrac{12}{\ell^3} & -\dfrac{6}{\ell^2} \\ & \dfrac{4+12\alpha_{\mathrm{T}}}{\ell} & \dfrac{6}{\ell^2} & \dfrac{2-12\alpha_{\mathrm{T}}}{\ell} \\ & & \dfrac{12}{\ell^3} & \dfrac{6}{\ell^2} \\ \text{Symm.} & & & \dfrac{4+12\alpha_{\mathrm{T}}}{\ell} \end{pmatrix} \tag{A.31c}$$

である。式 (A.15b) のように α_{T} がせん断変形の影響の程度を代表するパラメータであり，せん断変形を無視する場合には前述のようにせん断抵抗係数 $G \to \infty$ と考えればいいから， $\alpha_{\mathrm{T}} \to 0$ となる。 $\alpha_{\mathrm{T}} = 0$ のとき，式 (A.31c) は式 (5.25) の初等梁理論の剛性行列に一致する。剛性行列の分母の形は式 (A.23) (A.24) に現れるせん断変形の影響係数 ${}^{12\alpha_{\mathrm{T}}}/_{(1+12\alpha_{\mathrm{T}})}$ の分母に一致するのは興味深いが，当たり前でもある。実は式 (A.30) はマトリックス構造解析の基礎式としての厳密な剛性方程式に一致するのだ。したがって当然のことであるが，式 (A.13) (A.14) で表した支配方程式から有限要素定式化しても同じ剛性方程式 (A.30) が求められる。この節を高次要素と題したが，以上のような意味ではこの要素の方が有限要素法として適正なものと言わざるを得ない。

MEMORANDUM

‘納豆と豆腐:’ 第 1 著者が留学直前に通った神田の英会話学校で一緒だった日本大学の学生から「元々の中国では逆だよ。豆を箱に納めたらトウフだし，豆を腐らせたのがナットウだろ。」と教えてもらい，中国人留学生に大笑いされるまでの数年間は信じてしまっていた。あぁーあ。

写真 A.1 移設後の西田橋　岩永三五郎

‘Gesundheit!’ くしゃみをした人には ‘God bless you!’・・・と習うが，アメリカ（中西部か?）では人によってはこう言う。実は，それが英語だと思っているアメリカ人がいるというジョークがある。そうそう，我が国では噂をされるとくしゃみが出ると言うが，イタリアではシャックリなんだそうだ。

付録 B

面内の有限変位棒理論

B.1　微小でない変位と変形

B.1.1　ひずみの定義

この章タイトルにある有限変位というのは微小ではない変位のことを指す。ただし，第 12 章の有限「変形」理論とは異なり，ひずみはそれほどは大きくならず，材料はある種の線形弾性のままだとする。さて変位前の物体中の任意点の位置ベクトルは式 (3.1) で表すことができるから，任意の微分線要素ベクトルは

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}^0 = \mathrm{d}x_i\,\boldsymbol{e}_i \tag{B.1}$$

と表現できる。総和規約を用いたが，主に直角座標で説明するのでテンソルの共変成分・反変成分の区別をせず，すべて下付きの指標で成分を表す。極座標等の一般的な厳密な表現については例えば文献 [26] や付録 C を参照のこと。一方式 (3.3) を考慮すると，変位後の微分線要素ベクトルは位置ベクトルの式 (3.2) から

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}p_j\,\boldsymbol{e}_j = \left(\delta_{ji} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\,\boldsymbol{e}_j = \mathrm{d}x_i\,\boldsymbol{G}_i \tag{B.2}$$

と書くことができる。ここに $\boldsymbol{G}_i$ は

$$\boldsymbol{G}_i \equiv \left(\delta_{ji} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_j \tag{B.3}$$

で定義した変形後の基底ベクトルである。これは，変形前に空間座標系基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と一致するように定義した上で物体中の物質点に糊付けしたもので，物体と一緒に変位して変形するベクトルである。したがって元の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ が単位の直交ベクトルで定義されていても，変形後の基底ベクトル $\boldsymbol{G}_i$ は単位でもなく互いに直交もしないベクトルの組になっていることに注意すること。

ひずみは式 (3.10) のように変形前後の微分線要素の長さの差として定義できたから，上式をこれに代入して整理すると

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}s_0)^2 = \left(\boldsymbol{G}_i\,\boldsymbol{G}_j - \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j\right)\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = \left(\boldsymbol{G}_i\,\boldsymbol{G}_j - \delta_{ij}\right)\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j \equiv 2\,E_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$$

のようにしてひずみ成分 E_{ij} を定義できそうだ。つまり，有限変位における厳密なひずみテンソル成分は

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{G}_i\,\boldsymbol{G}_j - \delta_{ij}\right) \tag{B.4}$$

で定義することができる。このひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ を **Green のひずみ**テンソルと呼ぶ。式 (B.2) の $\boldsymbol{G}_i$ の定義を式 (B.4) 右辺に代入して整理すると，各成分は

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{B.5}$$

と定義できる。右辺括弧内第 3 項が式 (3.6) で定義された微小変位におけるひずみ成分には無かった非線形項である。微小変位の式 (3.10) はこの線形部分だけで定義されていた。

物理的な意味について，代表的な成分と微小変位の場合の成分とを比較してみよう。まず E_{11} は

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{G}_1|^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left\{(1+\epsilon_{11})^2 - 1\right\} \simeq \epsilon_{11}$$

となるから，ひずみ自体が微小である限り，式 (3.4) の伸びひずみと近似的に一致する。一方 E_{12} は

$$E_{12} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{G}_1|\,|\boldsymbol{G}_2|\cos\widehat{\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2} = \frac{1}{2}(1+\epsilon_{11})(1+\epsilon_{22})\sin(\epsilon_{12}+\epsilon_{21}) \simeq \epsilon_{12}$$

となる。これもひずみ自体が微小である限り，式 (3.5) のせん断ひずみと近似的に一致する。

B.1.2 仮想仕事の原理と応力

前節で定義した Green のひずみテンソル成分を用いた仮想仕事式は，その誘導は省略するが，式 (5.64) と形式的には同じく

$$\int_V S_{ji}\,\delta E_{ij}\,\mathrm{d}V - \int_V X_i\,\delta u_i\,\mathrm{d}V - \int_S F_i\,\delta\bar{u}_i\,\mathrm{d}S = 0 \tag{B.6}$$

と表現される。ただし S_{ji} は**第 2 Piola-Kirchhoff 応力**テンソル成分である。物理的には，変位前に単位面積を持ち変位後に $\boldsymbol{G}_j$ 方向を法線ベクトルとする微分面積要素当たりの，その物質点の変位後の基底ベクトル $\boldsymbol{G}_i$ 方向の力成分を表している。したがって，変形後の基底ベクトルが必ずしも単位ではないことから，それ自体は物理的な応力の大きさと次元を持っておらず，少なくとも微分面積要素の変化が微小であれば

$$S_{ji}\ \text{の物理成分} = S_{ji} \times |\boldsymbol{G}_i| \quad i\ \text{について総和はとらない} \tag{B.7}$$

という調整が必要であることに注意する必要がある。以下簡単のために添え字 $(1,2,3)$ の組を (x,y,z) で記す。

B.1.3 運動場の仮定

最初は少し一般性を持たせるために，せん断変形の影響を含んだ Timoshenko 梁モデル [43, 49] を対象とした運動場を仮定する。付録 A で提示した運動場に対する仮定を図 B.1 に示した。微小変位理論の式 (4.3) では sine と cosine を近似したが，そうせずに式 (A.2) をきちんと書くと

$$u_x(x,z) = u(x) + z\,\sin\vartheta(x), \tag{B.8a}$$

$$u_z(x,z) = w(x) + z\,\{\cos\vartheta(x) - 1\} \tag{B.8b}$$

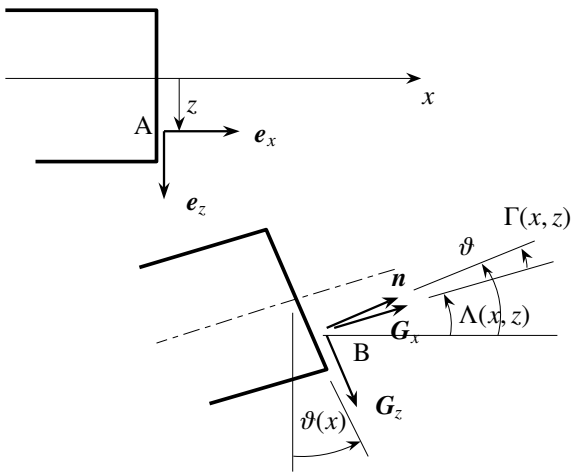


図 **B.1** Timoshenko 梁の変形状態

となる。$\vartheta(x)$ は断面の回転角である。軸線は断面の図心を通るものとするが，棒[1]の線素を変形前には軸線と平行に定義したが，それは変形後には $\boldsymbol{G}_x$ 方向を向く。したがって線素の向きは x 軸と $\Lambda(x,z) \equiv \{\vartheta(x) - \Gamma(x,z)\}$ の角度をなす。Γ は断面の軸線方向に対する角度変化で，せん断変形を表している。このことから，軸線の変位と傾きの幾何学的関係は

$$\tan\Lambda_0(x) = \tan\{\vartheta(x) - \Gamma_0(x)\} = -\frac{w'(x)}{1+u'(x)} \tag{B.9}$$

[1] いわゆる梁と柱と梁-柱を対象とするので棒と称するが，ねじりは含まない。

となる。ここにプライムは x に関する微分を表し，下添え字に 0 が付いた $\Lambda_0(x)$, $\Gamma_0(x)$ はそれぞれ，基底ベクトルの回転角 $\Lambda(x,z)$ および $\Gamma(x,z)$ の軸線上 $(z=0)$ での値を表す。

式 (B.9) を考慮しながら式 (B.8) をひずみの定義式 (B.5) に代入して整理すると

$$E_{xx} = \frac{1}{2}(g-1), \quad g \equiv |\boldsymbol{G}_x|^2, \quad 2\,E_{xz} = \sqrt{g}\,\sin\Gamma = \sqrt{g_0}\,\sin\Gamma_0 = \gamma \tag{B.10a, b, c}$$

と表すことができる。ここに

$$g = (1+\epsilon+z\kappa)^2+\gamma^2, \quad g_0 \equiv g(z=0) = (1+\epsilon)^2+\gamma^2 = (1+u')^2+(w')^2, \tag{B.11a, b}$$

$$\epsilon \equiv \sqrt{g_0}\,\cos\Gamma_0 - 1, \quad \gamma \equiv \sqrt{g_0}\,\sin\Gamma_0, \quad \kappa \equiv \vartheta' \tag{B.11c, d, e}$$

と定義した。式 (B.9) と式 (B.11) の定義を用いると，変位勾配は

$$u' = (1+\epsilon)\,\cos\vartheta + \gamma\,\sin\vartheta - 1, \quad w' = -(1+\epsilon)\,\sin\vartheta + \gamma\,\cos\vartheta \tag{B.12a, b}$$

という関係にあることを示すことができる。変形前に軸線と平行だった任意の線素の向きは，断面任意点での変形後の基底ベクトルの回転角と変形の関係式

$$\cos\Lambda = \frac{1+\epsilon+z\kappa\,\cos\vartheta}{\sqrt{g}}, \quad \sin\Lambda = \frac{\gamma+z\kappa\,\sin\vartheta}{\sqrt{g}} \tag{B.13a, b}$$

で表される。あるいは，せん断変形部分だけについては

$$\cos\Gamma = \frac{1+\epsilon+z\kappa}{\sqrt{g}}, \quad \sin\Gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} \tag{B.14a, b}$$

という関係がある。

B.2 Bernoulli-Euler 梁理論 — 美しい理論

B.2.1 運動場

比較的細長い梁の場合には，せん断変形を最初から無視した Bernoulli-Euler 梁として取り扱えるので，以上の定式化で $\Gamma \equiv 0$ とすれば良く，構成則も含めて合理的で近似の無い美しい理論が誘導できる。区別を明確にするために断面の回転角 ϑ を θ と表記する。まず式 (B.8) の運動場は

$$u_x(x,z) = u(x) + z\,\sin\theta(x), \quad u_z(x,z) = w(x) + z\,\{\cos\theta(x)-1\}, \quad \Lambda(x,z) = \Lambda_0(x) = \theta(x) \tag{B.15a, b, c}$$

となる。$\theta(x)$ は断面の回転角だが，梁の軸線のたわみ角に等しい。また式 (B.9) の傾きの幾何学的関係は

$$\tan\theta(x) = -\frac{w'(x)}{1+u'(x)} \tag{B.16}$$

となり，θ と u, w とは独立ではなくなる。同様に式 (B.11) は厳密に

$$\sqrt{g} = 1+\epsilon+z\kappa, \quad \epsilon = \sqrt{g_0}-1, \quad \kappa = \theta' = -\frac{1}{g_0}\{(1+u')\,w'' - w'\,u''\} \tag{B.17a, b, c}$$

と表現できる。式 (B.16) と式 (B.17) から変位勾配は

$$u' = (1+\epsilon)\,\cos\theta - 1, \quad w' = -(1+\epsilon)\,\sin\theta \tag{B.18a, b}$$

という関係になる。

さて，式 (B.4) のひずみの定義式と式 (B.10a) とを比較すれば明らかなように，式 (B.10b) のように g は変形後の基底ベクトル $\boldsymbol{G}_x$ のノルムの 2 乗で定義したから，ここで**物理的な伸びひずみ** e を基底ベクトル $\boldsymbol{G}_x$ の長さの変化率で定義することにし

$$e \equiv |\boldsymbol{G}_x| - |\boldsymbol{g}_x| = \sqrt{g} - 1 \tag{B.19}$$

と定義する。これに式 (B.17a) を代入すれば

$$e = \epsilon + z\kappa \tag{B.20}$$

という簡単な表現になる。つまり，大きく変位した場合であっても， Bernoulli-Euler 梁のひずみ（伸びひずみの物理成分）は断面内で三角形（線形）分布をしている。美しい! 逆に言うと，式 (B.10a) の Green のひずみ成分の物理的意味はわかり難い。

ところで式 (B.17c) の曲率が解析学等で習ったものとは違うと感じたと思う。それは独立変数の考え方が数学のそれとは全く違うからである。この章の x は梁が変位する前の軸線の位置の空間座標である。数学の場合は，ある空間 (ξ, ζ) の曲線 $\zeta = \zeta(\xi)$ が持つ曲率を ξ あるいはその曲線に沿った座標 s の関数として定義している。そこでこの 2 種類の独立変数の変換をしておこう。つまり変位した梁が空間に描く曲線の位置は

$$\xi = x + u(x), \quad \zeta = w(x)$$

である。この関係を用いて変数変換して式 (B.17c) を書き直すと

$$\kappa(x) = \theta'(x) = \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = -(1 + u')\,\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\xi^2}$$

になる。一方，曲率も (ξ, ζ) におけるそれで定義し直すと

$$\tilde{\kappa}(\xi) \equiv \frac{\mathrm{d}\theta(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{1 + u'}\,\kappa(x)$$

となるので，上式を代入して

$$\tilde{\kappa}(\xi) = -\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\xi^2} = \tilde{\kappa}(s) = -\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}s^2}$$

あるいは

$$\bar{\kappa}(s) \equiv \frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s} = \bar{\kappa}(\xi) = -\frac{1}{\left\{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right\}^{3/2}}\,\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}}\,\tilde{\kappa}(\xi)$$

のように，数学で習った表現を得る。この独立変数 x の考え方については十分気を付けておく必要がある。有限変形理論の第 12 章では，この章の x を大文字 $\boldsymbol{X}$ で，変位後の位置を小文字 $\boldsymbol{x}$ で表して区別している。

B.2.2 つり合い式と境界条件

一方，式 (B.10) のひずみ成分を式 (B.6) の仮想仕事式に代入して，せん断ひずみ E_{xz} の項を無視した上で式 (B.19) を考慮して変分をとれば，その内力仮想仕事項は

$$\int_V S_{xx}\,\delta E_{xx}\,\mathrm{d}V = \int_V \sqrt{g}\,S_{xx}\,\delta e\,\mathrm{d}V \tag{B.21}$$

と表してもいいことがわかる。ここが，美しい理論体系になるための一番のミソである。梁の抵抗は軸方向の変形 E_{xx} が主であり零ではないため，その軸方向の基底ベクトル $\boldsymbol{G}_x$ は変形後には単位でなくなる。したがって，梁の断面形は不変なので直応力 S_{xx} の物理成分には式 (B.7) のように $\sqrt{g}$ だけの調整が必要になる。よって

$$\sigma \equiv \sqrt{g}\,S_{xx} \tag{B.22}$$

で，軸方向の応力の物理成分を定義することができる。これを用いると，上の内力仮想仕事項は

$$\int_V \sigma\,\delta e\,\mathrm{d}V \tag{B.23}$$

のように，物理的にも数学的にも簡明な表現になる。

式 (B.20) から，伸びの物理成分の変分は

$$\delta e = \delta\epsilon + z\,\delta\kappa$$

となるから，上式 (B.23) に代入すれば内力仮想仕事項が

$$\int_x (N\,\delta\epsilon + M\,\delta\kappa)\ \mathrm{d}x \tag{B.24}$$

となる。ただし，二つの基本的な断面力を

$$N \equiv \int_A \sigma\,\mathrm{d}A, \quad M \equiv \int_A z\,\sigma\,\mathrm{d}A \tag{B.25a, b}$$

と定義した。これは微小変位理論のそれと形式的には同じだ。

式 (B.16) (B.17) を考慮しながら，各変形成分の変分をとると

$$\delta\epsilon = \cos\theta\,\delta u' - \sin\theta\,\delta w', \quad \delta\kappa = \delta\theta'$$

という関係がある。また式 (B.16) の変分から

$$\delta\theta = -\frac{1}{\sqrt{g_0}}\,(\cos\theta\,\delta w' + \sin\theta\,\delta u')$$

という関係になる。また外力仮想仕事については，分布外力モーメントを無視した梁理論の範囲内での表現をすると

$$-\int_x (p\,\delta u + q\,\delta w)\ \mathrm{d}x - (F\,\delta u + S\,\delta w + C\,\delta\theta)\Big|_{x=0,\ell} \tag{B.26}$$

と書いていい。式 (B.24) と以上の関係を用いて変分を実行して対応する Euler 方程式を導くと，つり合い式が

$$\left(N\cos\theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}}\sin\theta\right)' + p = 0, \tag{B.27a}$$

$$\left(-N\sin\theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}}\cos\theta\right)' + q = 0 \tag{B.27b}$$

と求められる。さらに境界条件も

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\left(N\cos\theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}}\sin\theta\right) = F_i, \tag{B.28a}$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\left(-N\sin\theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}}\cos\theta\right) = S_i, \tag{B.28b}$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\,M = C_i \tag{B.28c}$$

と求められる。ここに n_i は式 (4.26) で定義した記号であり，外力は図 4.7, 4.8 に定義されている。

B.2.3 構成方程式

式 (B.23) を見る限り，σ と e の組の間に何らかの構成則を与えるのが一番素直である。したがって，1 次元の線形弾性の構成方程式を

$$\sigma = E\,e = E\,(\epsilon + z\,\kappa) \tag{B.29}$$

のようなわかり易い形で与えることには何の抵抗も無いと思う。ここに E は何らかの弾性係数であるが，もちろん Young 率と考えていい。したがって断面力と変形の関係は

$$N = EA\,\epsilon, \quad M = EI\,\kappa \tag{B.30a, b}$$

のように，見かけ上線形になる等，非常にわかり易い理論体系になっている。ただ式 (B.17) から明らかなように，変形 ϵ, κ と変位 u, w との間は高次の幾何学的な非線形関係にあるため，限られた場合にしか解析的に解を求めることはできない。

B.2.4 座屈荷重

この理論の枠組の中で片持ち梁の座屈荷重 P_{cr} を求めよう。図 6.23 が解析対象なので

$$u = -\frac{P}{EA}\,x, \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \epsilon = -\frac{P}{EA}, \quad N = -P, \quad M = 0$$

が座屈直前の解であること，自明な解であることは明らかである。そこで第 6 章の剛体バネモデルの例でも用いたように，この解のすぐ近傍に別な解が存在するか否かを確かめることによって，座屈が生じるか否かの判定をしよう。そのためには，例えば

$$u(x) := -\frac{Px}{EA} + \Delta u(x), \quad w(x) := \Delta w(x) \quad \text{etc.} \tag{B.31a, b}$$

と置いたものを支配方程式に代入し直し，Δ のついた摂動量について線形化した斉次の支配方程式を求めることができる。この支配方程式はいわゆる固有値問題を形成している。そうした上で，摂動量に対して一つでも零でない解が存在するための条件式から座屈荷重 P_{cr} を算定できる。具体的な誘導は文献 [43, 49] を参照のこと。

このようにすると，座屈前の伸びを厳密に考慮した場合は，文献 [95] にもあるように座屈荷重が

$$\frac{P_{\mathrm{cr}}\,\ell^2}{EI} = \frac{\lambda^2}{2}\left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2}\right\} \tag{B.32}$$

と求められる。ここに λ は細長比である。これに対し座屈前の伸びの影響を無視した場合には

$$\frac{P_{\mathrm{cr}}\,\ell^2}{EI} = \frac{\pi^2}{4} \tag{B.33}$$

となり，式 (6.43b) の梁-柱の解に一致する。式 (B.32) では伸びの影響を考慮しているため，その軸力による縮み分だけ座屈長が短くなる効果を含んでいる。また，細長比が π より小さい極端に短い柱の場合は，もちろん梁でモデル化するのは無謀ではあるが，座屈しないことを示している。この縮み分のために，式 (B.32) の解は $\pi^2/4$ より大きい値になる。ただし，そんなに短い柱の場合にはせん断変形の影響が無視できないため，後述の Timoshenko 梁理論で座屈も検討する必要がある。逆に細長比が大きい場合には，式 (B.32) の平方根の部分を Taylor 展開して最初の 2 項だけを用いると，それは式 (B.33) に一致する。座屈後の挙動については，その一つの解法を第 6.6.2 節で説明した。

B.2.5 変分原理と Elastica

さて，全ポテンシャルエネルギ最小原理という変分原理で捉えた梁理論について加筆しておく。Bernoulli-Euler 梁の場合の構成則は式 (B.29) でモデル化したので，伸びひずみ e の 2 次形式で定義される超弾性体と捉

えることができる。そこで式 (B.26) の外力仮想仕事を念頭に置くと，結局全ポテンシャルエネルギに相当する汎関数 Π が

$$\Pi \equiv \int_V \frac{1}{2} E\, e^2 \,\mathrm{d}V - \int_x (p\, u + q\, w)\ \mathrm{d}x - (F\, u + S\, w + C\, \theta)\Big|_{x=0,\ell} \tag{B.34}$$

で定義できることがわかる。この変分をとり，式 (B.30) の構成則を用いることによって，この汎関数 Π の停留原理から得られる Euler 方程式と境界条件がつり合い式 (B.27) と境界条件式 (B.28) になることを示すことは簡単だろう。読者は各自手を動かして欲しい。

では，第 6.6.3 節で説明した軸線の伸びが無い **Elastica**の支配方程式を，変分原理を用いて誘導してみよう。そのためには，式 (6.86) の付帯条件

$$\epsilon = 0 \tag{6.86 再掲}$$

を汎関数に組み込む必要があるので，いわゆる **Lagrange の未定乗数**として P という乗数を導入し，上式 (B.34) を変更すると

$$\Pi \equiv \int_V \frac{1}{2} E\, e^2 \,\mathrm{d}V - \int_x (p\, u + q\, w)\ \mathrm{d}x - (F\, u + S\, w + C\, \theta)\Big|_{x=0,\ell} - \int_x P\, \epsilon\, \mathrm{d}x \tag{B.35}$$

とすればいいことがわかる。さて，この第 1 変分をとると結局

$$\delta\Pi = \int_x \{(N + P)\ \delta\epsilon + M\, \delta\kappa\}\ \mathrm{d}x + \int_x \epsilon\, \delta P\, \mathrm{d}x - \int_x (p\, \delta u + q\, \delta w)\ \mathrm{d}x - (F\, \delta u + S\ \delta w + C\, \delta\theta)\Big|_{x=0,\ell} = 0$$

を得る。これより Euler 方程式が

$$\left\{(N + P)\cos\theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}}\sin\theta\right\}' + p = 0, \quad \left\{-(N + P)\sin\theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}}\cos\theta\right\}' + q = 0, \quad \epsilon = 0$$

となり，境界条件が

$$\begin{aligned}
u &= \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left\{(N + P)\cos\theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}}\sin\theta\right\} = F_i, \\
w &= \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left\{-(N + P)\sin\theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}}\cos\theta\right\} = S_i, \\
\theta &= \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\, M = C_i
\end{aligned}$$

となるが， Euler 方程式の第 3 式が式 (6.86) の不伸張条件なので，式 (B.30a) から

$$g_0 = 1, \quad N \equiv 0 \tag{B.36a, b}$$

の条件を得る。したがって，最終的な場の方程式は

$$(P\cos\theta + M'\sin\theta)' + p = 0, \tag{B.37a}$$

$$(-P\sin\theta + M'\cos\theta)' + q = 0, \quad (1 + u')^2 + (w')^2 = 0 \tag{B.37b, c}$$

となり，境界条件式は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\ (P\cos\theta + M'\sin\theta) = F_i, \tag{B.38a}$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\ (-P\sin\theta + M'\cos\theta) = S_i, \tag{B.38b}$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\, M = C_i \tag{B.38c}$$

のようになるので，見かけ上は軸力 N を P で置き換えただけになるが，導入された「軸力」 P は梁の伸びとは全く無関係な断面力となり，伸びないことの反力として生じた断面力であることに注意する必要がある。制約

条件式 (B.37c) が一つ増えたことに対応して未知関数も一つ増えたというわけだ。また変位場にも不伸張の制約条件が適用されるため

$$\sin\theta = -w', \quad \cos\theta = 1 + u', \quad \kappa \equiv \theta' = \frac{-w''}{1+u'} = \frac{u''}{w'} \tag{B.39a, b, c}$$

になることにも注意すべきである。

この Lagrange の未定乗数 P の物理的な意味はこの例から少しはわかり易くなったと思うが，最小化問題として別の見方をすると，例えば ($\epsilon = 0$) という付帯条件に掛けた「高額な罰金」が P だと考えてもいい。例えば「接触問題」で必要になる制約条件を数値解析に組み込むために用いることができる**ペナルティ法**も同じ考え方である。もう一つほぼ同様な未定乗数の使い方として，ゴムのような非圧縮性材料に対する定式化も挙げられる。もし体積変形が生じないゴムのような材料の場合は，変形に対する付帯条件が

$$\epsilon_{kk} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \tag{B.40}$$

となるので，これに未定乗数 p を乗じて Hooke 弾性体の汎関数を改訂すれば，最終的なつり合い式は式 (3.159) の Navier-Stokes 式の静的な場合の

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + X_i = 0 \tag{B.41}$$

になる。 p は引張を正とした静水圧に相当し，体積変形が生じないことの反力として生じた内力であり，上述の Elastica の P に相当する。 Hooke 弾性体の支配方程式に非圧縮性を導入する場合に，単純に体積変形を零にするとこの p の項は生じない。また Hooke 弾性体の材料定数の性質において，単純に $\nu \to 1/2$ としてしまうと体積弾性係数 K が無限大になり，物理的には容認できない理論になってしまう。

B.3 Timoshenko 梁理論

B.3.1 つり合い式と境界条件

せん断変形の影響を考慮した Timoshenko 梁の場合も，断面力レベルの構成則以外は美しく明快な理論体系になり，そこでも式 (B.19) の物理的な伸びひずみ e を用いることができる。式 (B.10) のひずみ成分を式 (B.6) に代入すると，内力仮想仕事項は

$$\int_V (S_{xx}\,\delta E_{xx} + 2\,S_{xz}\,\delta E_{xz})\ \mathrm{d}V = \int_V (\sqrt{g}\,S_{xx}\,\delta e + S_{xz}\,\delta\gamma)\ \mathrm{d}V$$

と表すことができる。

断面形不変の仮定から，断面方向の基底ベクトル $\boldsymbol{G}_z$ そのものは単位ベクトルのままなので，式 (B.7) から明らかなように， z 方向のせん断応力 S_{xz} は物理成分そのものである。一方，式 (B.22) で説明したように， x 方向の直応力 S_{xx} は $\sqrt{g}$ だけの調整が必要になる。よって二つの応力成分の物理成分をそれぞれ

$$\sigma \equiv \sqrt{g}\,S_{xx}, \quad \tau \equiv S_{xz} \tag{B.42a, b}$$

で定義することができる。これを用いると，上の内力仮想仕事項は

$$\int_V (\sigma\,\delta e + \tau\,\delta\gamma)\ \mathrm{d}V \tag{B.43}$$

のように簡明な表現になる。式 (B.11a) 等を考慮すれば伸びの物理成分の変分は

$$\delta e = \cos\Gamma\,\delta\,(\epsilon + z\,\kappa) + \sin\Gamma\,\delta\gamma$$

となるから，上式 (B.43) に代入して内力仮想仕事項が

$$\int_x (N\,\delta\epsilon + M\,\delta\kappa + V\,\delta\gamma)\ \mathrm{d}x \tag{B.44}$$

となる。ただし，三つの基本的な断面力を

$$N \equiv \int_A \sigma\cos\Gamma\,\mathrm{d}A, \quad M \equiv \int_A z\,\sigma\cos\Gamma\,\mathrm{d}A, \quad V \equiv \int_A (\tau + \sigma\sin\Gamma)\ \mathrm{d}A \tag{B.45a, b, c}$$

で定義した。

式 (B.44) は，軸力が軸線の伸びと，曲げモーメントが軸線の曲率と，せん断力がせん断変形と仮想仕事になっていて非常にわかり易い形をしている。ただ式 (B.45) のように，断面力の定義は一見複雑になっている。しかしそれは，せん断変形の影響で変形後の基底ベクトルが断面に垂直にはなっておらず，したがって直応力 σ も断面に直交した方向を向いていないから複雑に見えるだけなのである。例えば軸力は直応力の断面法線方向成分 $\sigma\cos\Gamma$ だけで定義されている。曲げモーメントも同様である。せん断力はせん断応力 τ だけでは定義されず，直応力 σ の断面内方向成分 $\sigma\sin\Gamma$ も足された形で定義されていることに注意する必要がある。そう考えると逆に，この式 (B.45) の断面力の定義は非常に論理的・合理的であることが明らかだ。

式 (B.9) (B.11) を考慮しながら，各変形成分の変分をとると

$$\delta\epsilon = \cos\vartheta\,\delta u' - \sin\vartheta\,\delta w' - \sqrt{g_0}\,\sin\Gamma_0\,\delta\vartheta, \quad \delta\kappa = \delta\vartheta', \quad \delta\gamma = \sin\vartheta\,\delta u' + \cos\vartheta\,\delta w' + \sqrt{g_0}\,\cos\Gamma_0\,\delta\vartheta$$

という関係がある。また外力仮想仕事は Bernoulli-Euler 梁の式 (B.26) と同じだから，式 (B.44) と以上の関係式を用いて変分を実行し Euler 方程式を導くと，つり合い式が

$$(N\cos\vartheta + V\sin\vartheta)' + p = 0, \tag{B.46a}$$

$$(-N\sin\vartheta + V\cos\vartheta)' + q = 0, \tag{B.46b}$$

$$M' - \sqrt{g_0}\,(V\cos\Gamma_0 - N\sin\Gamma_0) = 0 \tag{B.46c}$$

と求められる。あるいは式 (B.11) の関係を用いると，モーメントのつり合い式 (B.46c) は

$$M' - (1+\epsilon)\ V + \gamma N = 0 \tag{B.47}$$

とも表すことができる。また境界条件は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\,(N\cos\vartheta + V\sin\vartheta) = F_i, \tag{B.48a}$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\,(-N\sin\vartheta + V\cos\vartheta) = S_i, \tag{B.48b}$$

$$\vartheta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i\,M = C_i \tag{B.48c}$$

と求められる。ここの n_i も式 (4.26) で定義した記号である。

B.3.2 構成方程式

構成関係については式 (B.43) の内力仮想仕事項の組を見る限り，直応力 σ と物理的伸び e とを，せん断応力 τ とせん断変形 γ とを何らかの関係で結び付ければ，それが一つの明快な構成方程式の候補である。つまり

$$\sigma = E\,e, \quad \tau = G\,\gamma \tag{B.49a, b}$$

と考えるのが素直であろう。ここに E と G はそれぞれ何らかの弾性係数であるが，もちろん前者を Young 率，後者をせん断弾性係数と考えていい。しかし，式 (B.11) の関係と式 (B.45) の断面力の定義とから明らかなよう

に，このままでは断面力と変位成分との関係は複雑な非線形関係になり，例えば Bernoulli-Euler 梁の式 (B.30) のような明快な関係を得ることはできない。

したがって，構成関係については何らかの近似をせざるを得ない。ここでは弾性範囲に限定していることを考えると，ひずみそのものはかなり微小なものとして取り扱っていいだろう。そう考えると，式 (B.14) より

$$\cos\Gamma \simeq 1, \quad \sin\Gamma \simeq \frac{\gamma}{1+\epsilon} \tag{B.50a, b}$$

と置いて良さそうだ。式 (B.50b) の分母の ϵ を 1 に対して無視していないのは，座屈前の縮み量を適切に考慮した既存の理論と整合させるためである。式 (B.49) (B.50) を断面力の定義式 (B.45) に代入して微小ひずみの仮定を用いて近似すると，以下「第 1 次近似理論（モデル）」と呼ぶ構成方程式を

$$N = EA\,\epsilon, \quad M = EI\,\kappa, \quad V = Gk_{\mathrm{T}}A\,\gamma + N\frac{\gamma}{1+\epsilon} \tag{B.51a, b, c}$$

と近似できる。ここに k_{T} は式 (A.7) で定義された補正係数である。この式 (B.51c) の第 2 項は，式 (B.45c) にある直応力のせん断力への寄与分であり，非常に重要な項である。

ただ，軸力は式 (B.51a) のように伸びひずみに比例した断面力なので，この式 (B.51c) の第 2 項はひずみの 2 次項になり，第 1 項に比べて無視していいようにも思われる。つまり

$$V = Gk_{\mathrm{T}}A\,\gamma \tag{B.52}$$

というモデルも，微小ひずみの範囲で論理的にも可能な一つの理論となり得る。これは微小変位理論の枠組での構成則と形式的に一致している。こちらを「第 2 次近似理論（モデル）」と呼ぶことにする。

B.3.3 近似支配方程式

以上をまとめると，「第 1 次近似」の範囲の基礎的な支配方程式は

$$u' = (1+\epsilon)\cos\vartheta + \gamma\sin\vartheta - 1, \quad w' = -(1+\epsilon)\sin\vartheta + \gamma\cos\vartheta, \tag{B.53a, b}$$

$$\vartheta' = \frac{M}{EI}, \quad \epsilon = \frac{N}{EA}, \quad \gamma = \frac{V}{Gk_{\mathrm{T}}A + \dfrac{N}{1+\epsilon}} \tag{B.53c, d, e}$$

であり，つり合い式が

$$(N\cos\vartheta + V\sin\vartheta)' + p = 0, \tag{B.54a}$$

$$(-N\sin\vartheta + V\cos\vartheta)' + q = 0, \tag{B.54b}$$

$$M' - (1+\epsilon)\,V + \gamma N = 0 \tag{B.54c}$$

となる。微小ひずみの近似をしておきながら，ϵ を 1 に対して無視していない所が数箇所あるが，$(1+\epsilon)$ の部分はそのすべてを残してある。しかし一般には伸びひずみは非常に小さいから，この ϵ を無視した理論をさらに微小伸び近似と呼んでもよさそうだ。ただし特に運動学的な記述だけでは，もし ϵ を 1 に対して無視してしまうと伸びを無視したこと (Elastica) になってしまうので，式 (B.53a) (B.53b) では決して無視することはできないことには注意して欲しい。それに対し，式 (B.53e) と式 (B.54c) の ϵ は無視できてそれぞれ

$$\gamma = \frac{V}{Gk_{\mathrm{T}}A + N}, \quad M' - V + \gamma N = 0 \tag{B.55a, b}$$

となる。この枠組をこの文書では「第 1 次近似の微小伸び近似」と呼ぶことにする。

これに対して「第 2 次近似」の範囲の基礎的な支配方程式は，式 (B.53e) (B.55a) を式 (B.52) で置き換えたもので表される。

B.3.4 座屈荷重

片持ち Timoshenko 梁の座屈を例としよう。その場合には，座屈直前の解は

$$u = -\frac{P}{EA}\,x, \quad w = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \epsilon = -\frac{P}{EA}, \quad \gamma = 0, \quad N = -P, \quad V = 0, \quad M = 0$$

である。 Bernoulli-Euler 梁の場合と同様，この解からの摂動を与えて，Δ のついた摂動量についてすべての支配方程式を線形化する。その摂動量に対する固有値問題を解けば，座屈荷重 P_{cr} が「第 1 次近似理論」では

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\zeta\left(1-\beta^2\zeta\right)^2}{1-\left(\beta^2+\alpha_{\mathrm{T}}\right)\zeta} \tag{B.56}$$

の 3 次方程式（**岩熊の座屈公式**[2]）の解として求められる。ここに

$$\zeta \equiv \frac{P_{\mathrm{cr}}\,\ell^2}{EI}, \quad \beta \equiv \frac{1}{\lambda} \tag{B.57a, b}$$

であり，β は**厚さ（太さ）パラメータ**で細長比 λ の逆数で，α_{T} は式 (A.15) で定義したせん断変形に関するパラメータである。さらに「微小伸び近似」の場合は

$$\zeta = \frac{\pi^2/4}{1+\alpha_{\mathrm{T}}\,\pi^2/4} \tag{B.58}$$

となり，これはいわゆる **Engesser の公式**に一致する。

これに対し，式 (B.51c) のせん断力と変形の関係に軸力の寄与分を無視した理論，つまり式 (B.52) を用いた「第 2 次近似理論」の枠組の中で柱の座屈荷重を求めると

$$\zeta = \frac{1-\sqrt{1-\pi^2\left(\beta^2-\alpha_{\mathrm{T}}\right)}}{2\left(\beta^2-\alpha_{\mathrm{T}}\right)} \tag{B.59}$$

となる。これは「第 2 次近似理論」で座屈前の縮みの影響を考慮していることから，例えば「つるまきバネ」のように座屈前に比較的大きな縮み量のある部品の座屈公式として文献 [95] では紹介されている。さらに上述の「微小伸び近似」をこの「第 2 次近似」に加えると，座屈荷重は

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+\alpha_{\mathrm{T}}\,\pi^2}-1}{2\,\alpha_{\mathrm{T}}} \tag{B.60}$$

となり，**改訂 Engesser 公式**を得る。

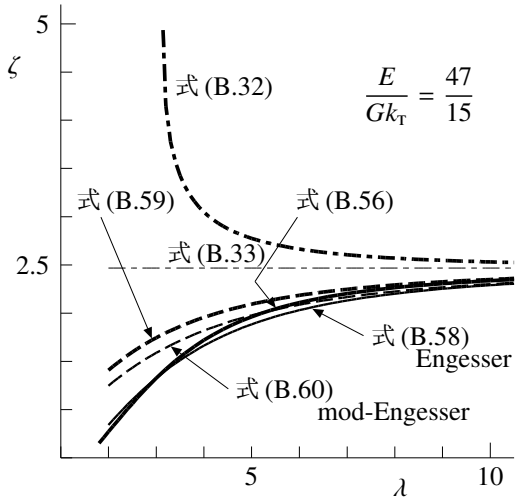


図 B.2 座屈荷重の比較

二つの Engesser 公式と式 (B.59) は文献 [95] にも書かれているが，式 (B.56) の伸びを考慮した第 1 次近似理論の座屈荷重は著者オリジナル [43] である。もし「つるまきバネ」のせん断に関する構成則が式 (B.51c) の方だと判断されれば，式 (B.56) も「つるまきバネ」の座屈荷重になる。参考のために図 B.2 には，非常に短い柱の場合の比較を示した。幅 10 mm 高さ 160 mm の矩形断面で Poisson 比を $\nu = 1/3$ として，強軸回りに座屈するものとした。せん断変形の影響は顕著だが，このくらい短い棒でも四つの公式間にはこの程度の差異しか無いと捉えることもできる。

[2] 文献調査で見つからなかった解なので僭越ながら名付けた。文献をご存知の方は是非ご連絡を。

B.4 微小変位の枠組の中の梁-柱理論

B.4.1 有限変位理論の線形化

第 6 章で扱った梁-柱理論は，ひずみと変位の関係式の非線形項の一部を近似することによって求められる。まず伸びについては，式 (B.11b) で軸方向変位勾配の非線形項を無視し，式 (B.17b) を

$$\epsilon \simeq u' + \frac{1}{2}\,(w')^2 \tag{B.61}$$

と近似する。これは式 (6.31b) にも示した。また曲率についても式 (B.17c) における非線形項を無視し

$$\kappa \simeq -w'' \tag{B.62}$$

と近似する。断面力と変形の関係は式 (B.30) が，内力仮想仕事項も式 (B.24) がそのまま成立するものとする。分布外力のうち軸方向成分 p を無視すれば，その仮想仕事式が

$$\int_x (N\,\delta\epsilon + M\,\delta\kappa)\ \mathrm{d}x - \int_x q\,\delta w\,\mathrm{d}x - \{F\,\delta u + S\,\delta w + C\,\delta(-w')\}\Big|_{x=0,\ell} \tag{B.63}$$

と表される。

式 (B.63) の変分を実行することによって支配方程式を得る。つり合い式は

$$N' = 0, \tag{B.64a}$$

$$(N\,w' + M')' + q = 0 \tag{B.64b}$$

と求められ，式 (6.26) に一致している。また境界条件は

$$u = \text{与える}\quad \text{あるいは}\quad n_i\,N = F_i, \tag{B.65a}$$

$$w = \text{与える}\quad \text{あるいは}\quad n_i\,(N\,w' + M') = S_i, \tag{B.65b}$$

$$-w' = \text{与える}\quad \text{あるいは}\quad n_i\,M = C_i \tag{B.65c}$$

と求められて，これも式 (6.27) に一致する。

第 6 章でも扱ったように，境界条件が簡単な通常の柱の場合には，式 (B.64a) のつり合い式が式 (B.65a) の境界条件の下で簡単に解け

$$N = -P = \text{const.}$$

という関係式 (6.28) が成立する。したがって曲げに関する支配方程式の部分が，例えばつり合い式は

$$-EI\,w'''' - P\,w'' + q = 0$$

となる等，式 (6.32) が求められ，境界条件は式 (6.33) に一致する。このように梁-柱理論は，伸びひずみと変位の関係におけるたわみ角の 2 次項だけを考慮して得ることができる近似理論であることがわかる。

B.4.2 剛性方程式

(1) Bernoulli-Euler 梁の場合

仮想仕事式が式 (B.63) で与えられており，変形と変位の関係が式 (B.61) (B.62) で与えられ，断面力と変形の関係は式 (B.30) が成り立つから，変位成分を適切な関数で仮定すれば，第 5 章で紹介した有限要素法による近似つり合い式つまり剛性方程式を求めることができるはずだ。

表 B.1 剛性行列 $\left(K_{ij}\right)$ の非零成分

11	A/ℓ^2	14	$-A/\ell^2$	44	A/ℓ^2	22	$12I/\ell^4$
23	$-6I/\ell^4$	25	$-12I/\ell^4$	26	$-6I/\ell^4$	33	$4I/\ell^4$
35	$6I/\ell^4$	36	$2I/\ell^4$	55	$12I/\ell^4$	56	$6I/\ell^4$
66	$4I/\ell^4$						

表 B.2 剛性抵抗の配列 $\left(\widetilde{K}_{ijk}\right)$ の非零成分: $\left(K_{ijk}\right) = \dfrac{A}{2\ell^2}\left(\widetilde{K}_{ijk}\right)$

122	$-6/5$	123	$1/10$	125	$6/5$	126	$1/10$
133	$-2/15$	135	$-1/10$	136	$1/30$	155	$-6/5$
156	$-1/10$	166	$-2/15$	224	$6/5$	234	$-1/10$
245	$-6/5$	246	$-1/10$	334	$2/15$	345	$1/10$
346	$-1/30$	455	$6/5$	456	$1/10$	466	$2/15$

表 B.3 剛性抵抗の配列 $\left(\widetilde{K}_{ijkl}\right)$ の非零成分: $\left(K_{ijkl}\right) = \dfrac{A}{2\ell^2}\left(\widetilde{K}_{ijkl}\right)$

2222	$72/35$	2223	$-9/35$	2225	$-72/35$	2226	$-9/35$
2233	$3/35$	2235	$9/35$	2255	$72/35$	2256	$9/35$
2266	$3/35$	2333	$1/140$	2335	$-3/35$	2336	$-1/140$
2355	$-9/35$	2366	$-1/140$	2555	$-72/35$	2556	$-9/35$
2566	$-3/35$	2666	$1/140$	3333	$2/35$	3335	$-1/140$
3336	$-1/140$	3355	$3/35$	3356	$1/140$	3366	$1/210$
3555	$9/35$	3566	$1/140$	3666	$-1/140$	5555	$72/35$
5556	$9/35$	5566	$3/35$	5666	$1/140$	6666	$2/35$

そこで軸方向変位は 1 階の微係数しか現われていないことから，式 (5.16) の 1 次多項式で変位を仮定する。たわみも微小変位理論の場合と同様の条件でいいから，式 (5.21) の 3 次多項式を用いることにする。これを仮想仕事式等に代入して整理すると，この場合は変位の非線形項が含まれていることから，剛性方程式も非線形になる。それは

$$\left\{F_i\right\} = \left(\ K_{ij}\ \right)\left\{u_j\right\} + \left(\ K_{ijk}\ \right)\left\{u_j\right\}\left\{u_k\right\} + \left(\ K_{ijkl}\ \right)\left\{u_j\right\}\left\{u_k\right\}\left\{u_l\right\} \tag{B.66}$$

と表現することができる。ただし，分布外力項は省略して

$$\left\{u_i\right\} \equiv \lfloor u_1/\ell \quad w_1/\ell \quad -w_1' \quad u_2/\ell \quad w_2/\ell \quad -w_2' \rfloor^{\mathrm{T}}, \left\{F_i\right\} \equiv \lfloor {}^{F_1}/_{E\ell^2} \quad {}^{S_1}/_{E\ell^2} \quad {}^{C_1}/_{E\ell^3} \quad {}^{F_2}/_{E\ell^2} \quad {}^{S_2}/_{E\ell^2} \quad {}^{C_2}/_{E\ell^3} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{B.67a, b}$$

の順番で左辺の配列の成分を定義した。剛性行列 $\left(\ K_{ij}\ \right)$ 等はすべての添え字に対して対称な（入れ替えても同じ値を持つ）配列として定義できる。その具体的な値を表 B.1~B.3 に与えた。線形部分の $\left(\ K_{ij}\ \right)$ は式 (5.39) で定義した微小変位理論の剛性行列に一致する。

式 (B.66) の形は計算機で解く場合には何の不都合も無い形式をしているが，これを敢えて行列表示すること

もできる。そこで，非線形項の最初の部分だけを行列表示してみよう。すなわち

$$\left(K_{ijk} \right)\left\{ u_j \right\}\left\{ u_k \right\} \quad \rightarrow \quad \left(K^{\mathrm{G}}_{ij} \right)\left\{ u_j \right\}$$

のように表示してみたい。この $\left(K^{\mathrm{G}}_{ij} \right)$ はもちろん $\left\{ u_m \right\}$ の関数行列となる。まず対称行列になるように並べると

$$\left(K^{\mathrm{G}}_{ij} \right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -c/E\ell^2 & a/E\ell^2 & 0 & c/E\ell^2 & b/E\ell^2 \\ & 6N_0/5E\ell^2 & -N_0/10E\ell^2 & c/E\ell^2 & -6N_0/5E\ell^2 & -N_0/10E\ell^2 \\ & & 2N_0/15E\ell^2 & -a/E\ell^2 & N_0/10E\ell^2 & -N_0/30E\ell^2 \\ & & & 0 & -c/E\ell^2 & -b/E\ell^2 \\ & & & & 6N_0/5E\ell^2 & N_0/10E\ell^2 \\ \text{Symm.} & & & & & 2N_0/15E\ell^2 \end{pmatrix} \tag{B.68}$$

と表すことができる。ここに

$$N_0 \equiv EA\left(\frac{u_2 - u_1}{\ell}\right), \quad a \equiv \frac{EA}{30}\left(-4w_1' + w_2' - 3\,\frac{w_2 - w_1}{\ell}\right), \tag{B.69a, b}$$

$$b \equiv \frac{EA}{30}\left(w_1' - 4w_2' - 3\,\frac{w_2 - w_1}{\ell}\right), \quad c \equiv \frac{EA}{10}\left(-w_1' - w_2' - 12\,\frac{w_2 - w_1}{\ell}\right) \tag{B.69c, d}$$

と置いたが，N_0 は近似的にこの有限要素の軸力と考えていい。あるいは，対称ではない形式で示すこともでき，その場合は

$$\left(K^{\mathrm{G}}_{ij} \right) = \left(\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & -c/2E\ell^2 & a/2E\ell^2 & 0 & c/2E\ell^2 & b/2E\ell^2 \\ \hline 0 & 6N_0/5E\ell^2 & -N_0/10E\ell^2 & 0 & -6N_0/5E\ell^2 & -N_0/10E\ell^2 \\ 0 & -N_0/10E\ell^2 & 2N_0/15E\ell^2 & 0 & N_0/10E\ell^2 & -N_0/30E\ell^2 \\ \hline 0 & c/2E\ell^2 & -a/2E\ell^2 & 0 & -c/2E\ell^2 & -b/2E\ell^2 \\ \hline 0 & -6N_0/5E\ell^2 & N_0/10E\ell^2 & 0 & 6N_0/5E\ell^2 & N_0/10E\ell^2 \\ 0 & -N_0/10E\ell^2 & -N_0/30E\ell^2 & 0 & N_0/10E\ell^2 & 2N_0/15E\ell^2 \end{array}\right) \tag{B.70}$$

と書くことができる。この行列の第 1, 4 行を除いた部分は式 (B.68) のそれと同じであり，式 (6.64) で定義した幾何剛性行列の P を N_0 で置き換えたもの[3]と等価な対称行列になっている。

式 (B.70) で式 (6.64) の幾何剛性に含まれていない部分には，u_1, u_2 は全く含まれず，たわみ w およびたわみ角 w' の 2 次項しか含まれていない。また式 (B.66) の右辺第 3 項もすべて同様の非線形項である。このことから，幾何剛性行列の式 (6.64) が座屈点近傍までの範囲での「第 1 次近似」としては充分な精度を持っていることが明らかだ。ちなみに，式 (6.64) の幾何剛性の通常の誘導は，式 (B.61) のひずみ変位関係を仮想仕事の式 (B.63) に代入して変分することによって得ることができる内力仮想仕事項を，まず

$$\int_x (N\,\delta\epsilon + M\,\delta\kappa)\,\mathrm{d}x = \int_x (N\,\delta u' + Nw'\,\delta w' + M\,\delta\kappa)\,\mathrm{d}x$$

とする。その上で，被積分関数の第 1 項の N を $N \simeq EAu'$ と近似した上で，第 2 項の N を外力圧縮力で $N = -P$ と置き換え，モーメントと曲率の関係を代入して

$$\int_x (EAu'\,\delta u' - Pw'\,\delta w' + EIw''\,\delta w'')\,\mathrm{d}x \tag{B.71}$$

と表される仮想仕事式に適切な変位関数を代入することによっても式 (6.64) の幾何剛性を得ることができる。

[3] 式 (6.64) の幾何剛性行列に負の符号がついているのは P を圧縮力で定義したからである。

(2) Timoshenko 梁の場合

ここでは Timoshenko 梁の幾何剛性を求めるために，線形化した仮想仕事式から定式化を始める。詳細は文献 [33] を参照のこと。外力仮想仕事は Bernoulli-Euler 梁と同じなので割愛し，内力仮想仕事項と軸圧縮力 P の仮想仕事項だけを示すと

$$\int_0^\ell (EI\,\vartheta'\,\delta\vartheta' - P\,w'\,\delta w' + Gk_{\mathrm{T}}A\,\gamma\,\delta\gamma)\,\mathrm{d}x \tag{B.72}$$

となる。付録 A でも述べたように，精度のいいものを得るには，たわみ w には 3 次の多項式を仮定し，せん断変形 γ に一定を仮定した上で，最終的には γ を消去する必要がある。外力ベクトルと変位ベクトルを

$$\left\{ f \right\} \equiv \left\lfloor {}^{S_1\ell^2}/_{EI} \;\; {}^{C_1\ell}/_{EI} \;\; {}^{S_2\ell^2}/_{EI} \;\; {}^{C_2\ell}/_{EI} \right\rfloor^{\mathrm{T}}, \quad \left\{ u \right\} \equiv \left\lfloor {}^{w_1}/_{\ell} \;\; \vartheta_1 \;\; {}^{w_2}/_{\ell} \;\; \vartheta_2 \right\rfloor^{\mathrm{T}} \tag{B.73a, b}$$

と定義すると，要素剛性方程式は

$$\left\{ f \right\} = \left(\left(\; K^{\mathrm{L}} \; \right) - \frac{P\ell^2}{EI} \left(\; K^{\mathrm{NL}} \; \right) \right) \left\{ u \right\} \tag{B.74}$$

と求められる。ここに ℓ は有限要素の長さである。行列 $\left(\; K^{\mathrm{NL}} \; \right)$ が幾何剛性行列である。具体的には

$$\left(\; K^{\mathrm{L}} \; \right) = \frac{1}{\Delta_0} \begin{pmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ & 4+12\alpha_{\mathrm{T}} & 6 & 2-12\alpha_{\mathrm{T}} \\ & & 12 & 6 \\ \text{Symm.} & & & 4+12\alpha_{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \left(\; K^{\mathrm{NL}} \; \right) = \frac{1}{\Delta_0^2} \begin{pmatrix} {}^{6\Delta_1}/_5 & -{}^1/_{10} & -{}^{6\Delta_1}/_5 & -{}^1/_{10} \\ & {}^2/_{15}+\Delta_2 & {}^1/_{10} & -{}^1/_{30}-\Delta_2 \\ & & {}^{6\Delta_1}/_5 & {}^1/_{10} \\ \text{Symm.} & & & {}^2/_{15}+\Delta_2 \end{pmatrix} \tag{B.75a, b}$$

になる。また

$$\Delta_0 \equiv 1 + 12\alpha_{\mathrm{T}}, \quad \Delta_1 \equiv 1 + 10\Delta_2, \quad \Delta_2 \equiv 2\alpha_{\mathrm{T}} + 12\alpha_{\mathrm{T}}^2 \tag{B.76a, b, c}$$

と定義した。ちなみにこれは後述する「伸び無視」の「第 1 次近似」モデルに相当する。

B.5 断面変形する薄肉円管梁理論

B.5.1 運動場

ここは第 1 著者の卒業論文の中身だが，青焼きが消える前に見える部分を写しておく。不鮮明な箇所もあったので写し間違いがあるかもしれないので注意して欲しい。対象は図 6.15 のように，円管が曲がるにつれて断面が扁平になっていく挙動である。その手法は当時よく用いられていた Vlasov 流のもので，断面変形パターンを仮定した上で，仮想仕事の原理[4]で支配方程式を求める手法だ。 x 軸を円管の中心に置き，円管肉厚中心面に沿って s 座標を，中心面から中心向きに n 座標を定義する。肉厚中心面の半径を r_0 とし，肉厚を t とする。ただし径厚比 ${}^{r_0}/_t$ は大きい（薄い）ものとする。極座標の (r, ψ) との関係は，したがって $r = r_0 - n$, $\mathrm{d}s = r_0\,\mathrm{d}\psi$ となる。曲げは z-x 面内で生じるものとすると，梁理論の拡張だから，ひずみ場に対する仮定はまず

$$E_{zx} = 0, \quad E_{zz} = 0 \tag{B.77a, b}$$

である。断面変形に関しては，応力に対する推測が

$$S_{nx} = 0, \quad S_{sn} = 0, \quad S_{nn} = 0, \quad S_{ss}^* = 0, \quad \oint_s S_{sx}^*\,\mathrm{d}s = 0 \tag{B.78a, b, c, d, e}$$

[4] 学部の構造力学の講義に出てくるわけのわからない原理でこんなことができるのだという，とても新鮮な衝撃を受けたテーマだった。

でいいだろう。ここに上付きのアスタリスクは肉厚中心面上での値であることを示す。これと Hooke の法則を眺めた上で，ひずみ場の仮定は

$$E_{nx} = 0, \quad E_{sn} = 0, \quad E_{nn} = 0, \quad E^*_{ss} = 0, \quad \oint_s E^*_{sx}\,\mathrm{d}s = 0 \tag{B.79a, b, c, d, e}$$

で良さそうだ。

このひずみ場の仮定に対応する変位場は

$$u = u_0 + \left(\bar{\xi}\,\sin\psi + \bar{\eta}\,\cos\psi - r\,\cos\psi\right)\sin\theta + \bar{u}\,\cos\theta, \quad v = \bar{\xi}\,\cos\psi - \bar{\eta}\,\sin\psi, \tag{B.80a, b}$$

$$w = w_0 + r\,\cos\psi + \left(\bar{\xi}\,\sin\psi + \bar{\eta}\,\cos\psi - r\,\cos\psi\right)\cos\theta - \bar{u}\,\sin\theta \tag{B.80c}$$

となる。ここに上付きのバーは断面変形成分を表し，断面変形による変位の s, n, x 方向成分をそれぞれ $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{u}$ とした。また θ はたわみ角で，ここではせん断変形を無視しているので

$$\tan\theta = -\frac{w_0'}{1 + u_0'} \tag{B.81}$$

という関係がある。ここにプライムは x に関する微分を表す。この変位場が式 (B.79) のひずみ場の仮定を満足するためには

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^*(\psi, x) - n\,\cos\alpha_1\,\sin\alpha, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}^*(\psi, x) + n\,(\cos\alpha_1\,\cos\alpha - 1), \quad \bar{u} = -n\,\sin\alpha_1, \tag{B.82a, b, c}$$

$$\dot{\bar{\xi}}^* = \bar{\eta}^*, \quad \tan\alpha(\psi, x) = \frac{\bar{\xi}^* + \dot{\bar{\eta}}^*}{r_0 + \dot{\bar{\xi}}^* - \bar{\eta}^*}, \quad \tan\alpha_1(\psi, x) = \frac{\bar{\eta}^{*\prime}\,\cos\alpha - \bar{\xi}^{*\prime}\,\sin\alpha}{\sqrt{g_0} + \theta'\,\left(\bar{\xi}\,\sin\psi + \bar{\eta}\,\cos\psi - r\,\cos\psi\right)} \tag{B.82d, e, f}$$

であればいい。ここに上付きドットは ψ に関する微分を表す。また

$$g_0 \equiv (1 + u_0')^2 + (w_0')^2 \tag{B.83}$$

と定義した。α と α_1 は，断面変形によって肉厚面が断面内と長手方向に傾く角度である。

断面変形は，梁そのものの動きに比べればせいぜい断面寸法程度なので，ここでは微小と考えて線形化する。また，断面の変形パターンを想定することによって変数分離をして

$$\bar{\xi}^* = r_0\,f(x)\,\Phi_1(\psi), \quad \bar{\eta}^* = r_0\,f(x)\,\Phi_2(\psi) \tag{B.84a, b}$$

のように置くことにする。力学的考察から Φ_2 は $\cos 2\psi$ が主要な関数であることはわかる。それを用いて式 (B.79) のひずみ場の仮定に代入すれば Φ_1 が求められて，結局

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\,\sin 2\psi, \quad \Phi_2 = \cos 2\psi \tag{B.85a, b}$$

と求めることができる。つまり楕円形に変形するモードである。これより f の高次項をすべて無視すれば

$$\tan\alpha \simeq \sin\alpha \simeq f\,\phi, \quad \tan\alpha_1 \simeq \sin\alpha_1 \simeq r_0\,f'\,\Phi_2, \quad \cos\alpha \simeq 1, \quad \cos\alpha_1 \simeq 1, \quad \phi \equiv \Phi_1 + \dot{\Phi}_2 \tag{B.86a, b, c, d, e}$$

と近似できる。以上の考察から，変位場が

$$u(x, r, \psi) = u_0(x) + Z\,\sin\theta(x) - n\,r_0\,f'(x)\,\Phi_2\,\cos\theta(x), \tag{B.87a}$$

$$w(x, r, \psi) = w_0(x) + r\,\cos\psi + Z\,\cos\theta(x) + n\,r_0\,f'(x)\,\Phi_2\,\sin\theta(x), \tag{B.87b}$$

$$\xi(x, r, \psi) = w_0(x)\,\sin\psi + f(x)\,(r_0\,\Phi_1 - n\,\phi) + Z\,\sin\psi\,\{\cos\theta(x) - 1\} + n\,r_0\,f'(x)\,\Phi_2\,\sin\psi\,\sin\theta(x), \tag{B.87c}$$

$$\eta(x, r, \psi) = w_0(x)\,\cos\psi + r_0\,f(x)\,\Phi_2 + Z\,\cos\psi\,\{\cos\theta(x) - 1\} + n\,r_0\,f'(x)\,\Phi_2\,\cos\psi\,\sin\theta(x) \tag{B.87d}$$

と求められる。ただし Z は，断面変形で縮んだ実質的な z 方向の x 軸からの距離 (z + (断面変形)) で

$$Z = \bar{\xi}\,\sin\psi + \bar{\eta}\,\cos\psi - r\,\cos\psi = -r\,\cos\psi + f\,Z_f, \quad Z_f \equiv (r_0\,\Phi_1 - n\,\phi)\,\sin\psi + r_0\,\Phi_2\,\cos\psi \tag{B.88a, b}$$

と定義した。すなわち，断面変形が無ければ基本的な未知関数は u_0, w_0 の二つの変位，つまり図心の面内の変位のみになる。そこに，式 (B.84) で仮定したパターン Φ_i $(i = 1, 2)$ の振幅 $f(x)$ をもう一つの未知関数として加えることによって，断面変形の自由度を持つ梁理論が定式化できたことになる。

B.5.2 支配方程式

以上の変位場を極座標系の仮想仕事式に代入すれば，すべての支配方程式を Euler 方程式として求めることができる。通常の梁理論と違うのは断面変形のパラメータ f が加わっていることで，この変分原理から断面変形に関する付加的な「つり合い式」を得ることができる。定式化は冗長なので（間違っているかもしれないから。呵呵）省略すると，つり合い式が

$$P_{ss} + N_f + M_f'' - M_{sx}' - m_{Zf}\,\cos\theta - m_{Xf}\,\sin\theta - \left(M_{Zf}\,\sin\theta\right)' + \left(M_{Xf}\,\cos\theta\right)' = 0, \tag{B.89a}$$

$$(N\,\cos\theta + M_{XZ}'\,\sin\theta)' + p_x + \left\{\sin\theta\left(-m_{ZZ}\,\sin\theta + m_{XZ}\,\cos\theta - f'\,M_{Zf}\,\cos\theta - f'\,M_{Xf}\,\sin\theta\right)\right\}' = 0, \tag{B.89b}$$

$$(-N\,\sin\theta + M_{XZ}'\,\cos\theta)' + p_z + \left\{\cos\theta\left(-m_{ZZ}\,\sin\theta + m_{XZ}\,\cos\theta - f'\,M_{Zf}\,\cos\theta - f'\,M_{Xf}\,\sin\theta\right)\right\}' = 0 \tag{B.89c}$$

と求められる。一番上の式が，断面変形に関係した「つり合い式」である。一方，境界条件は

$$f = \text{与える} \quad \text{or} \tag{B.90a}$$

$$M_{sx} - M_f' + M_{Zf}\,\sin\theta - M_{Xf}\,\cos\theta = n_i\left\{\bar{M}_{Zf}\,(\cos\theta - 1) + \bar{M}_{Xf}\,\sin\theta + \bar{M}_{sf} + \bar{M}_{nf}\right\},$$

$$f' = \text{与える} \quad \text{or} \quad M_f = n_i\left(\bar{M}_f\,\cos\theta - \bar{M}_{ff}\,\sin\theta\right), \tag{B.90b}$$

$$u_0 = \text{与える} \quad \text{or} \tag{B.90c}$$

$$N\,\cos\theta + M_{XZ}'\,\sin\theta + \sin\theta\left(-m_{ZZ}\,\sin\theta + m_{XZ}\,\cos\theta - f'\,M_{Zf}\,\cos\theta - f'\,M_{Xf}\,\sin\theta\right) = n_i\,\bar{N},$$

$$w_0 = \text{与える} \quad \text{or} \tag{B.90d}$$

$$-N\,\sin\theta + M_{XZ}'\,\cos\theta + \cos\theta\left(-m_{ZZ}\,\sin\theta + m_{XZ}\,\cos\theta - f'\,M_{Zf}\,\cos\theta - f'\,M_{Xf}\,\sin\theta\right) = n_i\,\bar{V},$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{or} \quad M_{XZ} = n_i\left(\bar{M}_{XZ}\,\cos\theta - \bar{M}_{ZZ}\,\sin\theta - f'\,\bar{M}_f\,\sin\theta - f'\,\bar{M}_{ff}\,\cos\theta\right) \tag{B.90e}$$

となる。最初の二つの式が断面変形に関する境界条件である。

各断面力は次のように定義した。

$$N \equiv \int_A \sigma\,\mathrm{d}A, \quad M_{XZ} \equiv \int_A \sigma\,Z\,\mathrm{d}A, \quad N_f \equiv \int_A \sigma\left(\theta'\,Z_f\right)\mathrm{d}A, \quad M_f \equiv \int_A \sigma\,(-n\,r_0\,\Phi_2)\,\mathrm{d}A, \tag{B.91a, b, c, d}$$

$$P_{ss} \equiv \int_A S_{ss}\left(-\frac{n}{r}\,\dot{\phi}\right)\mathrm{d}A, \quad M_{sx} \equiv \int_A S_{sx}\left\{r_0\,\Phi_1 - n\left(\dot{\phi} + \frac{r_0}{r}\,\dot{\Phi}_2\right)\right\}\mathrm{d}A \tag{B.91e, f}$$

また外力については，物体中の分布外力を X_x, X_z で定義し，端面の表面外力を F_s, F_n, F_x と定義した上で，次のように定義した。

$$p_z \equiv \int_A X_z\,\mathrm{d}A, \quad p_x \equiv \int_A X_x\,\mathrm{d}A, \quad m_{zz} \equiv \int_A X_z\,z\,\mathrm{d}A, \quad m_{xz} \equiv \int_A X_x\,z\,\mathrm{d}A, \quad m_{Zf} \equiv \int_A X_z\,Z_f\,\mathrm{d}A,$$

$$m_{Xf} \equiv \int_A X_x\,Z_f\,\mathrm{d}A, \quad m_{ZZ} \equiv \int_A X_z\,Z\,\mathrm{d}A = m_{zz} + f\,m_{Zf}, \quad m_{XZ} \equiv \int_A X_x\,Z\,\mathrm{d}A = m_{xz} + f\,m_{Xd},$$

$$M_{Zf} \equiv \int_A X_z\,(-n\,r_0\,\Phi_2)\,\mathrm{d}A, \quad M_{Xf} \equiv \int_A X_x\,(-n\,r_0\,\Phi_2)\,\mathrm{d}A, \tag{B.92}$$

$$\bar{N} \equiv \int_A F_x \,\mathrm{d}A, \quad \bar{M}_{xz} \equiv \int_A F_x\, z \,\mathrm{d}A, \quad \bar{M}_{Xf} \equiv \int_A F_x\, Z_f \,\mathrm{d}A, \quad \bar{M}_{XZ} \equiv \int_A F_x\, Z \,\mathrm{d}A = \bar{M}_{xz} + f\,\bar{M}_{Xf},$$
$$\bar{M}_f \equiv \int_A F_x\,(-n\,r_0\,\Phi_2)\,\mathrm{d}A, \quad \bar{V} \equiv \int_A (F_s\,\sin\psi + F_n\,\cos\psi)\,\mathrm{d}A,$$
$$\bar{M}_{zz} \equiv \int_A (F_s\,\sin\psi + F_n\,\cos\psi)\,z\,\mathrm{d}A, \quad \bar{M}_{Zf} \equiv \int_A (F_s\,\sin\psi + F_n\,\cos\psi)\,Z_f\,\mathrm{d}A,$$
$$\bar{M}_{ZZ} \equiv \int_A (F_s\,\sin\psi + F_n\,\cos\psi)\,Z\,\mathrm{d}A = \bar{M}_{zz} + f\,\bar{M}_{Zf}, \quad \bar{M}_{ff} \equiv \int_A (F_s\,\sin\psi + F_n\,\cos\psi)\,(-n\,r_0\,\Phi_2)\,\mathrm{d}A,$$
$$\bar{M}_{sf} \equiv \int_A F_s\,(r_0\,\Phi_1 - n\,\phi)\,\mathrm{d}A, \quad \bar{M}_{nf} \equiv \int_A F_n\,(r_0\,\Phi_2)\,\mathrm{d}A.$$

B.5.3 断面力の変位表示

定義に応力ひずみ関係を代入すれば，断面力を変位および断面変形のパラメータ f で表現できる。ただし，微小ひずみの仮定から軸方向の伸びひずみ e を

$$e \simeq \epsilon + Z\,\theta' - n\,r_0\,\Phi_2\,f'', \quad \epsilon \equiv u_0' + \frac{1}{2}\left\{\left(u_0'\right)^2 + \left(w_0'\right)^2\right\} \tag{B.93a, b}$$

と近似した上で，応力ひずみ関係を

$$\sigma = Ee, \quad S_{ss} = E\,E_{ss}, \quad E_{ss} = -f\frac{n}{r_0}\dot{\phi}, \quad S_{sx} = 2G\,E_{sx}, \quad 2E_{sx} = r_0 f'\Phi_1 - nf'\left(\phi + \frac{r_0}{r}\dot{\Phi}_2\right) \tag{B.94a, b, c, d, e}$$

と仮定した。ここに E は Young 率で, G はせん断弾性係数である。これを用いると断面力と変位の関係は

$$N = EA\left(u_0' + \frac{1}{2}\left\{\left(u_0'\right)^2 + \left(w_0'\right)^2\right\}\right), \quad A \equiv \int_A \mathrm{d}A = 2\pi\,r_0\,t, \tag{B.95a, b}$$
$$M_{XZ} = EI_{ZZ}\,\theta', \quad I_{ZZ} \equiv \int_A Z^2\,\mathrm{d}A = \pi\,r_0^3\,t - f\,\frac{3\pi\,r_0^3\,t}{2}, \tag{B.95c, d}$$
$$P_{ss} = EA_1\,f, \quad A_1 \equiv \int_A \left(-\frac{n}{r}\,\dot{\phi}\right)^2 \mathrm{d}A = \frac{3\pi\,t^3}{4r_0}, \tag{B.95e, f}$$
$$M_{sx} = GI_s\,f', \quad I_s \equiv \int_A \left\{r_0\,\Phi_1 - n\left(\phi + \frac{r_0}{r}\,\dot{\Phi}_2\right)\right\}^2 \mathrm{d}A = \frac{\pi}{4}r_0^3\,t, \tag{B.95g, h}$$
$$N_f = EI_1\,(\theta')^2, \quad I_1 \equiv \int_A Z_f\,Z\,\mathrm{d}A = -\frac{3\pi\,r_0^3\,t}{4} + f\,\frac{5\pi\,r_0^3\,t}{8}, \tag{B.95i, j}$$
$$M_f = EI_2\,f'', \quad I_2 \equiv \int_A (-n\,r_0\,\Phi_2)^2\,\mathrm{d}A = \frac{\pi\,r_0^3\,t^3}{12} \tag{B.95k, l}$$

と表される。

最終的に以上の関係式をつり合い式に代入すると， f については 4 階の常微分方程式になる。これは f そのものと f' の境界条件が規定されていることとも対応している。したがって，ここでは示さないが，以上の支配方程式に対応する仮想仕事式に戻って， f にも適切な「変位関数」を仮定すれば有限要素の定式化もできる。f にも w と同様の 3 次の多項式を仮定すればいい。

B.5.4 安定問題

例として，等曲げを受ける単純梁を対象としよう。ただし，ダイアフラムを付けず，自由に断面変形できるようにする。等曲げだから，モーメントと断面変形は x 方向には一定と考えていい。そうすると，つり合い式 (B.89a) は

$$\left(6 + 5\,\frac{\kappa^2\,r_0^4}{t^2}\right) f = 6\,\frac{\kappa^2\,r_0^4}{t^2} \tag{B.96}$$

となる。ここに κ は曲率 (θ') である。ここで無次元曲率と無次元外力モーメントを

$$\bar{k} \equiv \frac{\kappa\, r_0^2}{t}, \quad \bar{m} \equiv \frac{\bar{M}}{\pi\, E\, r_0\, t^2} \tag{B.97a, b}$$

と定義しておく。式 (B.95) のモーメントと変形の関係から，無次元外力モーメントは

$$\bar{m} = \bar{k}\left(1 - \frac{3f}{2}\right) \tag{B.98}$$

となる。したがって，式 (B.96) (B.98) から外力モーメントと曲率の関係は

$$\bar{m} = \bar{k}\left(1 - \frac{9\bar{k}^2}{6 + 5\bar{k}^2}\right) \tag{B.99}$$

と求められ，結果を図 6.15 と図 B.3 に示した。

これに対し，輪を扁平にしていく解析と曲げを連成させて解析した研究 [79] がある。そこで求められている断面変形をここで用いた変位成分で表すと

$$\frac{\overline{\xi}^*}{r_0} = \left(\frac{k_0}{2} + \frac{11k_0^2}{6}\right)\sin 2\psi + \frac{3}{16}\,k_0^2\,\sin 4\psi, \tag{B.100a}$$

$$\frac{\overline{\eta}^*}{r_0} = \left(k_0 + \frac{2k_0^2}{3}\right)\cos 2\psi + \frac{3}{16}\,k_0^2\,(\cos 4\psi + 3), \tag{B.100b}$$

$$k_0 \equiv \left(1 - \nu^2\right)\bar{k}^2 \tag{B.100c}$$

のように，曲率の高次項までが入った解になっている。これと式 (B.84) を比較すれば明らかなように，1 次項はここのアプローチと一致している。

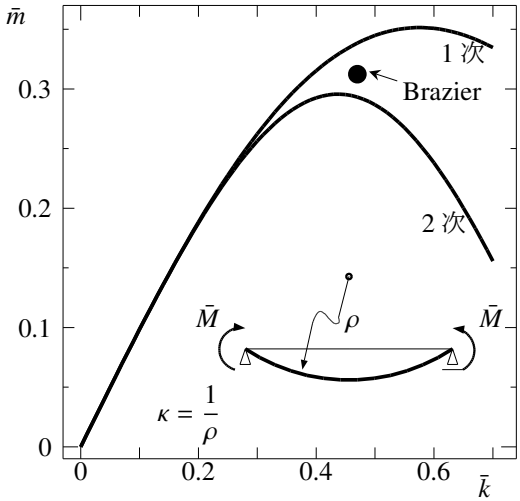


図 B.3 等曲げで断面変形する単純梁

そこで，式 (B.100) の Reissner の解を参考にして，k_0 をここで導入した断面変形のパラメータ f で置き換え

$$\frac{\overline{\xi}^*}{r_0} = \frac{1}{2}\,f\sin 2\psi + \frac{3}{16}\,f^2\,\sin 4\psi,$$

$$\frac{\overline{\eta}^*}{r_0} = f\,\cos 2\psi + \frac{3}{16}\,f^2\,(\cos 4\psi + 3)$$

表 B.4 等曲げで扁平になる単純梁の最大外力モーメント

	本解析手法		Reissner の結果	
	1 次項のみ	2 次項まで	3 次項まで	数値解析
$\bar{m}_{\mathrm{MAX}}$	0.351	0.296	0.289	0.307
$\bar{k}_{\mathrm{cr}}$	0.576	0.437	0.416	0.441

のような断面変形を仮定しよう。これを用いて仮想仕事の原理で再度定式化して，つり合い式を解くと

$$f = \frac{16}{45\bar{k}^2}\left\{\frac{\bar{k}^2}{2} - \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{3\bar{k}^2}{4} + \frac{143\bar{k}^4}{32}}\right\} \tag{B.101}$$

を得る。このとき断面力と変形の関係は

$$\bar{m} = \bar{k}\left(1 - \frac{3\,f}{2} - \frac{1}{2}\,f^2\right) \tag{B.102}$$

となるので，この式 (B.101) (B.102) から，式 (B.99) より若干柔らかい応答が予測される。そのようにして得た結果が図 B.3 の「2 次」であり，最大外力曲げモーメントを文献の結果等と比較したのが表 B.4 である。

B.6 数値解析法

B.6.1 2 点境界値問題の一解法

複雑な系については次節の有限要素法を使わざるを得ないが，1 スパンの 2 点境界値問題であれば，微分方程式を直接数値積分して解を求めることができる。まず左端で与えられた境界条件に加えて未知の量も適当に仮定して右端に向かって数値積分する。次に，その右端の結果と右端で与えられた境界条件の差を解消するように，今度は右から左に（随伴系の微分方程式を）数値積分して左端の未知量を更新する。これを繰り返すことによって解を得ることができる。非線形微分方程式であっても数値積分は容易だ。この節には基礎式となる 1 階連立常微分方程式を列挙するに留め，数値積分の方法 (method of adjoints) については文献 [81] を参照して欲しい。なお，以下の 1 階常微分方程式は表 B.5 にも別の表現を用いてまとめた。

長さ ℓ の梁に対する無次元化した連立微分方程式にするために以下の量と微分を定義する。

$$z_1 \equiv \frac{(N\cos\vartheta + V\sin\vartheta)\ \ell^2}{EI}, \quad z_2 \equiv \frac{(-N\sin\vartheta + V\cos\vartheta)\ \ell^2}{EI}, \tag{B.103a, b}$$

$$z_3 \equiv \frac{M\,\ell}{EI}, \quad z_4 \equiv \frac{u}{\ell}, \quad z_5 \equiv \frac{w}{\ell}, \quad z_6 \equiv \vartheta, \quad (\dot{\ }) \equiv \frac{\mathrm{d}(\ )}{\mathrm{d}\,(x/\ell)} \tag{B.103c, d, e, f, g}$$

すると，まず伸びを考慮した第 2 次近似理論の場の方程式は

$$\dot{z}_1 = -q_1, \tag{B.104a}$$

$$\dot{z}_2 = -q_2, \tag{B.104b}$$

$$\dot{z}_3 = \left\{1 + \beta^2\,(1 - \alpha'_{\mathrm{T}})\ y_1\right\}\ y_2, \tag{B.104c}$$

$$\dot{z}_4 = \left(1 + \beta^2\,y_1\right)\cos z_6 + \alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_2\ \sin z_6 - 1, \tag{B.104d}$$

$$\dot{z}_5 = -\left(1 + \beta^2\,y_1\right)\sin z_6 + \alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_2\ \cos z_6, \tag{B.104e}$$

$$\dot{z}_6 = z_3 \tag{B.104f}$$

と表すことができる。ここに

$$\alpha'_{\mathrm{T}} \equiv \frac{E}{k_{\mathrm{T}}\,G}, \quad y_1 \equiv z_1\ \cos z_6 - z_2\ \sin z_6, \quad y_2 \equiv z_1\ \sin z_6 + z_2\ \cos z_6, \quad q_1 \equiv \frac{p\,\ell^3}{EI}, \quad q_2 \equiv \frac{q\,\ell^3}{EI} \tag{B.105a, b, c, d, e}$$

と定義した。ここに α'_{T} は α_{T} を若干定義し直したパラメータである。これに対し，第 1 次近似理論の場合は，上式のうち

$$\dot{z}_3 = y_2\ \frac{1 + \beta^2\,y_1}{1 + \dfrac{\alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_1}{1 + \beta^2\,y_1}}, \quad \dot{z}_4 = \left(1 + \beta^2\,y_1\right)\cos z_6 + \frac{\alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_2\ \sin z_6}{1 + \dfrac{\alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_1}{1 + \beta^2\,y_1}} - 1, \tag{B.106a, b}$$

$$\dot{z}_5 = -\left(1 + \beta^2\,y_1\right)\sin z_6 + \frac{\alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_2\ \cos z_6}{1 + \dfrac{\alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_1}{1 + \beta^2\,y_1}} \tag{B.106c}$$

の 3 式が変更になる。

また伸びを無視した場合，まず第 2 次近似のつり合い式のうちの式 (B.104c) を

$$\dot{z}_3 = \left(1 - \alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_1\right)\ y_2 \tag{B.107}$$

で置き換えればいい。また第 1 次近似の式 (B.106) の場合は次のようになる。

$$\dot{z}_3 = \frac{y_2}{1 + \alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_1}, \quad \dot{z}_4 = \left(1 + \beta^2\,y_1\right)\cos z_6 + \frac{\alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_2\ \sin z_6}{1 + \alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_1} - 1, \tag{B.108a, b}$$

$$\dot{z}_5 = -\left(1 + \beta^2\,y_1\right)\sin z_6 + \frac{\alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_2\ \cos z_6}{1 + \alpha'_{\mathrm{T}}\beta^2\,y_1} \tag{B.108c}$$

B.6.2 一つの有限要素解析法 — 有限変位の枠組の中で

(1) 微小ひずみの枠組の中で有限回転を考慮する原理

ここでは弾性範囲の有限変位理論を取り扱っているので，微小ひずみの仮定に基づき，簡便だが精度良く有限回転する棒を有限要素解析する手法の一つ [47] を説明する。変形の一般的な記述に**極分解の定理** [62] がある。これは簡単に言うと，全体の変形勾配は回転成分とひずみ成分の積で表されるというものである。つまり微小なひずみのまま大きくたわむピアノ線のようなものを対象とする限りは，大きく見える変位成分から回転成分を除いてしまうと，実質的に変形に寄与する変位成分の大きさは非常に小さいことを示唆している。この定理を念頭に置き，次のように考えて剛性方程式を仮定しよう。

ある有限要素を取り出したとき，例えば左節点の断面のたわみ角分だけ回転した要素座標系で見ると，要素長を短くすればするほどその左右端の相対変位（たわみ角も含む）は小さくなり，その相対変位については微小変位理論の剛性方程式が成立すると考えるのである（図は文献 [47] を参照のこと）。つまり，ある代表的な構造物の長さを L としたときに，外力ベクトルと変位ベクトルを

$$\boldsymbol{f}_i \equiv \left\lfloor {}^{F_i L^2}/_{EI} \;\; {}^{S_i L^2}/_{EI} \;\; {}^{C_i L}/_{EI} \right\rfloor^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{d}_i \equiv \lfloor {}^{u_i}/_{L} \;\; {}^{w_i}/_{L} \;\; \vartheta_i \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{B.109a, b}$$

と定義して，有限変位の平面骨組の**要素剛性方程式**を

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{k}_1\,\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,\{\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{D}\}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{k}_2\,\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,\{\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{D}\} \tag{B.110a, b}$$

で近似するのだ。右辺のベクトルは左端に対する右端の相対変位ベクトルである。ここで $\boldsymbol{T}$ は左の節点の断面の回転角 ϑ_1 で定義される座標変換行列で，$\boldsymbol{D}$ は要素の剛体変位成分で

$$\boldsymbol{T} \equiv \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 & 0 \\ -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} \equiv \left\lfloor \frac{\cos\vartheta_1 - 1}{\xi} \;\; \frac{-\sin\vartheta_1}{\xi} \;\; 0 \right\rfloor^{\mathrm{T}}, \quad \xi \equiv \frac{L}{\ell} \tag{B.111a, b, c}$$

と定義した。ここに ℓ は有限要素の長さである。また剛性行列は，例えば Timoshenko 梁の式 (B.75) を用いて（第 1, 2 次近似モデルの違いを厳密に区別した剛性行列は第 B.6.2 (3) 節に示す）

$$\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{k}_i^{\mathrm{L}} + z_0\,\boldsymbol{k}_i^{\mathrm{NL}}, \quad z_0 \equiv \frac{(\text{要素軸力})L^2}{EI} = \left\{\left(\frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{\cos\vartheta_1 - 1}{\xi}\right)\cos\vartheta_1 - \left(\frac{w_2 - w_1}{L} + \frac{\sin\vartheta_1}{\xi}\right)\sin\vartheta_1\right\}\frac{\xi}{\beta^2}, \tag{B.112a, b}$$

のように幾何剛性成分に相当する成分を分離すると

$$\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{L}} \equiv \begin{pmatrix} -\dfrac{\xi}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{12\xi^3}{\Delta_0} & -\dfrac{6\xi^2}{\Delta_0} \\ 0 & \dfrac{6\xi^2}{\Delta_0} & \dfrac{(2 - 12\phi)\,\xi}{\Delta_0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}_1^{\mathrm{NL}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{6\Delta_1\xi}{5\Delta_0^2} & -\dfrac{1}{10\Delta_0^2} \\ 0 & \dfrac{1}{10\Delta_0^2} & \dfrac{-{}^{1}/_{30} - \Delta_2}{\xi\Delta_0^2} \end{pmatrix}, \tag{B.113a, b}$$

$$\boldsymbol{k}_2^{\mathrm{L}} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\xi}{\beta^2} & 0 & 0 \\ & \dfrac{12\xi^3}{\Delta_0} & \dfrac{6\xi^2}{\Delta_0} \\ \text{Symm.} & & \dfrac{(4 + 12\phi)\,\xi}{\Delta_0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}_2^{\mathrm{NL}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \dfrac{6\Delta_1\xi}{5\Delta_0^2} & \dfrac{1}{10\Delta_0^2} \\ \text{Symm.} & & \dfrac{{}^{2}/_{15} + \Delta_2}{\xi\Delta_0^2} \end{pmatrix}, \tag{B.113c, d}$$

となる。ここに

$$\beta \equiv \frac{\sqrt{I/A}}{L}, \quad \alpha \equiv \frac{E}{Gk_{\mathrm{T}}}, \quad \phi \equiv \alpha\beta^2\xi^2, \quad \Delta_0 \equiv 1 + 12\phi, \quad \Delta_1 \equiv 1 + 10\Delta_2, \quad \Delta_2 \equiv 2\phi + 12\phi^2 \tag{B.114a, b, c, d, e, f}$$

と定義した。あとは式 (B.110) を Newton-Raphson 法で解けばいい。そのときの接線剛性 $\boldsymbol{k}_t$ は式 (B.110) を $\boldsymbol{d}_i$ で偏微分するだけなので

$$\boldsymbol{k}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12} & \boldsymbol{H}_{13}+\boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{H}_{14} & \boldsymbol{H}_{15} & \boldsymbol{H}_{16} \\ \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{22} & \boldsymbol{H}_{23}+\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{H}_{24} & \boldsymbol{H}_{25} & \boldsymbol{H}_{26} \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \end{Bmatrix} \lfloor -\cos\vartheta_1 \quad \sin\vartheta_1 \quad g \quad \cos\vartheta_1 \quad -\sin\vartheta_1 \quad 0 \rfloor \tag{B.115}$$

のように求められる。ここに

$$\boldsymbol{H}_i \equiv \lfloor \boldsymbol{H}_{i1} \ \boldsymbol{H}_{i2} \ \boldsymbol{H}_{i3} \ \boldsymbol{H}_{i4} \ \boldsymbol{H}_{i5} \ \boldsymbol{H}_{i6} \rfloor = \boldsymbol{T}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{S}_i \equiv (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{D}), \tag{B.116a, b}$$

$$\boldsymbol{P}_i \equiv \xi \boldsymbol{T}\boldsymbol{k}_i^{\mathrm{NL}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{D})/\beta^2, \tag{B.116c}$$

$$\boldsymbol{C} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sin\vartheta_1/\xi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos\vartheta_1/\xi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} \equiv \begin{pmatrix} \sin\vartheta_1 & -\cos\vartheta_1 & 0 \\ \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.116d, e}$$

$$g \equiv \{(u_2 - u_1)/L - (\cos\vartheta_1 - 1)/\xi\}\sin\vartheta_1 + \{(w_2 - w_1)/L + \sin\vartheta_1/\xi\}\cos\vartheta_1 \tag{B.116f}$$

と置いた。例えば (n) ステップまでの解が求められているとすると，式 (B.110) から不つり合い力を算定し，式 (B.115) の接線剛性を用いて，$(n+1)$ ステップの修正解が

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{Bmatrix}^{(n+1)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{Bmatrix}^{(n)} + \left(\boldsymbol{k}_t^{(n)} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_1 - \{\boldsymbol{T}\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{D})\}^{(n)} \\ \boldsymbol{f}_2 - \{\boldsymbol{T}\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{D})\}^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{B.117}$$

のようにして求められる。右辺の接線剛性の逆行列がかかっている項が (n) ステップの不つり合い力である。収束は例えば

$$\frac{\left|\boldsymbol{d}^{(n+1)} - \boldsymbol{d}^{(n)}\right|}{\left|\boldsymbol{d}^{(n+1)}\right|} < \text{許容値}, \quad \boldsymbol{d} \equiv \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \end{Bmatrix} \tag{B.118a, b}$$

のようにすればいい。

(2) 数値解析例

図 B.4 は文献 [18] で対象とされた構造である。また図 B.5 は文献 [186] でも対象とされた浅いアーチで，AA' および BB' に分岐経路がある。文献では BB' は示されていないが，ここのアプローチでは見つけられた経路である。ここで定式化された接線剛性は非対称ではあるが，分岐前後で対角要素（固有値）に負の値が現れ，分岐点と荷重方向および変位方向のピークとでその数が変化する。図 B.6 には，斜張橋の塔が面外に座屈することを想定したものであるが，基部に向かって引張られて，魚のかかった釣竿のようになる柱の荷重変位関係を示した。ただし，最初に少しだけ曲がった柱に載荷している。図 6.13, 6.14 等も同じプログラムで数値的に解いて得たものである。

ここで用いたプログラムでは，メモリ節約等のためにスカイライン法 [24] を用い，安定な解析のために弧長法 [186] を併用した。またこのプログラムは，第 B.3.4 節で誘導した 4 種類の座屈公式のそれぞれに対応した剛性行列を用いて，それぞれのモデルの解を求めることができる。このような対応を表 B.5 [5] に示した。このプログラムもまえがきに書いた方法で入手可能である。

(3) 面内梁の最も一般的な剛性行列

式 (B.112) の剛性行列の部分だけを二つの「第 1 次 (B)，第 2 次 (A) 近似」モデルに対して誘導するが，その詳細については文献 [43] を参照のこと。有限変位問題に対しても，微小変位（線形化された）理論の剛性行列

[5] Bernoulli-Euler 梁の場合は非線形性を表す剛性（幾何剛性相当）を用いても用いなくても結果は同じになる。また微小伸び近似の場合の運動場で ϵ を無視してしまうと不伸張理論 (Elastica 相当) になってしまうので注意が必要である。

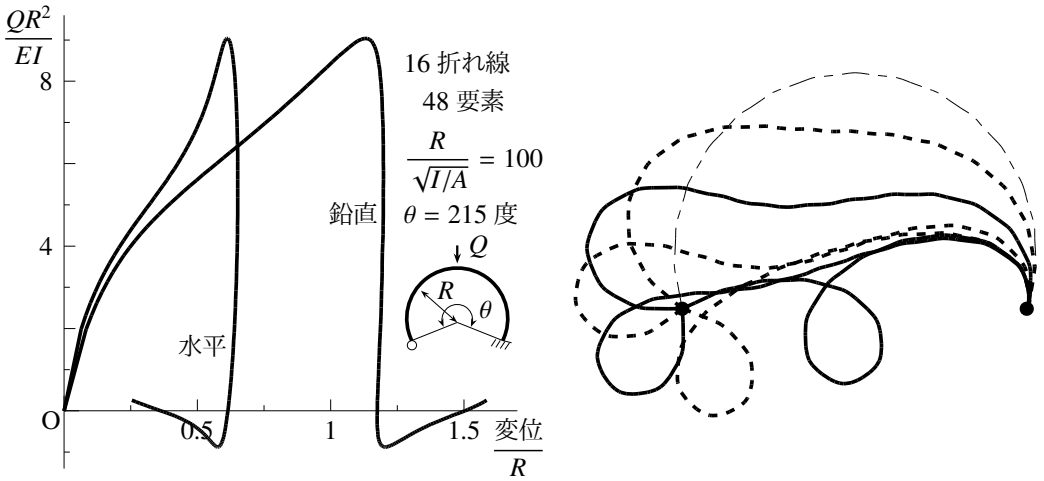


図 B.4 片端ヒンジで片端固定の深いアーチ頂点の荷重変位曲線と変形の進展

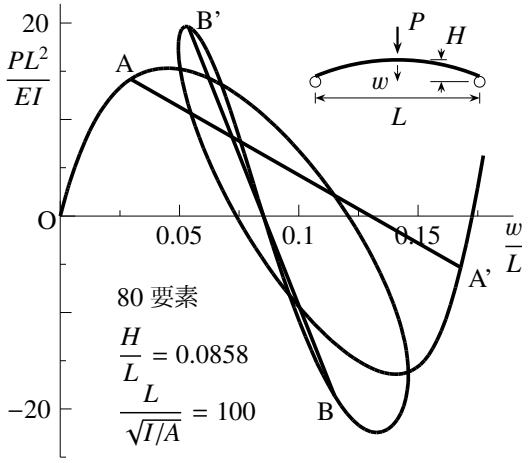


図 B.5 浅いアーチ頂点の荷重変位曲線

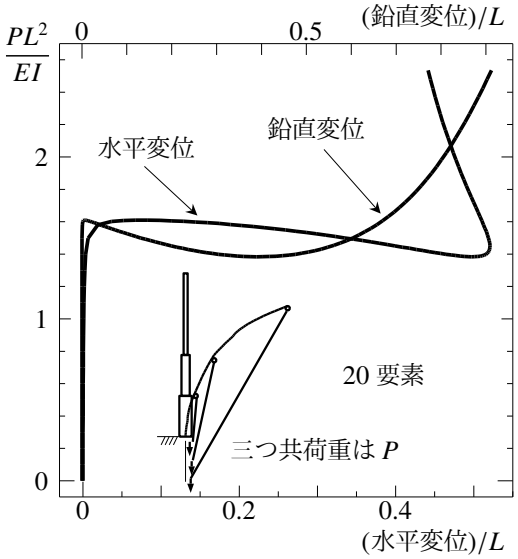


図 B.6 基部に向かって引張られる柱

を用いることができることを前節で示したので，ここには線形化された理論，つまり梁-柱理論レベルの剛性行列を示しておく。$\boldsymbol{f} \equiv \lfloor \boldsymbol{f}_1 \;\; \boldsymbol{f}_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$ と定義して

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{m}})\, \boldsymbol{d} \quad (\mathrm{m} = \mathrm{A}, \mathrm{B}), \quad \boldsymbol{K}^{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}^{\mathrm{L}}_1 & \boldsymbol{K}^{\mathrm{L}}_2 \\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{LT}}_2 & \boldsymbol{K}^{\mathrm{L}}_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{m}} = z \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_1 & {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_2 \\ {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{NLT}}_2 & {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_3 \end{pmatrix} \tag{B.119a, b, c}$$

という関係で剛性行列を定義する。なお，添え字 m の A と B は， Timoshenko 梁理論のせん断力とせん断変形の二つのモデルを区別したものである（表 B.5 参照）。要素長を L としたときの，有限変位の枠組での平面骨組の剛性行列は

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}}_1 \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{12}{(1+\epsilon)^2\Delta} & -\dfrac{6}{(1+\epsilon)\Delta} \\ \text{Symm.} & & \dfrac{4+12\Psi}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{K}^{\mathrm{L}}_2 \equiv \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{12}{(1+\epsilon)^2\Delta} & -\dfrac{6}{(1+\epsilon)\Delta} \\ 0 & \dfrac{6}{(1+\epsilon)\Delta} & \dfrac{2-12\Psi}{\Delta} \end{pmatrix},$$

表 B.5 面内棒の有限変位理論と，それぞれに対応した座屈公式と剛性行列 $[(\ )' \equiv {}^{\mathrm{d}(\ )}/_{\mathrm{d}x}]$

伸び考慮			微小伸び近似		
Bernoulli-Euler 梁	Timoshenko 梁		Bernoulli-Euler 梁	Timoshenko 梁	
	第 2 次近似 (A)	第 1 次近似 (B)		第 2 次近似 (A)	第 1 次近似 (B)
$u' = (1+\epsilon)\cos\vartheta + \gamma\sin\vartheta - 1,\quad w' = -(1+\epsilon)\sin\vartheta + \gamma\cos\vartheta,$ ただし，ここだけは $\epsilon \neq 0$					
$(N\cos\vartheta + V\sin\vartheta)' + p = 0,\quad (-N\sin\vartheta + V\cos\vartheta)' + q = 0$					
$M' - V(1+\epsilon) + N\gamma = 0$ モーメントのつり合いは厳密に成立する			$M' - V + N\gamma = 0$ モーメントのつり合いが近似的にしか成立しない		
$N = EA\epsilon,\quad M = EI\vartheta'$					
$\gamma = 0$	$V = Gk_{\mathrm{T}}A\gamma$	$V = \left(Gk_{\mathrm{T}}A + \dfrac{N}{1+\epsilon}\right)\gamma$	$\gamma = 0$	$V = Gk_{\mathrm{T}}A\gamma$	$V = (Gk_{\mathrm{T}}A + N)\gamma$
式 (B.32)	式 (B.59)	式 (B.56)	式 (B.33) Euler 式	式 (B.60) 改訂 Engesser 式	式 (B.58) Engesser 式
$\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}}\,(+\boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{B}})$	$\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{A}}$	$\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{B}}$	$\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}}\,(+\boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{B}})$ $\epsilon = 0$	$\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{A}}$ $\epsilon = 0$	$\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{B}}$ $\epsilon = 0$

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{L}}_3 \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ & \dfrac{12}{(1+\epsilon)^2\Delta} & \dfrac{6}{(1+\epsilon)\Delta} \\ \text{Symm.} & & \dfrac{4+12\Psi}{\Delta} \end{pmatrix},\quad {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \dfrac{6\Delta^{\mathrm{m}}_1}{5(1+\epsilon)\Delta^2} & -\dfrac{\Delta^{\mathrm{m}}_4}{10\Delta^2} \\ \text{Symm.} & & \dfrac{(1+\epsilon)\left({}^2/_{15} + \Delta^{\mathrm{m}}_2\right)}{\Delta^2} \end{pmatrix}, \tag{B.120}$$

$${}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{6\Delta^{\mathrm{m}}_1}{5(1+\epsilon)\Delta^2} & -\dfrac{\Delta^{\mathrm{m}}_4}{10\Delta^2} \\ 0 & \dfrac{\Delta^{\mathrm{m}}_4}{10\Delta^2} & \dfrac{-(1+\epsilon)\left({}^1/_{30} + \Delta^{\mathrm{m}}_3\right)}{\Delta^2} \end{pmatrix},\quad {}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{NL}}_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \dfrac{6\Delta^{\mathrm{m}}_1}{5(1+\epsilon)\Delta^2} & \dfrac{\Delta^{\mathrm{m}}_4}{10\Delta^2} \\ \text{Symm.} & & \dfrac{(1+\epsilon)\left({}^2/_{15} + \Delta^{\mathrm{m}}_2\right)}{\Delta^2} \end{pmatrix}$$

となる。ここに

$$\Delta \equiv 1 + 12\Psi,\quad \Psi \equiv \frac{\alpha_{\mathrm{T}}}{(1+\epsilon)^2},\quad \Delta^{\mathrm{m}}_1 \equiv \begin{cases} 1 + 20\Psi & (\mathrm{m} = \mathrm{A}) \\ 1 + 10\Delta^{\mathrm{m}}_2 & (\mathrm{m} = \mathrm{B}) \end{cases}, \tag{B.121}$$

$$\Delta^{\mathrm{m}}_2 \equiv \begin{cases} 2\Psi - 24\Psi^2 & (\mathrm{m} = \mathrm{A}) \\ 2\Psi + 12\Psi^2 & (\mathrm{m} = \mathrm{B}) \end{cases},\quad \Delta^{\mathrm{m}}_3 \equiv \begin{cases} 2\Psi + 48\Psi^2 & (\mathrm{m} = \mathrm{A}) \\ \Delta^{\mathrm{m}}_2 & (\mathrm{m} = \mathrm{B}) \end{cases},\quad \Delta^{\mathrm{m}}_4 \equiv \begin{cases} 1 - 720\Psi^2 & (\mathrm{m} = \mathrm{A}) \\ 1 & (\mathrm{m} = \mathrm{B}) \end{cases}$$

と定義した。また，z と ϵ は

$$z \equiv \frac{1}{\beta^2}\left\{\left(\frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{\cos\vartheta_1 - 1}{\xi}\right)\cos\vartheta_1 - \left(\frac{w_2 - w_1}{L} + \frac{\sin\vartheta_1}{\xi}\right)\sin\vartheta_1\right\},\quad \epsilon = z\beta^2 \tag{B.122a, b}$$

で算定できる。Bernoulli-Euler 梁の場合は $\alpha_{\mathrm{T}} = 0$ とすればいい。「伸びを考慮」したモデル B が，梁に対して最も正確な解を与えてくれる。有限回転に対処するには式 (B.110) の剛性行列をこの節のもので置き換えるだけでいいが，$\boldsymbol{k}^{\mathrm{L,NL}}_1$ を $\boldsymbol{K}^{\mathrm{L,NL}}_2$ で，$\boldsymbol{k}^{\mathrm{L,NL}}_2$ を ${}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{L,NL}}_3$ で置き換えることには注意して欲しい。

(a) 固定端の場合　　(b) 回転ばね端の場合

図 B.7 片端を斜面上で支持された棒

B.7 やや不安定な梁-柱の座屈と数値解

B.7.1 片端を斜面上で支持された棒

固定端の場合: 文献 [9] の演習問題で，図 B.7 のように右端の支点が斜面に置いてある。右端は軸力による水平変位に相当する量の鉛直成分だけの鉛直変位が生じるから，正確には

$$w(\ell) - u(\ell)\,\tan\beta = 0$$

が境界条件になる。$\beta = 90$ 度なら $u(\ell) = 0$ で何も起きない。しかしこれを用いるためには平面内の 2 方向の支配方程式を用いなければならない。しかし $u(\ell)$ は軸力による棒の縮み量に相当するので，少なくとも β が小さい細長い棒である限りは上式左辺第 2 項はかなり小さいと考えていい。このような面内挙動についてはあとで数値解析で明らかにすることにして，ここではまず棒の 1 次元モデルとしての座屈荷重の固有値解析を試みる。まず図 B.7 (a) のように左端が固定されている場合，反力を図のように定義すると，全体のつり合いから

$$F_1 = P - H\sin\beta, \quad S_1 = H\cos\beta, \quad C_1 = -\left(\ell + \frac{w(\ell)}{\tan\beta}\right) H\cos\beta \underline{+\, w(\ell)\,(P - H\sin\beta)} \tag{B.123a, b, c}$$

となる。これを用いて境界条件は，$x = 0$ で

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad S_1 = -\left(-EI\,w'''(0) - F_1\,w'(0)\right), \quad C_1 = -\left(-EI\,w''(0)\right)$$

であり，$x = \ell$ では

$$S_2 = -EI\,w'''(\ell) - F_1\,w'(\ell) = -H\cos\beta, \quad C_2 = -EI\,w''(\ell) = 0 \tag{B.124a, b}$$

となる。斜面が無い $\beta = 0$ のときの $x = \ell$ の境界条件式 (B.124a) は，S_2 を与えるのではなく $w(\ell) = 0$ であることに注意しなければならない。また，$x = 0$ の条件は，変位も反力も同時に規定しているように見えることから，果たして境界条件と呼べるかどうかは疑問ではあるが，右端が斜面上の支持であることから $w(\ell)$ を規定することはできず，したがって反力 H を陽に含めざるを得ないため，こうなると考えた。さて，その右端が斜面上の支持であることは，式 (B.123) の C_1 の右辺の下線・波下線部の 2 箇所のみにしか現れない。しかし，波下線部は非線形項であり，以下の線形固有値解析には含めることができない。それはつまり，右の支点が斜面上にあるという条件が以下の固有値解析には含まれないことを示している。

棒の軸力 N は支点反力 H の分だけ P より減って F_1 であると考えればいいから，梁-柱理論の一般解は

$$w(x) = a + bx + c\sin\mu x + d\cos\mu x, \quad \mu \equiv \sqrt{\frac{F_1}{EI}} = \sqrt{\frac{P - H\sin\beta}{EI}} \tag{B.125a, b}$$

である。これを境界条件に代入すると，せん断力の条件は左右端で同じ式になり，結局，残りの五つが a~d と H に対して

$$a + d = 0, \quad b + \mu c = 0, \quad \mu^2 b = \frac{H}{EI}\cos\beta, \quad c\sin\mu\ell + d\cos\mu\ell = 0, \tag{B.126a, b, c, d}$$

$$-d\mu^2 = -\frac{H\ell}{EI}\cos\beta \underline{+\, \mu^2\left\{a + b\ell + c\sin\mu\ell + d\cos\mu\ell\right\}} \tag{B.126e}$$

となるので，H を消去して特性方程式を求めると

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \\ 1 & 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell+1 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \\ 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \end{pmatrix} = \sin\mu\ell\,\cos\mu\ell - \sin\mu\ell\,\cos\mu\ell = 0 \tag{B.127}$$

と従属関係式であることがわかる。つまり，P あるいは μ の値によらず特性方程式は常に成立している。これは，右端支点が斜面上にあることを考慮できていないことから，条件が一つ足りないことを示している。

そこで，これに対するたわみモードを求めると

$$w(x) = \frac{a}{\sin\mu\ell}\left[\sin\mu\ell - \mu x\,\cos\mu\ell - \sin\{\mu(\ell - x)\}\right] \tag{B.128}$$

となることから，右端のたわみ W は

$$W \equiv w(\ell) = \frac{a}{\sin\mu\ell}(\sin\mu\ell - \mu\ell\cos\mu\ell) \tag{B.129}$$

となる。図 B.8 に，3 種類の $\mu\ell$ の値に対するモードを描いた。さて，前述のように梁-柱はほとんど縮むことができないことから，座屈する瞬間にはまだ右支点が斜面を登る量はほぼ無視でき，$w(\ell) = 0$ だと考え，この式 (B.129) から座屈の特性方程式を求めると

$$W = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\mu\ell - \mu\ell\cos\mu\ell \quad \rightarrow \quad \tan\mu\ell - \mu\ell = 0 \tag{B.130}$$

となる。これは，右端が水平な床にある片端固定・片端単純支持棒の特性方程式と一致する。ただし，μ の中にも H が残り

$$\mu^2 = \frac{F_1}{EI} = \frac{P}{EI} - \frac{H}{EI}\sin\beta$$

であり，支点反力 H は不定のままなので，この特性方程式も解けていない。また上の条件から，$\cos\mu\ell = 0$ あるいは $\sin\mu\ell = 0$ でない限り $H = 0$ は自明な解なのだ。そして右端が何らかの支持をされていることから $\cos\mu\ell = 0$ ではあり得ない。さらに外力が固定端に向いていない限り $\sin\mu\ell = 0$ ではあり得ない。したがって $H \neq 0$ でなければならないことになる。ただし，後述の数値解析でも確かめられるが，座屈する瞬間の支点反力 H あるいはせん断力 $H\sin\beta$ は，棒の軸力 N と比較してかなり小さいと考えていいので，実際には

$$\mu^2 = \frac{P}{EI} - \frac{H}{EI}\sin\beta \simeq \frac{P}{EI} \tag{B.131}$$

と近似していいと予想される。

それならば，モーメントのつり合いにおける右の支点の変位の影響を無視してもよさそうだ。したがって，式 (B.123) の下線部，つまり式 (B.126) の下線部を無視すると，その特性方程式は

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \\ 0 & \ell & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mu\ell\cos\mu\ell - \sin\mu\ell = 0$$

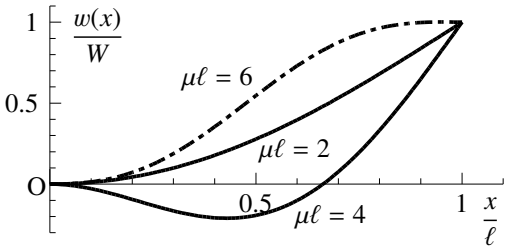


図 B.8 座屈モード

となり，上式 (B.130) が得られる。式 (B.123) の下線部を無視したことは，$w(\ell) = 0$ と置いたことと同じであるから，片端固定・片端単純支持棒の特性方程式が得られるのは当然である。

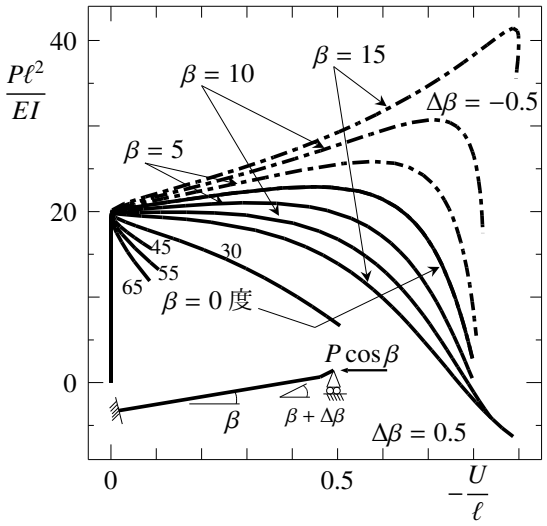


図 B.9 大変位数値解析

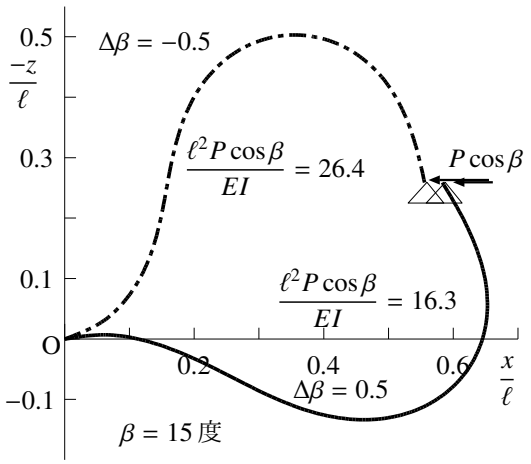


図 B.10 座屈後の変形

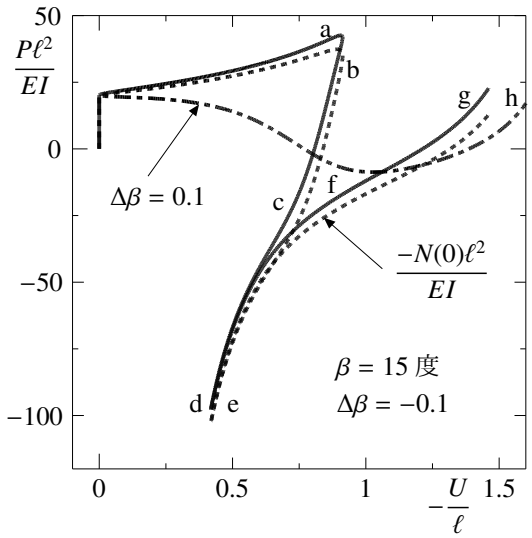


図 B.11 $\beta = 15$ 度の場合の分岐経路

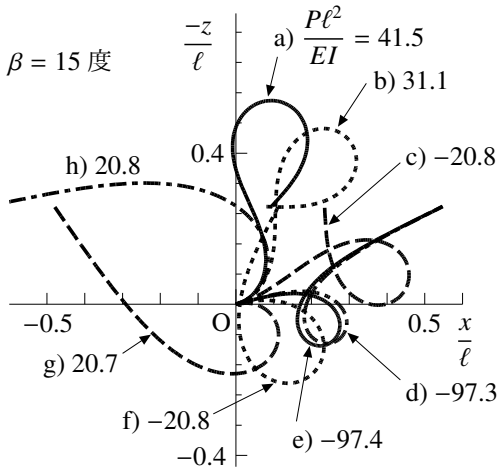


図 B.12 各段階における変形

そこで，弧長法を用いた有限変位有限要素（第 B.6.2 (1) 節参照）で数値解析をしたのが図 B.9 である。細長比はすべて 1,000 に設定し，軸の伸び縮みが無い Elastica に近いモデルになっているが，解析は「伸び考慮」の「第 1 次近似モデル」を用いた。図中に示したように，数値解析で与える外力を $P\cos\beta$ とみなして作用させたが，縦軸はそれを $\cos\beta$ で割った P で算定してあり，図 B.7 (a) の元の問題の P と同じ定義になる。横軸の U は載荷点の水平右向きの変位 $U \equiv u(\ell)$ である。棒は 16 要素でモデル化したが，座屈をさせるために一番右端の 1 要素だけ，$\Delta\beta = \pm 0.5$ 度だけさらに傾けてある。β は図のように反時計回りを正にした。$\beta = 0$ の場合の座屈荷重は式 (B.130) から $\mu\ell \simeq 4.493$, $\frac{P\ell^2}{EI} \simeq 20.19$ なので，$\beta \neq 0$ の場合にもほとんど β の影響が無いことをこの結果は示している。これは前述のように，支点反力 H の影響が非常に小さいからである。また，応答が柔らかい方（実験では生じるであろうと考えられる方）の $\Delta\beta > 0$ の場合，β が 10 度くらいよりも大きくなると座屈点は不安定になる。ちなみに $\Delta\beta$ の符号の違いによる変形形状の違いを図 B.10 に示したが，初期不整に追随した変形になっている。

$\beta = 15$ 度の場合に，要素数を増やして 32 要素を用い，先端の 1 要素だけを 29.9 度の傾きにして初期不整を小さくし，弧長も小さくして求めた最小分岐点からの分岐経路が図 B.11 の実線である。座屈後はピークまでは

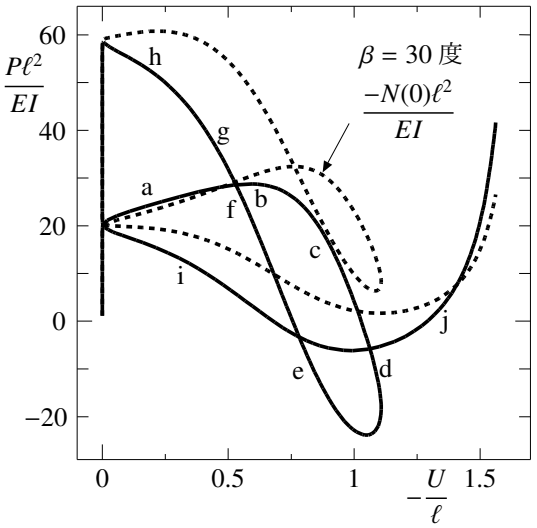


図 B.13 $\beta = 30$ 度の場合の分岐経路

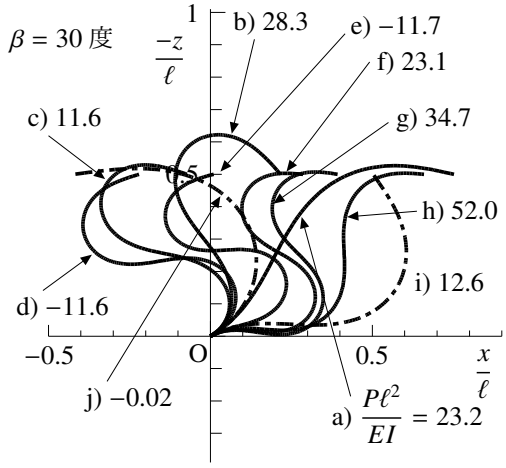


図 B.14 各段階における変形

安定だった。一点鎖線は先端の 1 要素だけを 30.1 度の傾きにした場合だ。図 B.11 の破線は左の埋め込み端の棒の軸力 $N(0)$ で，座屈荷重レベルでは P（実線）と軸力 N の差が無いことが明らかである。なお，図中 a~g および h で示した状態の変形が図 B.12 であるが，状態 a と c, f, g, h は安定だった。

さらに $\beta = 30$ 度と大きくした場合の最小分岐点からの二つの経路が図 B.13 で，状態 a~h および i, j の変形が図 B.14 である。ここでも 32 要素を用い，先端の 1 要素だけ 29.9 度の傾きにし，小さめの弧長を用いた。図 B.13 の破線は左の埋め込み端の棒の軸力 $N(0)$ で，この場合も P と軸力 N の差がほとんど無い。つまり支点反力 H が軸力に比べて無視できるほど小さいことを示している。このことからも，式 (B.131) の近似が適切であることを示している。なお，状態 a と j のみが安定だった。この図 B.14 の変形形状と図 B.8 のモードを比較すると，$\mu\ell$ が初期座屈点のその値 4.493 より小さい場合のモードが，$\frac{P\ell^2}{EI} \simeq 20$ で荷重低下する方の分岐経路の一点鎖線の変形形状 i や j に似ている。一方，4.493 より大きい場合のモードが，$\frac{P\ell^2}{EI} \simeq 20$ で荷重増加する方の分岐経路の実線の変形形状 a~h に似ている。このように，荷重レベルと変形モードの関係も整合している。

表 B.6 座屈荷重

n	$\mu_n\ell$	$\frac{P_n\ell^2}{EI}$
1	4.4934	20.191
2	7.7253	59.680
3	10.904	118.90
4	14.066	197.86
5	17.221	296.55

次に，16 要素に戻して $\beta = 30$ 度のまっすぐな棒に大きめの弧長を用いて載荷した場合の結果が図 B.15 である。ただし，第 2 分岐経路からの経路（一点鎖線）は，まっすぐな棒のまま分岐直前までを載荷したあと，先端の 1 要素を 0.1 度曲げて載荷を続けることによって求めた。式 (B.130) から低次五つの座屈荷重を表 B.6 に示した。このように，実際の実験で多分観察されるであろう最小分岐点からの不安定な座屈経路以外は，すべて一筆書きのように連続しているのはとても面白い。この図 B.15 の a~d の状態での各変形をそれぞれ図 B.16 に示した。図 B.14 と比較すれば高次モードになっているのが明らかだ。もちろんすべて不安定な状態である。図 B.14 の状態 a と i が 1 次の座屈における初期不整による安定経路とそれに対する不安定経路の組になっており，安定な状態は右支点付近は上に凸の変形をしている。同様に，図 B.14 の状態 h と図 B.16 の状態 d が，2 次の座屈における初期不整による安定経路とそれに対する不安定経路の組になっている。この場合も安定な状態は右支点付近が上に凸の不自然な変形をしている。

さて，角度 β が 90 度に近い場合の 32 要素のまっすぐな棒の結果が図 B.17 である。下の横軸が角度の大きい $\beta > 88$ 度の場合の実線に対するもので，上の横軸が $\beta = 75, 80$ 度の一点鎖線に対するものである。角度 β が 88 度より小さい場合には，この換算外力 P で表した座屈荷重は片端固定・片端単純支持棒の座屈荷重 $\frac{P\ell^2}{EI} \simeq$

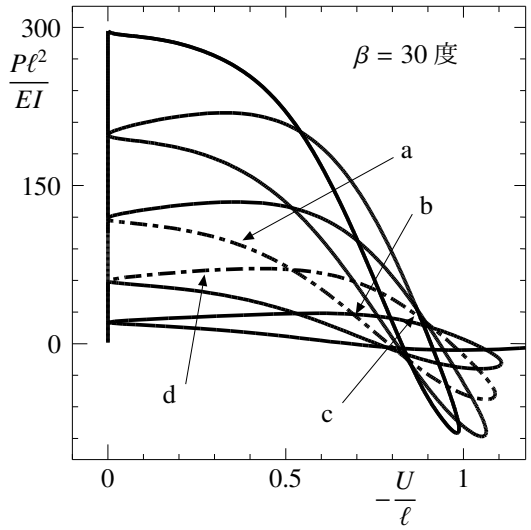


図 **B.15** $\beta = 30$ 度のときの高次分岐経路

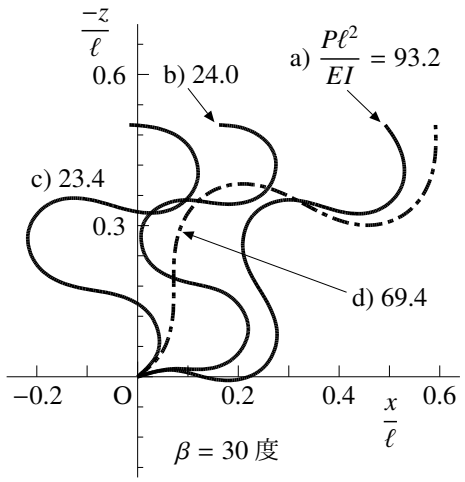


図 **B.16** 高次座屈後の変形

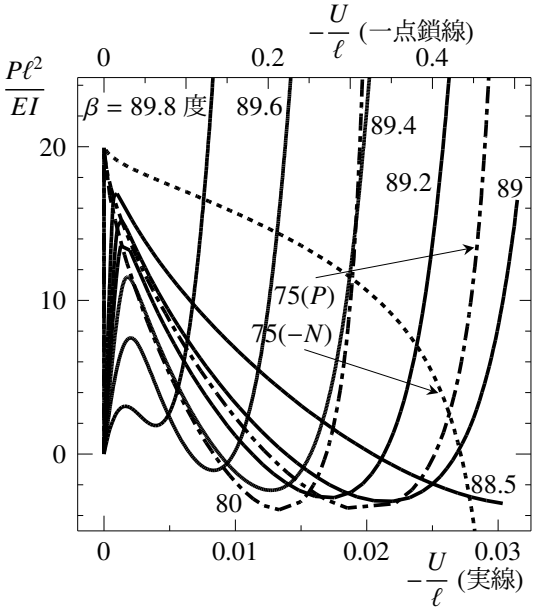


図 **B.17** 角度βが大きい場合

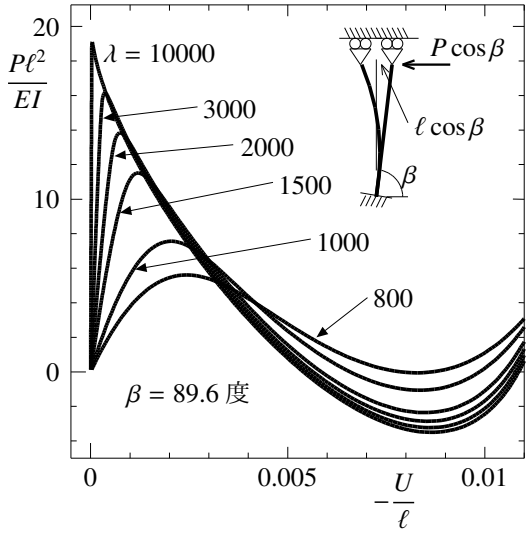


図 **B.18** βが大きい場合の細長比の影響

20.19 になっている。また$\beta = 75$ 度の場合には，埋め込み端側の軸力 N も破線（図中 75($-N$) と記した）で示したが，このくらいの大きな角度であっても，支点反力 H の影響も含めた軸力 N が座屈荷重に至って座屈している。そして数値結果は，実際に与えた外力を $\cos\beta$ で割った縦軸 P で表現しても， 20.19 の荷重レベルで座屈している。また cos(75度) = 0.2588 であることから，横軸が 0.4 を超える付近から軸力 N が引張になるのも当たり前である。そのあとの変位 U はもちろん，せいぜい $\ell\cos\beta$ の 2 倍程度までしか変位できないことになる。

しかし角度βが 88 度よりも大きな場合には，上横軸のスケールで描いた場合には分岐座屈のように見えてしまうが，実際にはこの図 B.17 のようにピークを持つ不安定な挙動になる。これは，図 B.18 の中の対象モデルの図に示したように，棒は座屈せずに曲がらないまま縮んで左の方に移動する変形になるからだ。これは棒が縮んで座屈しないためなので，軸の伸び縮みを無視した Elastica にもっと近づけるために，細長比 λ をさらに大きくして再計算したところ，例えば細長比が 10,000 より大きい場合には，式 (B.130) で与えられる座屈荷重値 $\frac{P\ell^2}{EI} \simeq 20.19$ で分岐座屈した。逆に細長比を小さくして伸び縮みし易くした場合の結果を図 B.18 に示した。

つまり，細長比が 10,000 より小さい場合には座屈せずにほぼまっすぐのまま縮んで左方に変位する。梁-柱理論も軸方向のひずみは連成させずに解ける線形理論になっており，その線形座屈解析から得られる結果は，軸ひずみを無視した結果になっているはずだ。結局，ここの数値解析で細長比をかなり大きくした場合の結果と上で求めた線形座屈解析結果とはよく整合していることが明らかになった。

さて，式 (B.127) の特性方程式が不定であったことが物理的におかしいことを示すために，右端に e だけの下方初期変位がある場合を解いてみる。この場合には，変位の一般解の係数は次式を満たす必要がある。

$$\left(A\right) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \\ 1 & 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell + 1 \end{pmatrix}, \quad \left\{y\right\} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -e \end{Bmatrix}, \quad \left(A\right) \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \left\{y\right\} \tag{B.132a, b, c}$$

そこで， p.243 で述べた Alternative Theorem を用いて解の存在について検討する。上式 (B.132) の付随的問題である $\left(A\right)^{\mathrm{T}}\left\{v\right\} = \left\{0\right\}$ の解を求めると，$\left\{v\right\} = \lfloor 1\ 0\ 1\ \ -1 \rfloor^{\mathrm{T}}$ となるので，初期不整に対して解く問題の右辺と $\left\{y\right\}^{\mathrm{T}}\left\{v\right\} \neq 0$ となり，この代数方程式 (B.132) は解を持たない。逆に，境界条件式 (B.123) で下線部の $w(\ell)$ の項を無視した場合には

$$w(x) = \frac{-e}{\Delta}\left[\sin\mu\ell - \mu x\,\cos\mu\ell - \sin\left\{\mu\left(\ell - x\right)\right\}\right], \quad \Delta \equiv \mu\ell\,\cos\mu\ell - \sin\mu\ell$$

これは式 (B.128) の $\frac{a}{\sin\mu\ell}$ を $\frac{-e}{\Delta}$ で置き換えたものに一致する。やはり境界条件は，右端で $w(\ell) = 0$ とするのが正しいと考えられる。

回転ばね端の場合: 次に図 B.7 (b) のような回転ばね支持の場合も同様に反力を定義し，モーメントのつり合いの非線形項を無視すると，その全体のつり合いから

$$F_1 = P - H\sin\beta, \quad S_1 = H\cos\beta, \quad C_1 = -\ell H\cos\beta \underline{+ w(\ell)\ (P - H\sin\beta)} \tag{B.133a, b, c}$$

となる。これを用いて境界条件は， $x = 0$ で

$$w(0) = 0, \quad k\,w'(0) = -\left(-EI\,w''(0)\right) = C_1, \quad S_1 = -\left(-EI\,w'''(0) - F_1\,w'(0)\right)$$

であり， $x = \ell$ では

$$S_2 = -EI\,w'''(\ell) - F_1\,w'(\ell) = -H\cos\beta, \quad C_2 = -EI\,w''(\ell) = 0 \tag{B.134a, b}$$

となる。式 (B.134a) は $x = 0$ のせん断力の条件と同じになるので考慮する必要が無い。この境界条件に式 (B.125) の一般解を代入すると， H を消去すれば

$$a + d = 0, \quad k\left(b + \mu\,c\right) + EI\,\mu^2\,d = 0, \quad c\sin\mu\ell + d\cos\mu\ell = 0, \tag{B.135a, b, c}$$

$$-d\mu^2 = -\ell\mu^2\,b^2 \underline{+ \mu^2\left\{a + b\ell + c\sin\mu\ell + d\cos\mu\ell\right\}} \tag{B.135d}$$

となるので，特性方程式は

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha'_s & \alpha'_s\,\mu & \mu^2\ell \\ 0 & 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \\ 1 & 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell + 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} \alpha'_s & \alpha'_s\,\mu & \mu^2\ell \\ 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \\ 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \end{pmatrix} = \sin\mu\ell\,\cos\mu\ell - \sin\mu\ell\,\cos\mu\ell = 0$$

となる。ここに α'_s は，ばね定数 k と曲げ剛性 EI の比で

$$\alpha'_s \equiv \frac{k\ell}{EI} \tag{B.136}$$

と定義した。この場合も，μ の値によらず，またばね定数 k の値によらず，特性方程式は常に成立する。そこで，この場合もたわみを求めると

$$w(x) = \frac{a}{\alpha'_s \sin\mu\ell}\left\{\alpha'_s\,(\sin\mu\ell - \mu\ell\,\cos\mu\ell) + (\mu\ell)^2 \sin\mu\ell\right\}$$

となるので，右端のたわみ $W \equiv w(\ell)$ が零になる条件から座屈の特性方程式は

$$W = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha'_s\,(\mu\ell\,\cos\mu\ell - \sin\mu\ell) - (\mu\ell)^2 \sin\mu\ell = 0 \tag{B.137}$$

と求められる。α'_s が零のときは両端単純支持棒の座屈特性方程式 $\sin\mu\ell = 0$ になり，α'_s が無限大のときは片端固定・片端単純支持棒の座屈特性方程式 (B.130) に一致する。そして式 (B.137) は，μ の中に未知の H を含むことを除けば，$\beta = 0$ の水平な床に置かれた片端回転ばね支持・片端単純支持棒の座屈の特性方程式に形式的には一致する。

ここでも再度，モーメントのつり合いにおける $w(\ell)$ の影響を無視し，式 (B.133) つまり式 (B.135) の下線部を無視すると，特性方程式は

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha'_s & \alpha'_s\mu & \mu^2\ell \\ 0 & 0 & \sin\mu\ell & \cos\mu\ell \\ 0 & \ell & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha'_s\,(\mu\ell\,\cos\mu\ell - \sin\mu\ell) - (\mu\ell)^2 \sin\mu\ell = 0$$

となり，式 (B.137) が得られる。

B.7.2 リンクで押された棒

大きく回転する例として図 B.19 (a) のリンクで押された片持ち棒を対象とする。図のように反力を定義すると，全体のつり合いより

$$F_1 = P, \quad S_1 = H, \quad C_1 = eP - (\ell + a)\,H$$

である。境界条件は $x = 0$ では

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad S_1 = EI\,w'''(0) + P\,w'(0), \quad C_1 = EI\,w''(0)$$

であり，$x = \ell$ では

$$S_2 = -EI\,w'''(\ell) - P\,w'(\ell) = -H, \quad C_2 = -EI\,w''(\ell) = 0$$

となる。これに一般解を代入すると，せん断の境界条件は左右で同じ式になり，最終的には a~d と H に対する五つの条件になり，それを解くと

$$w(x) = e\,\frac{(1-\cos\mu x)\sin\mu\ell + (\sin\mu x - \mu x)\cos\mu\ell}{\sin\mu\ell - \mu\ell\left(1+\dfrac{a}{\ell}\right)\cos\mu\ell}, \quad H = \frac{-\left(\dfrac{e}{\ell}\right)P\mu\ell\cos\mu\ell}{\sin\mu\ell - \mu\ell\left(1+\dfrac{a}{\ell}\right)\cos\mu\ell} \tag{B.138a, b}$$

と求められる。ただし，ここでは

$$\mu^2 \equiv \frac{P}{EI}$$

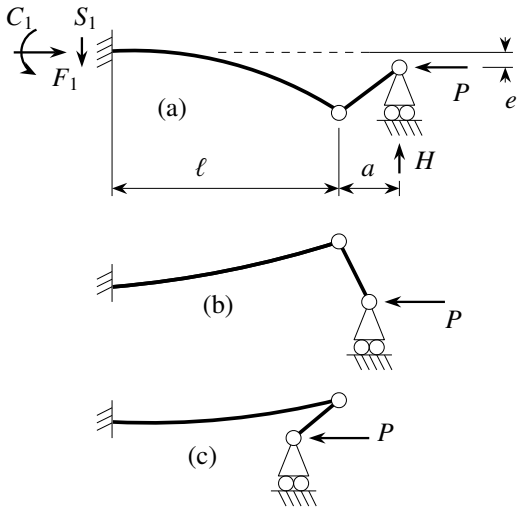


図 **B.19** リンクで押された棒

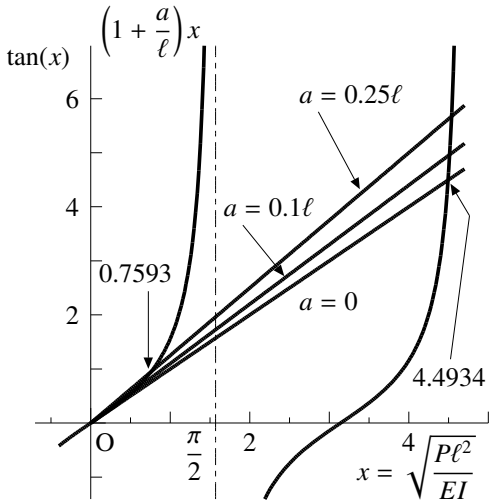


図 **B.20** 特性方程式の解

である。そこで，$x = \ell$ のたわみを求めると

$$W \equiv w(\ell) = e\,\frac{\sin\mu\ell - \mu\ell\cos\mu\ell}{\sin\mu\ell - \mu\ell\left(1+\dfrac{a}{\ell}\right)\cos\mu\ell} \tag{B.139}$$

となる。したがって，$a = 0$ のときは分子と分母が同じになるので $w(\ell) = e$ である。

座屈荷重については，式 (B.138) つまり式 (B.139) の分母が零になる条件から

$$\tan\mu\ell - \mu\ell\left(1+\frac{a}{\ell}\right) = 0$$

が特性方程式になる。これは $a = 0$ のときは，片端固定・片端単純支持棒の座屈荷重の特性方程式と一致する。面白いのは，$a \neq 0$ のときに，その座屈荷重よりもかなり小さい座屈荷重になるということである。つまり，図 B.20 に示したように，$a = 0$ ならこの解の最小解は $\mu\ell \simeq 4.4934$ であるが，$a \neq 0$ になった途端に $0 < \mu\ell < \pi/2$ の間に解が発生するからである。表 B.7 にその座屈荷重を列挙した。

表 B.7 座屈荷重

$\frac{a}{\ell}$	$\mu\ell$	$\frac{P\ell^2}{EI}$
0.05	0.3762	0.1415
0.10	0.5175	0.2678
0.15	0.6175	0.3812
0.20	0.6954	0.4837
0.25	0.7593	0.5765

そこで，先端に $a/\ell = \frac{1}{4}$ の長さのリンクが水平から時計回りに 2.3 度傾いたモデル，つまり $e/a = \tan(2.3\text{度}) = 0.04016, e/\ell = 0.01004$ で取り付けたモデルを対象にして数値解析を行った。ここでも細長比は 1,000 に設定した。棒は 16 要素でモデル化し，リンクはどうせ変形しないので 1 要素とした。その結果が図 B.21 の実線と破線である。実線は棒端部の下方への変位 $W \equiv w(\ell)$ であり，破線は載荷点の水平右向きの変位 $U \equiv u(\ell + a)$ である。この場合の座屈荷重は表 B.7（図 B.20 中にも示した）から $\sqrt{\frac{P\ell^2}{EI}} \simeq 0.7593$，つまり $\frac{P\ell^2}{EI} \simeq 0.5765$ になる。偏心 e のために，その最初の座屈前から荷重が正の最大値（図中の点 A 付近）に至るまでは安定で，そのあと，今度は荷重が負の最大値に至るまでは不安定である。つまり，支点がヒンジの下にもぐりこんだあと左に移動してしまうまでは，P は次第に小さくなってつり合い，ヒンジ真下の位置を過ぎたところからは $P < 0$ でブレーキをかけながら変形が進む。負の最大荷重に至ったあとは，片端固定・片端単純支持棒の座屈に至るまでは安定である。つまり，図 B.19 の (b) や (c) のように，リンクの部分がくるっと 1 回転して，載荷支点が棒端部のヒンジよりも左に移動してしまってから，片端固定・片端単純支持棒の載荷状態に至るようになるのである。最初の座屈点付近までの変位 W の，式 (B.139) の梁-柱理論解と数値解を比較したのが図 B.22 である。破線が図 B.21 の実線で示した数値解である。変位が小さい範囲では梁-柱理論によっても精度よく解が求

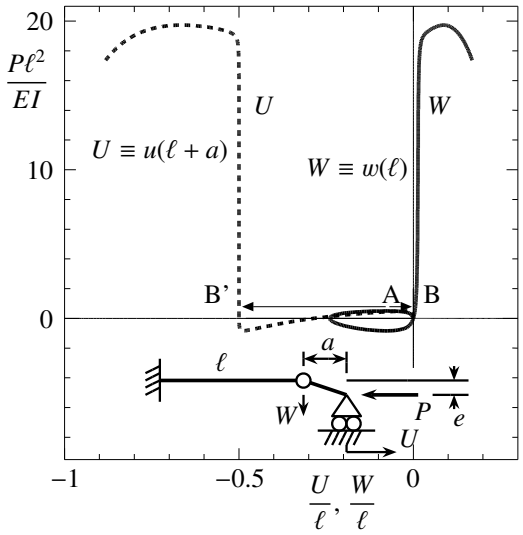


図 B.21 大変位数値解析

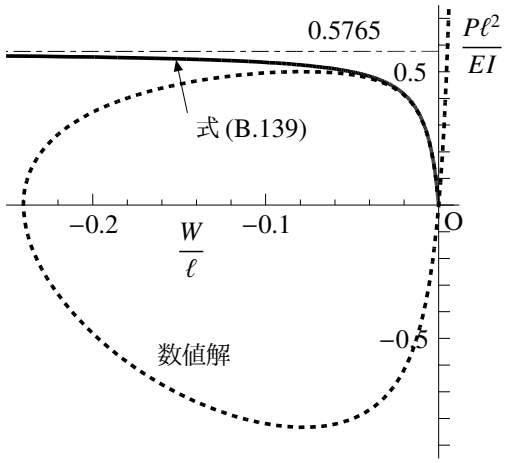


図 B.22 解析解と数値解の比較

められていることがわかる。

実際に荷重制御で実験した場合には，図 B.21 の $\frac{P\ell^2}{EI} \simeq 0.5$ レベルに達した点 A 付近の状態で，その荷重レベルのまま， W は図の右方の $W > 0$ の点 B 付近の解へ， U も図のように $U = -\ell/2$ の点 B' 付近の解へと動的に飛び移ることになるだろう。そのあとは変位にはあまり変化がなく，片端固定・片端単純支持棒の座屈荷重 $\frac{P\ell^2}{EI} \simeq 20.19$ 付近で再度座屈をするはずだ。ちなみに，図 B.19 の (a) のような変形は，初期状態として右側支点の位置よりも図の下方にヒンジが位置するように曲がった状態の棒を圧縮した場合に得ることができるが，棒端部の変位 W が常に $W > 0$ である（図 B.21 の実線のループが $W > 0$ 側にある）ことを除けば，変形特性は上述の結果とほぼ同じだった。

‘Take care!’ 「じゃぁね」とでも訳すか。‘Take it easy!’ も使われる。しかし最近，どうして「お疲れ様」が普通の挨拶になってしまったのだろう。学生さんも朝から使う。僕は「疲れてないよ」と返事をしている。「おはようございます」「こんにちは」「さようなら」はもう死語か。「お元気様」にしたらいいと TV で著名人も言っていた。ところで鹿児島弁で「お疲れ様」あるいは「ご苦労様」は「おやっとさぁ」であり，それは晩御飯の「いただきます」の代わりに家族が父親に対して発する言葉だ。九州の男性はたいていは女性に優しいのだが，外（人前）では奥様に立ててもらうのが当たり前だと思っているところがあるようだ。九州人に嫁いだ九州人ではない奥様はご苦労しておられるのではないだろうか。ただ，一歩後ろを歩く奥様の手からは目に見えない紐が夫の首に繋がっているという噂もあるが。

写真 B.1 最上橋　山形県西村山郡大江町　1940 年竣工　（中沢正利先生撮影）

‘阿弥陀様:’ 第 1 著者は全く信心深くないのであるが，家のお坊様はとても愉快というか想像力豊かな方である。たいていは「因果」のお話なのであるが，あるときの講話はビッグバン（物理学の）から始まった。列席者のほとんどがチンプンカンプンだっただろう。その中で，「阿弥陀」は ‘a-meter’ つまり ‘un-measurable’ に通じるものであり，「アーメン」も同じ（そうではないようだが）ということであった。確かに「無量寿仏」とも当てる。

最近の学生さんはこういった想像力・教養が極めて乏しい。そのため創造という作業はできないのではないかと心配している。また何かを「学ぶ」ということと「習う」ということが区別できていないため，必要単位を準備できてしまうと，それ以上の講義を聴講することすらしない。さらに宿題を締め切り後に平気で提出しようとする。学期の最後から 2 回目の授業時間の最後に，来週の授業の内容はシラバスにあるから講義するが，試験には出さないので出欠は取らないと言うと，60 名くらいの受講者のうち半数以上は来ない。本当に大学生の過ごし方はこれでいいのだろうか，と悩んでいるところである。

付録 C

テンソル演算について

C.1　座標と基底ベクトル

文献 [26] と，それを用いた西野文雄先生の「応用弾性学」の講義ノートとから，テンソルの特徴を知ることができると思う部分を列挙してみた。本当は，斜橋等の設計では斜交座標系で，曲線橋等の設計では直角座標ではない座標系で力学を論ずる必要がある。ここではその代表例として図 C.1 のような斜交座標を考え，下添え字のベクトル $\boldsymbol{g}_i$ $(i = 1, 2)$ はその方向の単位の基底ベクトルとする。図のように，下添え字の単位長さの基底ベクトル $\boldsymbol{g}_j$ に対するベクトル成分を上添え字を付けて定義し，それを**反変成分**と呼んで，任意のベクトル $\boldsymbol{P}$ を

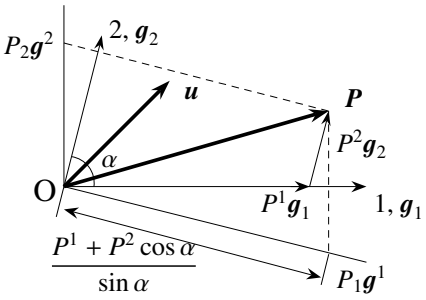


図 C.1 斜交座標

$$\boldsymbol{P} = P^1\,\boldsymbol{g}_1 + P^2\,\boldsymbol{g}_2 \tag{C.1}$$

のように成分表示（分解）できると考える。さて図には描いていないが，水平 (x) 方向の単位基底ベクトルを $\boldsymbol{i}_1$ とし，鉛直 (y) 方向の単位基底ベクトルを $\boldsymbol{i}_2$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{P}$ の水平 (x) 方向および鉛直 (y) 方向成分 P_x, P_y はそれぞれ

$$P_x = P^1 + P^2\,\cos\alpha, \quad P_y = P^2\,\sin\alpha$$

になるので， $\boldsymbol{P}$ が力で $\boldsymbol{u}$ が変位だった場合には，仕事 W は二つのベクトルの内積で定義され

$$W = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{P} = \left(u^1 + u^2\,\cos\alpha\right)\left(P^1 + P^2\,\cos\alpha\right) + u^2\,\sin\alpha\,P^2\,\sin\alpha$$

となることから

$$W = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{P} = \left(u^1 + u^2\,\cos\alpha\right)\,P^1 + \left(u^2 + u^1\,\cos\alpha\right)\,P^2 \tag{C.2}$$

と書くことができる。

一方，上式 (C.2) を眺めながら，下添え字の変位成分を

$$u_1 \equiv u^1 + u^2\,\cos\alpha, \quad u_2 \equiv u^2 + u^1\,\cos\alpha \tag{C.3a, b}$$

で定義すると，仕事は

$$W = \sum_{i=1}^{3} u_i\,P^i = u_i\,P^i \tag{C.4}$$

と書くことができることがわかる。ただし以下，この式の最右辺のように $\sum$ の記号を省略し，**同じ添え字が上下に 2 回出てくる場合にのみ**，それは 1 から 3 まで総和をとる（**総和規約**）ものとする。ここでは $\boldsymbol{u}$ の下添え字成分と $\boldsymbol{P}$ の上添え字成分の積の和になっていることに気付いておいて欲しい。実は式 (C.3) の下添え字を付した成分は上添え字の基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ $(i = 1, 2)$ の成分で，式 (C.1) に対応して，任意のベクトルが

$$\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{g}^1 + u_2 \boldsymbol{g}^2 \tag{C.5}$$

のようにも成分表示（分解）できるのである。この下添え字の成分を**共変成分**と呼ぶ。このとき $\boldsymbol{g}^i$ を反変基底ベクトル，$\boldsymbol{g}_i$ を共変基底ベクトルと呼び，この「交代した」組み合わせで成分が定義されている。

さて，上式 (C.2) の仕事は

$$W = u^1 \left(P^1 + P^2 \cos\alpha\right) + u^2 \left(P^2 + P^1 \cos\alpha\right) \tag{C.6}$$

とも書くことができる。ここで

$$P_1 = P^1 + P^2 \cos\alpha, \quad P_2 = P^2 + P^1 \cos\alpha \tag{C.7a, b}$$

と書くことにすると，式 (C.3) との比較からも明らかなように，これは $\boldsymbol{P}$ の共変成分である。つまり

$$\boldsymbol{P} = P_1 \boldsymbol{g}^1 + P_2 \boldsymbol{g}^2 \tag{C.8}$$

となる。さて図からも明らかなように，$\boldsymbol{g}^i$ は単位長さではなく $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ の長さを持っており，2 種類の異なる基底ベクトル同士は直交し

$$\left|\boldsymbol{g}^i\right| = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \boldsymbol{g}^m \cdot \boldsymbol{g}_n = \delta^m_n \tag{C.9a, b}$$

の関係が成立する。ここに δ^m_n は Kronecker のデルタ（テンソルではない）である。結局仕事は

$$W = \left(u_i \boldsymbol{g}^i\right) \cdot \left(P^j \boldsymbol{g}_j\right) = u_i P^j \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = u_i P^j \delta^i_j = u_i P^i = u^i P_i \tag{C.10}$$

と書くことができるのだ。このように，共変成分と反変成分の間にしか本当の総和規約は適用できないが，直角座標のときはその区別が無い。

さて $\boldsymbol{g}_i$ 方向の座標を ξ^i と記すことにすると，水平・鉛直の直角座標の x^i との間には

$$x^1 = \xi^1 + \xi^2 \cos\alpha, \quad x^2 = \xi^2 \sin\alpha, \tag{C.11a, b}$$

の関係がある。実は基底ベクトルは

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \boldsymbol{i}_j \tag{C.12}$$

とも定義できる。具体的に式 (C.11) を代入すると

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{i}_1, \quad \boldsymbol{g}_2 = \cos\alpha\, \boldsymbol{i}_1 + \sin\alpha\, \boldsymbol{i}_2$$

のように，幾何学的に求められるものと一致する。これはどちらも無次元の単位ベクトルであるが，式 (C.9) のように $\boldsymbol{g}^i$ は単位ベクトルではないことには注意する必要がある。

C.2 計量テンソルと置換テンソル

同じ基底同士の内積を**計量テンソル**と呼び

$$g_{ij} \equiv \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j, \quad g^{ij} \equiv \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j \tag{C.13a, b}$$

等と定義される。なお，共変基底ベクトルと反変基底ベクトルの内積は式 (C.9b) のように直交している。これを用いれば，共変成分と反変成分を

$$u_i\,\boldsymbol{g}^i = u^j\,\boldsymbol{g}_j \quad \to \quad u_i\,\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_k = u^j\,\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}_k \quad \to \quad u_i\,\delta^i_k = u^j\,g_{jk} \quad \to \quad u_k = u^j\,g_{jk} \tag{C.14}$$

等のように関係付けること（添え字の入れ替え）ができる。

また**交代記号** e_{ijk} （テンソルではない）を

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{もし } (ijk) \text{ が } (123) \text{ の偶置換である場合} \\ -1 & \text{もし } (ijk) \text{ が } (123) \text{ の奇置換である場合} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{C.15}$$

と定義すると，例えば 3×3 の行列 $\left(\ C\ \right)$

$$\left(\ C\ \right) \equiv \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & C^1_3 \\ C^2_1 & C^2_2 & C^2_3 \\ C^3_1 & C^3_2 & C^3_3 \end{pmatrix}$$

の行列式 c は

$$c \equiv \det\left(C\right) = C^i_1\,C^j_2\,C^k_3\,e_{ijk} = C^1_i\,C^2_j\,C^3_k\,e^{ijk}, \quad e_{lmn}\,c = C^i_l\,C^j_m\,C^k_n\,e_{ijk}, \quad c = \frac{1}{6}\,C^i_l\,C^j_m\,C^k_n\,e_{ijk}\,e^{lmn} \tag{C.16a, b, c}$$

と書くことができる。また二つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の外積 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ は

$$w^k = u_i\,v_j\,e^{ijk} = e^{kij}\,u_i\,v_j \tag{C.17a, b}$$

と成分表示できる。

一方，計量テンソルの行列式を

$$g \equiv \det\left(g_{ij}\right), \quad \frac{1}{g} \equiv \det\left(g^{ij}\right) \tag{C.18a, b}$$

と定義しておくと，**置換テンソル** ϵ_{ijk} は

$$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g}\,e_{ijk}, \quad \epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,e^{ijk} \tag{C.19a, b}$$

と定義される。これと Kronecker のデルタの間には

$$\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{imn} = \delta^j_m\,\delta^k_n - \delta^j_n\,\delta^k_m, \quad \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ijn} = 2\delta^k_n, \quad \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6 \tag{C.20a, b, c}$$

の関係が成り立つ。直角座標系では $g = 1$ になるので置換テンソルの成分は交代記号に一致する。

C.3 共変微分

さて，極座標におけるナブラやラプラシアンは結構面倒な形をしていたが，なぜだろう。例えば任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = u^i\,\boldsymbol{g}_i$ と成分表示したとしよう。このベクトルの変化率つまり微係数は，成分のみならず基底ベクトルも微分する必要があることに気付く。極座標等では直角座標とは異なり，基底ベクトルが一定ではないことが微係数の表現を面倒にしているのだ。例えば $\boldsymbol{g}_j$ 方向の座標 ξ^j でこれを微分すると

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi^j} = \frac{\partial\left(u^i\,\boldsymbol{g}_i\right)}{\partial\xi^j} = \frac{\partial u^i}{\partial\xi^j}\,\boldsymbol{g}_i + u^i\,\frac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial\xi^j}$$

という計算をしなければならない。基底ベクトルは式 (C.12) のように表現できたことを思い起こすと

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \xi^j} = \boldsymbol{g}_{i,j} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \boldsymbol{i}_k$$

を求めておく必要がある。ここに，添え字中のコンマは次の添え字の座標で偏微分することを意味する。そこで

$$\boldsymbol{g}_{i,j} = \Gamma_{ijk} \boldsymbol{g}^k = \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{g}_k \tag{C.21}$$

と表すことにする。この Γ_{ijk} 等は **Christoffel の記号**（テンソルではない）と呼ばれている。式 (C.21) を用いれば，上述のベクトルの微係数は

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial \left(u^i \boldsymbol{g}_i\right)}{\partial \xi^j} = u^i_{,j} \boldsymbol{g}_i + u^i \boldsymbol{g}_{i,j} = \left(u^i_{,j} + u^k \Gamma^i_{jk}\right) \boldsymbol{g}_i = u^i\big|_j \boldsymbol{g}_i \tag{C.22}$$

と表すことができる。ここに $u^i\big|_j$ は**共変微係数**と呼ばれる。

C.4 極座標系における物理成分

注意して欲しいのは，例えば図 C.1 の斜交座標のときの基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ が式 (C.9) で示したように単位量ではないこと等である。つまり，基底ベクトルを含むテンソル自体，例えば $\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{g}_i$ そのものが物理量なのは間違い無いが，その成分 u_i は必ずしも物理的な量だとは限らないということになるのだ。そこで，極座標 ($\xi^1 = r, \xi^2 = \theta, \xi^3 = z$) の場合の各量を文献 [26] から引用して列挙してみよう。まず基底ベクトルが

$$\boldsymbol{g}_r = \boldsymbol{i}_1 \cos\theta + \boldsymbol{i}_2 \sin\theta, \quad \boldsymbol{g}_\theta = -\boldsymbol{i}_1 r \sin\theta + \boldsymbol{i}_2 r \cos\theta \tag{C.23a, b}$$

となる。この $\boldsymbol{g}_\theta$ が長さの次元を持っていることには注意すること。これから計量テンソル成分は

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \tag{C.24a, b, c, d}$$

であり， Christoffel の記号が

$$\Gamma_{r\theta\theta} = r, \quad \Gamma_{\theta\theta r} = -r, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \tag{C.25a, b, c, d}$$

と表される。これを用いて応力表示のつり合い式 $\sigma^{ji}\big|_j + f^i = 0$ を誘導すると次のようになる。

$$\frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma^{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial \theta} - r\sigma^{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} + f^r = 0, \tag{C.26a}$$

$$\frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial r} + \frac{3\sigma^{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{\theta z}}{\partial z} + f^\theta = 0, \tag{C.26b}$$

$$\frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma^{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma^{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + f^z = 0 \tag{C.26c}$$

ここに f^r, f^θ はそれぞれ $\boldsymbol{g}_r$, $\boldsymbol{g}_\theta$ 方向の体積力である。ただし，ここの応力テンソルや体積力ベクトルの成分は $\boldsymbol{g}_r$ と $\boldsymbol{g}_\theta$ 方向の成分であり，特に後者の基底ベクトルは式 (C.23) からも明らかなように長さの次元を持っていることから，この成分が必ずしも物理的な応力の成分にはなっていないことに注意が必要だ。そこで，それを調整した物理的な成分を，基底ベクトルの大きさと単位を念頭に置いて

$$\tau^{rr} \equiv \sigma^{rr}, \quad \tau^{r\theta} \equiv r\sigma^{r\theta}, \quad \tau^{\theta\theta} \equiv r^2\sigma^{\theta\theta}, \quad \tau^{zz} \equiv \sigma^{zz}, \quad \tau^{rz} \equiv \sigma^{rz}, \quad \tau^{\theta z} \equiv r\sigma^{\theta z}, \quad q^r \equiv f^r, \quad q^\theta \equiv rf^\theta, \quad q^z \equiv f^z \tag{C.27a, b, c, d, e, f, g, h, i}$$

のように定義して上式を書き直すと

$$\frac{\partial \tau^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau^{rr} - \tau^{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau^{rz}}{\partial z} + q^r = 0, \tag{C.28a}$$

$$\frac{\partial \tau^{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau^{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau^{\theta z}}{\partial z} + q^\theta = 0, \tag{C.28b}$$

$$\frac{\partial \tau^{rz}}{\partial r} + \frac{\tau^{rz}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau^{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau^{zz}}{\partial z} + q^z = 0 \tag{C.28c}$$

となり，これは物理的な量で表されたよく知られたつり合い式である。

また変位勾配は

$$u^r|_r = \frac{\partial u^r}{\partial r}, \quad u^r|_\theta = \frac{\partial u^r}{\partial \theta} - r\,u^\theta, \quad u^\theta\big|_r = \frac{\partial u^\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\,u^\theta, \quad u^\theta\big|_\theta = \frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\,u^r \tag{C.29a, b, c, d}$$

となるので，物理成分 $\boldsymbol{v}$ を

$$v^r \equiv u^r, \quad v^\theta \equiv r\,u^\theta \tag{C.30a, b}$$

と定義すると，上式は

$$u^r|_r = \frac{\partial v^r}{\partial r}, \quad u^r|_\theta = \frac{\partial v^r}{\partial \theta} - v^\theta, \quad u^\theta\big|_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^\theta}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\,v^\theta, \quad u^\theta\big|_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\,v^r \tag{C.31a, b, c, d}$$

に変換される。上の応力成分とスカラー（仕事）を通して対になるべきひずみ成分 ϵ_{ij} を求めるために，計量テンソルを用いると

$$u_r|_r = g_{rr}\,u^r|_r = \frac{\partial v^r}{\partial r}, \quad u_r|_\theta = g_{rr}\,u^r|_\theta = \frac{\partial v^r}{\partial \theta} - v^\theta, \quad u_\theta|_r = g_{\theta\theta}\,u^\theta\big|_r = r\,\frac{\partial v^\theta}{\partial r}, \quad u_\theta|_\theta = g_{\theta\theta}\,u^\theta\big|_\theta = r^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\,v^r\right) \tag{C.32a, b, c, d}$$

と変換できるので，ひずみテンソル成分は

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial v^r}{\partial r}, \quad 2\epsilon_{r\theta} = r\left\{\frac{1}{r}\,\frac{\partial u^r}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\,v^\theta\right\}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = r^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\,v^r\right) \tag{C.33a, b, c}$$

と求められる。一方，式 (C.23) と対になる基底の組は

$$\boldsymbol{g}^r = \boldsymbol{i}_1\,\cos\theta + \boldsymbol{i}_2\,\sin\theta, \quad \boldsymbol{g}^\theta = -\boldsymbol{i}_1\,\frac{1}{r}\,\sin\theta + \boldsymbol{i}_2\,\frac{1}{r}\,\cos\theta \tag{C.34a, b}$$

なので，ひずみテンソル成分の物理成分 ε_{ij} が

$$\varepsilon_{rr} = \epsilon_{rr}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\,\epsilon_{r\theta}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{1}{r^2}\,\epsilon_{\theta\theta} \tag{C.35a, b, c}$$

と定義できる。したがって最終的に，ひずみの物理成分が

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial v^r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u^r}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\,v^\theta\right), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\,v^r \tag{C.36a, b, c}$$

と求められる。z 方向成分については直角座標系とほぼ同様で

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial v^z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^r}{\partial z} + \frac{\partial v^z}{\partial r}\right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v^z}{\partial \theta}\right) \tag{C.37a, b, c}$$

となる。

このようにテンソル（数学）成分と物理成分は必ずしも一致しない。したがって，特に構成方程式を

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\,\epsilon_{kl} \tag{C.38}$$

とモデル化したときの係数 $\boldsymbol{C}$ は物理的に意味を持たなければならないことにも十分注意しなければならない。多分そのとき，適切な材料モデルであれば，上式のような数学的関係（テンソル方程式）も美しくなるし，同時に

$$\tau^{ij} = \overline{C}^{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \tag{C.39}$$

と表した物理的関係式（テンソル方程式ではない）も美しくなるのではないだろうかと想像するが，どうだろう。一般的な曲線座標系でシェル理論を構築しようとしたときの難しさにちょっとだけ触れることができたと思う。文献 [101] では構造力学も含めて正確なテンソル表記が使われているので参考にして欲しい。

‘headquarter:’ 第 1 著者が在職中の帰省時に市営プール前バス停付近にある道路標識には，一時，県警本部の英語名にこう記載されていた。インターネットを通して（最初は間違って交通安全協会に）建設省（当時）に注意のメイルを送っておいたところ，数年してようやく ‘s’ が付いた。それにしても，一人のための一宿所 ‘quarters’（StarTrek[1] 中の会話からの推量）であっても複数形を用いるのはなぜだろう。英語はやっぱり難しい。

‘Close.’ 国内では長年にわたり，既に閉店したドアに「閉じろ」という表示が絶えない。なんと，某大学工学部教務事務の入り口ドアでも同じ状況である。ちょっと恥ずかしい。英文法の教育が徹底している現状であってもこれである。ある発表会では既に ‘choice’ を動詞に使う日本人学生は多数だ。昨今は，会話等の「使える英語」教育の必要性が叫ばれているが，そのうち，米国映画に出てくるある種の人達が使う，例えば ‘He don’t know nothing, you know!’ といった英語をスラスラしゃべることができる日本人が増えてくるのであろう。この国の英語教育の将来が実に楽しみである。

[1] ™ Paramount Pictures.

付録 D

破壊力学はどうしても好きになれない

D.1　破壊力学とは

第 1 著者が最も嫌いなもの。否，理解できないものだ。食べても味がしない。触っても感触が無い。よく見えないから実は触ることも困難だ。特に抵抗力 R なるものが出てくるあたりからはさっぱりだった。

さて第 2 次世界大戦の頃溶接を用いた橋梁や船舶がいくつか崩壊した。作用している外力がほぼ無い状態だったため，生じている応力は材料そのものの強度に比べてかなり小さいと想像された。そこで，次のような**理想的へき開強度**との比較がなされた。まず欠陥の無い結晶構造の金属材料が破断する状況はその結晶格子の原子間に新たに表面を作る（破断させる）ことなので，それを定量的に捉えるために，表面を生成するのに必要なエネルギを γ としておく。一方，原子間距離と生じる応力の関係は図 D.1 のようになることがわかっているので，この応力と原子間距離の図の面積部分（近似としての図中の網掛け部分）に相当するエネルギが表面を生成するのに消費された時点で破断すると考えてみよう。まず，この図の網掛け部の面積は微小変形の仮定等を用いて近似的に

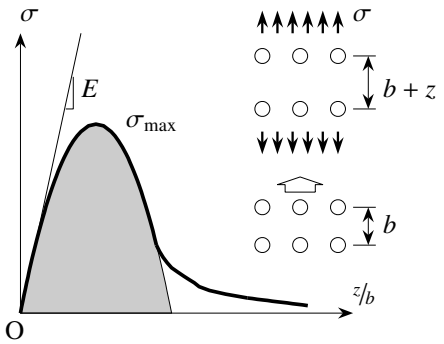


図 **D.1**　破断に必要なエネルギ

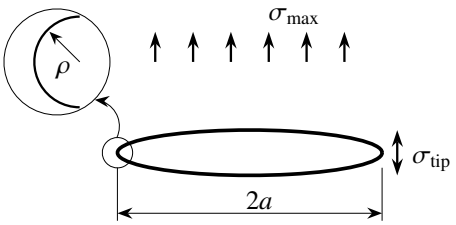


図 **D.2**　扁平な楕円空隙モデル

$$U_0 \simeq \frac{\sigma_{\max}^2}{E}\,2b$$

となる。ここに E は Young 率であり，b は原子間隔である。そして，そのエネルギが上述の表面生成エネルギ 2γ（面が 2 枚あるので）に達したところで破断が生じると仮定するので，最大応力は

$$U_0 = 2\gamma \quad \rightarrow \quad \sigma_{\max} \simeq \sqrt{\frac{E\gamma}{b}}$$

と求められる。例えば $\gamma \simeq {}^{Eb}/_{100}$ くらいと考えられるので，具体的な値を鋼を参考にして代入すると

$$E = 210\,\mathrm{GN/m^2}, \quad b \simeq 2\,\text{Å} = 0.2\,\mathrm{nm}, \quad \gamma \simeq 2\,\mathrm{J/m^2} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\max} \simeq 10\sqrt{21}\,\mathrm{GN/m^2}$$

となり，オーダーとしては $\sigma_{\max} \simeq {}^{E}/_{10}$ 程度となる。しかし実際に観察された破断応力は ${}^{E}/_{1000}$ 程度だったことから，理想的な結晶構造のままのへき開で破断するとは考えられないことが明らかだ。

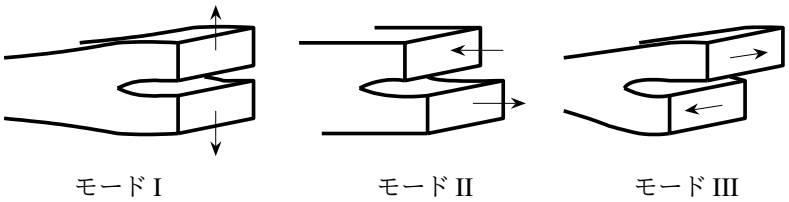


図 D.3 数学的亀裂の三つの変形モード

そこで Griffith は，材料中には**亀裂**という欠陥が最初から存在し，その先端の応力集中のような効果によって亀裂が進展して破断すると提唱した。それに基づき Orowan と Inglis は，図 D.2 に示したようなとても扁平な楕円形状の空隙が存在する場から，上述と同様のエネルギ的な概算を行った。無限遠点に $\sigma_{\max}$ の応力に相当する荷重が作用しているときの，楕円空隙の先端付近の応力集中によって拡大された応力 σ_{tip} は

$$\frac{\sigma_{\mathrm{tip}}}{\sigma_{\max}} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

程度になることがわかっている。ここに a は楕円空隙の長軸半径であり，ρ はその先端の曲率半径である。しかしここでは非常に扁平な空隙（ほぼ亀裂）だとするので，上式の第 2 項の方が第 1 項よりもかなり大きくなって第 1 項は無視できる。そして，この先端応力が上述の理想的へき開強度に一致するとすると

$$\sigma_{\mathrm{tip}} \simeq 2\sigma_{\max}\sqrt{\frac{a}{\rho}} \simeq \sqrt{\frac{E\gamma}{b}}$$

と置くことができる。曲率半径はほぼ結晶格子間隔程度だと近似（$\rho \simeq b$）できるので，上式から

$$\sigma_{\max} \simeq \sqrt{\frac{E\gamma}{4a}}$$

と求められる。実際に生じている初期亀裂はかなり長いと考えて $2a \simeq 5000\,b$ 程度であるとし，表面エネルギが前述と同様 $\gamma \simeq {}^{Eb}/_{100}$ くらいだとすると

$$\sigma_{\max} \simeq \frac{E}{1000}$$

のような現実的な値になることがわかる。このことから，実際に生じた船舶等の崩壊では亀裂の存在が不可欠だと考えられるようになった。そして亀裂が予め存在する場の挙動を対象とする力学を**破壊力学**と呼ぶようになった。金属材料の中に転位という欠陥があることは第 11 章で述べたし，その転位が結晶界面に移動して延性破壊する応力はある程度高いのだが，それより低い応力レベルで材料が破壊する可能性があるということが明らかになった。ただここの算定は弾性体としての近似的なモデルに基づくものであり，実際の亀裂先端の応力はかなり高いことから塑性変形も生じているはずであり，厳密に破断強度を求めることが困難であることには注意する必要がある。ちなみに $\rho \to 0$ の極限の空隙を**数学的亀裂**と呼ぶ。

D.2 弾性亀裂と応力拡大係数

D.2.1 亀裂の変形モードと面外問題

数学的亀裂の載荷状態は図 D.3 のような三つのモードに分類される。このうち面外変位が生じるモード III が最も簡単な問題なので，まずその亀裂先端付近の応力状態を求める手法を示しておこう。対象は図 D.4 で x 軸の負の部分に無限に長い数学的亀裂が存在し，上半分 ($y > 0$) が紙面手前方向に，下半分 ($y < 0$) が紙面奥行き方

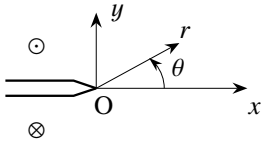


図 D.4 モード III 亀裂

向に変位するものとする。平面問題の対称性から

$$u \equiv 0, \quad v \equiv 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

となるので，零でないひずみ成分は

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x} \neq 0, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$$

の二つだけだ。したがって， Hooke の法則から σ_{zx} と σ_{yz}，あるいは σ_{rz} と $\sigma_{\theta z}$ だけが非零となる。

境界条件は，まず亀裂のある部分は自由表面なので

$$\sigma_{yz}(y=0) = \sigma_{\theta z}(y=0) = 0, \quad \sigma_{yy}(y=0) = \sigma_{\theta\theta}(y=0) = 0$$

であり，亀裂の無い部分は固定されているものとして $w(y=0) = 0$ とする。したがって x 軸上の境界条件は

$$w = 0 \quad \text{along } \theta = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{along } \theta = \pi \tag{D.1a, b}$$

と記せばいい。一方，物体力が無いときの極座標のつり合い式は式 (C.28) から

$$\frac{\partial (r\,\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0$$

である。また Hooke の法則とひずみ変位の関係とから，せん断弾性係数を μ とすると

$$\sigma_{rz} = 2\mu\,\epsilon_{rz} = \mu\,\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta z} = 2\mu\,\epsilon_{\theta z} = \mu\,\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{D.2a, b}$$

という関係が成立するので，上のつり合い式に代入すると， w で表したつり合い式が

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \nabla^2 w = 0 \tag{D.3}$$

と表される。境界条件式 (D.1) を満足するように w に対してこの式 (D.3) を解けば，亀裂が存在する弾性体の応力場を求めることができる。ただ，我々は亀裂先端に大きな応力が集中する（実際には無限大になる）と予想していて，その周辺から破壊が生じると考えているので，その先端付近の応力場にまずは興味がある。そのため，いわゆる**漸近解析**と称する（亀裂先端だけに着目した）解析を行う。

まず解を

$$w \sim A\,r^p\,f(\theta) \tag{D.4}$$

のように仮定する。つまり， θ 方向には $\theta = 0$ を境にして反対称な関数になると考えられる一方で， r 方向については， $r = 0$ 近傍だけを対象とした解にしか興味が無いことからべき乗で仮定しているのだ。これをつり合い式 (D.3) に代入して整理すると

$$p^2\,r^{p-1}\,f + r^{p-1}\,f'' = 0$$

を得る。このプライムは θ に関する微分を表す。この式から $f(\theta)$ は

$$f'' + p^2\,f = 0$$

を満足する関数でなければならないので

$$f = a\,\sin(p\,\theta) + b\,\cos(p\,\theta)$$

が一般解である。これを境界条件式 (D.1)，つまり

$$f(0) = 0, \quad f'(\pi) = 0$$

に代入すれば

$$b = 0, \quad \cos(p\pi) = 0$$

でなければならないことから

$$f(\theta) \sim \sin(p\theta), \quad p = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \cdots$$

が解の候補になる。 f が sine 関数なので，変位 w の x 軸に対する反対称性が得られている。

この結果を式 (D.2) (D.4) に代入すれば

$$w = A\,r^p\,\sin(p\theta), \quad \sigma_{rz} = A\,\mu\,p\,r^{p-1}\,\sin(p\theta), \quad \sigma_{\theta z} = A\,\mu\,p\,r^{p-1}\,\cos(p\theta)$$

のように亀裂先端の変位と応力が求められる。そこで，亀裂先端の半径 a の領域内のひずみエネルギ U を求めてみると

$$U \equiv \frac{1}{\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a \frac{1}{2}\left(\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2\right) r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}A^2\,\mu\,p\,a^{2p}$$

という表現になる。ここで，もし $p \le -\dfrac{1}{2}$ の場合には $U < 0$ になってしまうし，しかも領域を小さくして $a \to 0$ にしたときに $U \to \infty$ になる。これでは弾性論として容認できない解を得たことになる。以上の考察から

$$p \ge \frac{1}{2} \quad \to \quad U < \infty \quad \text{（有界）}$$

でないといけないことがわかる。したがって，物理的に意味のある解の漸近表現は

$$w = w_0 + A\,r^{1/2}\,\sin(\theta/2) + O\left(r^{3/2}\right),$$
$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2}A\,\mu\,r^{-1/2}\,\sin(\theta/2) + O\left(r^{1/2}\right), \quad \sigma_{\theta z} = \frac{1}{2}A\,\mu\,r^{-1/2}\,\cos(\theta/2) + O\left(r^{1/2}\right)$$

となる。得られた結果で最も重要なのは，その応力場が $r = 0$ 付近で最も大きく（無限大に）なる成分の

$$\sigma \sim A\,\mu\,r^{-1/2}\,g(\theta)$$

の部分である。以上の結果から

- 亀裂先端では r の $-1/2$ 乗の特異性を持っている。 $r \to 0$ で無限大になる。
- 弾性係数 μ に比例している。
- θ 方向には何らかの関数になる。
- その絶対値 A は，荷重条件や物体の形（多分，亀裂長さ）等で決まる。

と考えていいことになる。実際の物体に存在する亀裂先端では応力が無限大にはならないので，この解が無限大になることそのものは弾性解が持つ不具合（誤差）だと捉えればいい。しかし r の $-1/2$ 乗で分布することは，例えば対象としている物体の「縁」から亀裂までの距離を検討するときに重要なことであろう。そして，絶対値 A が荷重条件や物体形状等で決まると考えていい（漸近解析には無限遠点の荷重条件や物体形状の影響は含まれていない）ことから，この絶対値 A がある規準値に達したときに亀裂は進展すると考えるのだ。つまり，亀裂の破壊規準を

$$A = A_{\mathrm{cr}} \tag{D.5}$$

と考え，この A_{cr} を**破壊靭性**と呼び，これが材料の強度特性を表すパラメータだと考えるのである。

D.2.2 面内問題の場合

モード I と II の場合にも同様の漸近解析が可能である。まずつり合い式は

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0$$

であり， Hooke の法則が

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu\,\epsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{rr} = \mu\left(\frac{3-\kappa}{\kappa-1}\epsilon_{\theta\theta} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\epsilon_{rr}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu\left(\frac{3-\kappa}{\kappa-1}\epsilon_{rr} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\epsilon_{\theta\theta}\right)$$

と表される。ここに κ は式 (3.192) で定義される。ひずみと変位の関係は

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

と定義されている。これに対し，面外問題と同じように r のべき乗を用いて

$$u_r = r^p f(\theta), \quad u_\theta = r^p g(\theta)$$

と仮定して解けば亀裂先端の応力場を求めることができる。必要な読者は自分で解いてみて欲しい。

D.2.3 平面問題の応力拡大係数

実際に載荷された亀裂先端の解は第 3 章の第 3.6.4 節の応力関数を用いる等して求めることができる。図 3.45 が前節の面内問題のモード I の解に相当する。無限体中に長さ $2a$ の数学的亀裂が 1 個だけ存在して，図 D.5 のような載荷状態にある場合の亀裂先端の応力場は，それぞれのモード毎に

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{i}}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} f_{\mathrm{i}}(\theta) \\ g_{\mathrm{i}}(\theta) \\ h_{\mathrm{i}}(\theta) \end{Bmatrix}, \quad \text{i=I, II}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} p(\theta) \\ q(\theta) \end{Bmatrix}$$

と求められている。ここに K_{i}, (i=I, II, III) は**応力拡大係数**と呼ばれ，無限体のこの境界条件下では

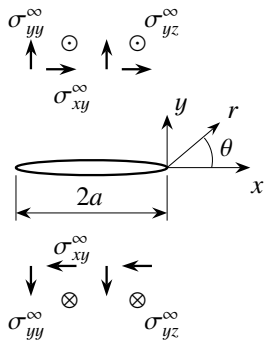


図 D.5 無限体中の亀裂

$$\begin{Bmatrix} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \sqrt{\pi a} \begin{Bmatrix} \sigma^{\infty}_{yy} \\ \sigma^{\infty}_{xy} \\ \sigma^{\infty}_{yz} \end{Bmatrix}$$

となる。ただし，対象が無限体ではない場合や複数の亀裂が存在する場合あるいは載荷条件や境界条件が異なる場合には応力拡大係数は異なる表現になる。ルーズリーフのノートの穴が紙の端（領域境界の自由表面の条件）に近い場合にはそこが破れ易いと感じると思うが，それはそのような境界条件下では応力拡大係数が大きくなるからだ。いずれにしても，亀裂先端の応力の特異性は先端からの距離の平方根乗である。そして式 (D.5) と同様に，この応力拡大係数がその材料特有の規準値に達し

$$K_{\mathrm{i}} = K_{\mathrm{ic}}, \quad \text{i=I, II, III}$$

を満足したときに亀裂が進展すると考えるのである。この材料特性値 K_{ic} を**破壊靭性**と呼んでいる。この破壊靭性は温度が下がるほど小さくなることもよく知られている。したがって，応力で表現した強度 σ_{cr} が材料の規準値としての破壊靭性だけではなく亀裂の長さにも依存し，その形は

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = \frac{K_{\mathrm{ic}}}{\sqrt{\pi a}} \tag{D.6}$$

のようになる。このように，同じ材料であっても亀裂が長くなればなるほど材料強度が下がること，つまり寸法によって強度が下がることを式 (D.6) は示している。その寸法の平方根が分母にあるので，材料実験をしたときに試験片の寸法の平方根に反比例するような強度や挙動が観察された場合には，亀裂の存在を疑うのがいいということだ。

このように，材料特性に影響する要因のうち長さの次元を持つパラメータを**特性長さ**と呼んでいる。この式 (D.6) のように材料の強度が何らかの寸法に支配される例として多結晶金属の強度について考察してみよう。製鋼所で欠陥の無い材料を製造することは不可能であり，転位が無数に内部に存在することは既に述べた。これが載荷に伴い内部の単結晶界面に集積して，そこが空隙になったとし，その界面に沿った空隙を亀裂とみなしてみよう。もしそういう把握が可能なら，多結晶体内に存在するかもしれない亀裂の長さが単結晶の粒の大きさ程度であることが容易に想像できる。したがって式 (D.6) を踏まえると，単結晶の粒径をできるだけ小さくした方が強度が下がらないことも想像できるのではないだろうか。映像で刀鍛冶の作業を見たことがあると思うが，それと同じように鋏等を作る場合にも「鍛える」という表現で鉄槌で材料を叩いている。実はこれは圧延して形を整えながら同時に内部の結晶粒を壊して粒径を小さくしているのである。これによって相対的に強度を上げていると考えてもいい。実際 **TMCP 鋼**という製品では，圧延装置とセンサー・コンピュータを併用して温度調整をしながら叩くことによって高強度の厚板を製造している。ただし溶接や切断による入熱によって粒径が大きくなってしまう可能性もあるので取り扱いは難しい。

D.3 亀裂先端の塑性変形について

ここで説明した弾性亀裂では亀裂先端の応力は無限大になることから，実際の材料中の挙動をそのままはモデル化できていないことは明らかである。そのため，先端に拡がるであろう塑性変形をさらにうまくモデル化しないと，実際の破壊強度等を精度よく予測することはできない。昨今はすぐに数値解析に逃げる（著者も含めて）が，これを力学モデルで表すことは大事である。というのも，弾性亀裂で得られたような，例えば亀裂長さの平方根が重要なパラメータであるといったことを数値解析で求めるのは困難だからだ。解析的方法はやはり重要である。さて，亀裂先端の塑性変形を扱うモデルには **Dugdale-Barenblatt モデル**といったものがある。二つのモデル間には若干の違いがあるが，亀裂先端の大きくはない塑性域を考慮するために，その領域にある種の結合力を導入した上で亀裂先端の特異性を消失させるといった，とても興味深い力学的考察に基づいて作られたモデルである。読者には是非勉強して欲しいモデルだ。やや積分方程式的な考え方を通して思い付くかもしれないモデルのように感じる。例えばコンクリートに存在する亀裂先端の状況を想像してみて欲しい。そこには数学的亀裂のような尖った先端があるとは誰も思わないだろう。亀裂と思しき存在の先端付近には，モルタルがボロボロになりかけて内部に小さい空隙や微視的な亀裂が無数に分布し，材料はもはや連続体ではなくなる寸前といった状況だと想像できないだろうか。そういう亀裂先端部分を**破壊進行領域**と呼ぶが，上のモデルはそのような「特異性を持たない先端」を持つ亀裂モデルである。どう？ 興味持てた？ 駄目でしょ？ さらに**複素応力関数**や **Hankel 関数**を，つまり複素関数論をしっかり勉強しておかないといけないのだ。破壊力学って頭のいい人じゃないと使えないんだよねぇ。

付録 E

境界要素法と逆問題の概念

E.1　境界上の解の積分表現

E.1.1　問題の設定

これもよく，否，全く理解できていないトピックスの一つである。以下は 1992 年頃に誰かに説明するために作った資料だが，そのあと北原道弘先生の授業「弾性波動論」を無謀にも引き継いだときに文献 [139] で勉強を試みたものの，やはり挫折したお題である。破壊力学とこの力学にはいまでも拒否反応しかない。簡単のためにラプラス方程式を例とする。

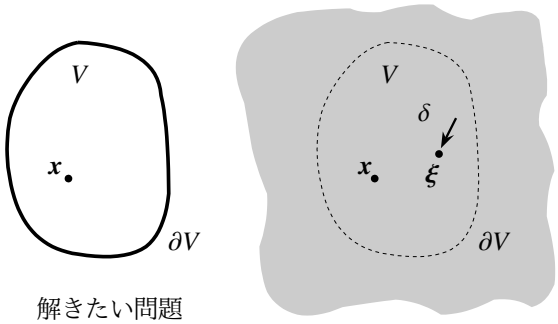


図 E.1 解きたい問題と基本解

解きたい問題:　解こうとする境界値問題は

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{in } V, \tag{E.1a}$$

$$u = \bar{u} \ \text{ or } \ \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nabla} u = f \quad \text{on } \partial V \tag{E.1b}$$

で与えられるものとする。

基本解の問題:　一方，無限領域の境界値問題で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ 点に集中外乱（つまりデルタ関数）が作用した問題は

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) + \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \text{with } G \to 0 \text{ as } x \to \infty \tag{E.2}$$

で与えられる。この基本解 $G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ は図 E.1 右側の図の破線表面つまり解きたい問題の境界表面 (∂V) で

$$\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) \quad \text{on } \partial V \tag{E.3}$$

のような関数値 $g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ を持つものとする。この基本解は頭のいい先輩達が既に求めてくれている。

E.1.2　解の積分表現

この基本解を「仮想変位」と捉え，解きたい問題との仮想仕事式を求めよう。式 (E.1a) に式 (E.2) の G を乗じて領域全体で積分すると

$$0 = \int_V G \left\{ \nabla^2 u(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x}) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

が成立する。被積分関数第 1 項に Gauss の発散定理を 2 回適用すれば

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_V G\,(u_{,kk} + p)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial V} G\,(\nu_k\,u_{,k})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_V G_{,k}\,u_{,k}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_V p\,G\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\partial V} \{G\,(\nu_k\,u_{,k}) - G_{,k}\,\nu_k\,u\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_V G_{,kk}\,u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_V p\,G\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

となるから，式 (E.2) をこの第 2 項に代入すれば

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial V} \{G\,(\nu_k\,u_{,k}) - G_{,k}\,\nu_k\,u\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_V \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\,u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_V p\,G\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\partial V} \{G\,(\nu_k\,u_{,k}) - G_{,k}\,\nu_k\,u\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - u(\boldsymbol{\xi}) + \int_V p\,G\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

を得て，最終的に

$$
u(\boldsymbol{\xi}) = \int_V p(\boldsymbol{x})\,G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial V} \{G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\boldsymbol{\nu}\,\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\nu}\,\boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}
$$

という関係式が求められる。これに，解きたい問題の境界条件式 (E.1b) と式 (E.3) を代入すると

$$
u(\boldsymbol{\xi}) = \int_V p(\boldsymbol{x})\,G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial V} \{G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,f(\boldsymbol{x}) - \bar{u}(\boldsymbol{x})\,g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{E.4}
$$

という式を得る。ここで G と g は既知なので，右辺の p と f, $\bar{u}$ が与えられている問題なら，この式 (E.4) から任意点の u を求めることができる。これは**順問題**と呼ばれる。弾性体力学の場合の基礎式は第 3.5.5 節を参照のこと。

それに対し，境界上の $\bar{u}$ が与えられているわけではなく，それを式 (E.4) から求める問題の場合には $\boldsymbol{\xi} \to \partial V$ の極限を考えればいい。得られる式の左辺は境界上の解 $\bar{u}(\boldsymbol{\xi})$ ($\xi \in \partial V$) になるだけだが，右辺第 2 項の被積分関数にも境界の解 $\bar{u}$ が含まれているので，これは $\bar{u}$ に対する**積分方程式**になる。ところが，その極限はそんなに簡単ではない。というのも，基本解が

$$
G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) \to \infty \quad \text{as } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\xi}
$$

という特性を持っているからである。したがって，この $\boldsymbol{\xi} \to \partial V$ の極限では式 (E.4) 第 2 項の積分は特異積分になることに注意する必要がある。これについては文献 [139] を勉強して欲しい。結果だけを写すと

$$
\frac{1}{2}\,\bar{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_V p(\boldsymbol{x})\,G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \fint_{\partial V} \{G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,f(\boldsymbol{x}) - \bar{u}(\boldsymbol{x})\,g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \text{on } \boldsymbol{\xi} \in \partial V
$$

となる（らしい）。$\fint$ は Cauchy の主値積分である。元々の問題が自己随伴であることから

$$
G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x}), \quad g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = g(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})
$$

が成立する（相反定理）ので，上式は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\xi}$ を入れ替えて

$$
\frac{1}{2}\,\bar{u}(\boldsymbol{x}) = \int_V G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,p(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \fint_{\partial V} \{G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,f(\boldsymbol{\xi}) - g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\bar{u}(\boldsymbol{\xi})\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \quad \text{on } \boldsymbol{x} \in \partial V \tag{E.5}
$$

とも表現できる。これが，境界の解 $\bar{u}$ を求める積分方程式として解釈できる。

E.2 境界要素法

式 (E.5) を解いて境界上の解が求められれば，それを式 (E.4) に代入することによって領域内部任意点の解を求めることができる。境界上の値を求めるための数値解法の一つは**境界要素法**と呼ばれていて，有限要素法と

同じように $\bar{u}$ を既知関数で仮定して式 (E.5) を離散化して近似解を求めようとする。具体的には境界上に N 個の節点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i \in \partial V$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を設けて，その節点における $\bar{u}_i \equiv \bar{u}(\boldsymbol{x}_i)$ の値を用いて

$$\bar{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_i \, \phi_i(\boldsymbol{x})$$

と仮定する。この試行関数を式 (E.5) に代入すれば

$$\frac{1}{2}\,\bar{u}_i = \frac{1}{2}\,\bar{u}(\boldsymbol{x}_i) = \int_V G(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\xi})\,p(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \fint_{\partial V} G(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\xi})\,f(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} - \sum_{j=1}^{N} \fint_{\partial V} g(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\xi})\,\bar{u}_j\,\phi_j(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{E.6}$$

を得る。そこで

$$A_{ij} \equiv \fint_{\partial V} g(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\xi})\,\phi_j(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \quad f_i \equiv \int_V G(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\xi})\,p(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \fint_{\partial V} G(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\xi})\,f(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

と定義すれば，式 (E.6) は

$$\sum_{j=1}^{N} \left(A_{ij} + \frac{1}{2}\,\delta_{ij} \right) \bar{u}_j = f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{E.7}$$

のような，境界上の $\bar{u}_i$ を求めるための離散化された代数方程式に変換できる。

E.3 逆問題の概念

次に式 (E.5) を「逆」から眺るために順番を入れ替えて

$$\frac{1}{2}\,\bar{u}(\boldsymbol{x}) + \fint_{\partial V} g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\bar{u}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \int_V G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,p(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \quad \text{on } \boldsymbol{x} \in \partial V \tag{E.8}$$

と書いておこう。簡単のために表面外乱 f は省略した。順問題は式 (E.1) のように，外乱の p や f が与えられたときの u を求める問題だったから，上式 (E.8) の場合は右辺の p が原因で左辺の $\bar{u}$ が結果だ。では逆に左辺の $\bar{u}$ がわかって（測定されて）いるときに p を求める問題とは何だろう。因果を逆向きに捉えて結果の $\bar{u}$ からその原因の p を予測する問題だ。これが**逆問題**と呼ばれていて，領域の表面で測定される現象を使って，その領域内に存在するその原因を予測する問題になる。もうピンときた読者も多いとは思うが，典型的な応用例は内臓のエコー検査[1]だ。皮膚に当てた装置からある種の波を体内に送り出し，反射してきた波から得られるデータ（上式の $\bar{u}$ に相当）を処理し，内臓の大きさや血液の流速等（上式の p に相当）を推測する検査である。社会基盤構造の場合は，鋼橋の溶接部の亀裂を超音波探傷検査すること等の**非破壊評価**がこれに当たる。この章の例がラプラス方程式だったからわかり難いとは思うが，変形できる物体の力学の場合は例えば付録 H で説明するように，領域内の異種材料や空洞等はある種の初期ひずみ（eigen ひずみ）あるいはそれに相当する応力 (back stress) の分布で置換でき，それが上式 (E.8) 右辺の $p(\boldsymbol{\xi})$ に相当するのである。そして，体の表面や橋梁部材の表面で測定される変位等の $\bar{u}(\boldsymbol{x})$ に対応する $p(\boldsymbol{\xi})$ を，式 (E.8) のような**積分方程式**を解いて求めることによって，その内部の構造や欠陥の位置や大きさ等を予測する問題が，その逆問題なのである。積分方程式の例は第 3.6.4 (2) 節にも示した。ただし，その内部欠陥等の領域を Ω とすると

$$p(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} p(\boldsymbol{\xi}) & \text{in } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ 0 & \text{in } \boldsymbol{\xi} \notin \Omega \end{cases} \tag{E.9}$$

[1] 第 1 著者が年 1 回の心エコー検査時に real time で見ている動画は実は偽物なのだそうだ。人間の体内組成はあまりにも簡単なので，得られた信号を簡単に積分できて，心臓の弁が動いていたり血液がどちら向きに流れているかを，ほぼ real time で表示できるのだそうだ。驚きである。自分の大腸の内部を内視鏡で観察したときとはまた違う次元の驚きである。

といった関数として取り扱うか，あるいは式 (E.8) で

$$\frac{1}{2}\,\bar{u}(\boldsymbol{x}) + \fint_{\partial V} g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\bar{u}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \int_{\Omega} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,p(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \quad \text{on } \boldsymbol{x} \in \partial V \tag{E.10}$$

のように，右辺の積分領域を Ω だけにすればいい。しかし Ω はその位置と形も未知なのだ。とても普通の頭では解けそうもないことがここで想像できる。

さらに，実際には変形できる物体中の波動方程式を用いる必要があるので独立変数には時間 t も含まれるのが一般的だが，定式化はほぼ同様だ。そして物体中の異種材料や空隙等の $p(\boldsymbol{\xi})$ と Ω は波の散乱源として捉えられる。著者は全く理解できなかったので，興味を持った読者は文献 [139] を読んで欲しい。また時空間を対象とするので，たいていは式 (E.8) に相当する式そのものを物理的時間領域で解く代わりに，それを Fourier 変換して周波数領域で解くことになるので，真剣に努力して勉強する必要がある。著者が理解できなかった理由はこの記述からも想像できると思う。破壊力学と同様，複素関数論の勉強が必須だ。

写真 E.1 Machinac 橋, Michigan 州 1957 年竣工

‘PhD.’ 米国の学位には他に Medical Doctor や Doctor of Music 等があるが，何が違う，どうして哲学? どうやら PhD 以外は何らかの技術そのものを身に付けたものなのだそうだ。だから技術や真実の裏にある理屈についての学位を総称して PhD と呼ぶらしい。したがって細菌学や音楽史で取る学位は PhD になるとか。なお，BS は ‘Bullshit’，MS は ‘More Shit’，PhD は ‘Piled High and Deep’ の頭文字とする見方は正しい・・・か。ところで ‘bullshit’ はもちろん動詞としても使われているが，これは ‘chicken’ が動詞でもあるのと同様のようだ。

付録 F

1 次元の粘弾性の基礎的な考え方

F.1　粘性

Northwestern 大学の Achenbach 先生の ‘Viscoelasticity’ の講義ノート（1980 年頃）から最初の 10 ページ程をここに引用するが，第 1 著者がどうやって単位を取得できたのか不思議である。ノートを読み直してみても，また中間テストの答案用紙を見ても，当時どうして理解できたのかが不思議なのだ。ここは純せん断の 1 次元問題を対象として，粘弾性の持つ基礎的な性質とその記述の仕方を列挙する。せん断問題なので簡単のために工学ひずみ γ を用いるが，時間パラメータに τ を用いるので，応力は σ で表示する。

さて，粘性はひずみ速度が応力に比例して生じるような性質なので，基本的には

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta}\,\sigma \tag{F.1}$$

とモデル化される。ここに上付きドットは時間による微分を表し，η は粘性抵抗係数で材料パラメータである。一方，弾性は Hooke の法則に従うものとすると式 (3.45) から

$$\gamma = \frac{1}{\mu}\,\sigma \tag{F.2}$$

という関係が成立する。あとで定義する緩和関数 $G(t)$ と混同しないように，せん断弾性係数には μ の方を用いている。この両方が同時に成り立つ材料の性質を粘弾性と呼ぶ。次の節では，最も基本的な二つのモデルを用いて粘弾性が持つ特性を紹介する。

F.2　粘弾性

F.2.1　クリープ

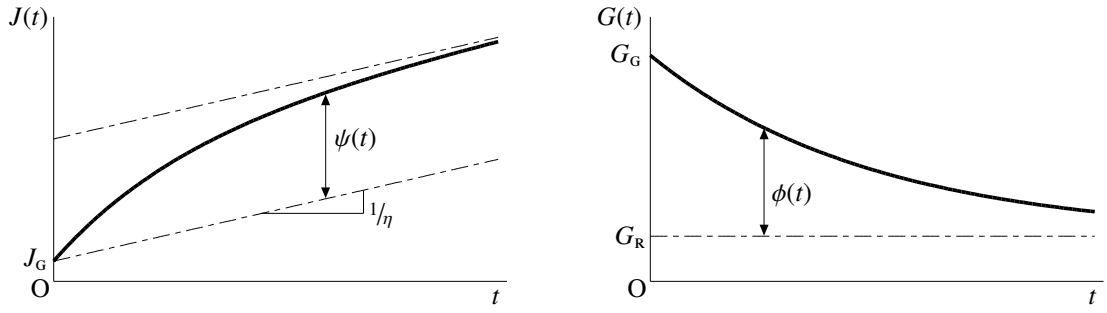
(1)　クリープコンプライアンス

まず，ある大きさの応力 $\sigma(0)$ が時刻 $t = 0$ に与えられたとする。つまり Heaviside 関数を用いて応力が

$$\sigma(t) = \sigma(0)\,H(t) \tag{F.3}$$

で与えられたとする。このとき粘弾性材料には $\gamma(t)$ のひずみが生じ，それは

$$\gamma(t) = \sigma(0)\,J(t) \tag{F.4}$$



(a) クリープコンプライアンス　　(b) 緩和関数

図 F.1 粘弾性挙動：クリープと応力緩和

になると表すことにする。ここに関数 $J(t)$ はクリープコンプライアンスと呼ばれ，多くの材料では一般的に

$$J(t) = J_{\mathrm{G}} + \frac{t}{\eta} + \psi(t) \tag{F.5}$$

のようにモデル化される。 J_{G} はガラス的コンプライアンスと呼ばれ，第 3 項の $\psi(t)$ はある有界な流動を表し，これに対し第 2 項は有界ではない流動成分になる。例えば図 F.1 (a) のような性質を示す。

この Δt 秒後に応力増分 $\Delta\sigma(t+\Delta t)\,H(t+\Delta t)$ が与えられたとすると，そのあとのひずみは式 (F.4) にその増分を加えればいいので

$$\gamma(t) = \sigma(0)\,J(t) + \Delta\sigma(t+\Delta t)\,J(t-\Delta t) \tag{F.6}$$

となる。そのあとも Δt 秒毎に順次応力増分が N 回与えられ続けたとすると

$$\gamma(t) = \sigma(0)\,J(t) + \sum_{n=1}^{N} \Delta\sigma(t+n\Delta t)\,J(t-n\Delta t) \tag{F.7}$$

のように重ね合わせればひずみを求めることができる。これを踏まえると，応力が階段関数的にではなく連続的に与えられた場合は，上式で $N \to \infty$ とすればいいから

$$\gamma(t) = \sigma(0)\,J(t) + \int_{0+}^{t} J(t-s)\,\mathrm{d}\sigma(s) = \sigma(0)\,J(t) + \int_{0+}^{t} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}(s)\,J(t-s)\,\mathrm{d}s \tag{F.8}$$

のように算定できる。積分の下限の 0+ は $0+\epsilon$ において $0<\epsilon\to 0$ の極限をとった時刻を示す。これがクリープという現象を表現する基礎式であり，次節の応力緩和も含めて粘弾性はこのようなたたみ込み積分で表現される。

(2) Kelvin モデル

では $J(t)$ の中の $\psi(t)$ の具体的な例を求めるために， Kelvin モデル[1]に応力を与えてみよう。粘性は第 9 章の粘性振動の節で紹介したダッシュポットでその機能をモデル図化できる。そこで弾性バネとダッシュポットを一つずつ並列につないだ系に応力を与えよう。この系は Kelvin モデルと呼ばれる。並列なので，つり合い式は式 (F.1) (F.2) から

$$\sigma = \mu\,\gamma + \eta\,\dot{\gamma}$$

あるいは

$$\dot{\gamma} + \frac{1}{\tau}\,\gamma = \frac{1}{\eta}\,\sigma \tag{F.9}$$

[1] 第 9 章では Kelvin-Voigt モデルと呼んでいた。

と表すことができる。ここに $\overline{\tau}$ は遅延時間と呼ばれ

$$\overline{\tau} \equiv \frac{\eta}{\mu} \tag{F.10}$$

で定義される。さて応力は $t = 0$ に σ_0 を与えたものとすればいいので

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$$

で与えられる。これを式 (F.9) の右辺に代入し，初期条件 $\gamma(0) = 0$ の元で解くと

$$\gamma(t) = \frac{1}{\mu}\sigma_0 \left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{\overline{\tau}}\right)\right\} \tag{F.11}$$

という解を得る。式 (F.4) が $J(t)$ を定義しているので，この解を用いると最終的に

$$J(t) \equiv \frac{\gamma(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{\mu}\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{\overline{\tau}}\right)\right\} \tag{F.12}$$

のようにクリープコンプライアンスが求められる。

Kelvin モデルにさらにもう一つのバネ（バネ定数 μ_0）ともう一つのダッシュポット（抵抗係数 η_0）を直列につなぐと，クリープコンプライアンスは

$$J(t) = \frac{1}{\mu_0} + \frac{t}{\eta_0} + \frac{1}{\mu}\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{\overline{\tau}}\right)\right\} \tag{F.13}$$

のように，式 (F.5) の第 1, 2 項を導入できる。

F.2.2 応力緩和

(1) 緩和関数

逆に，ある大きさのひずみ $\gamma(0)$ が時刻 $t = 0$ に与えられたとすると

$$\gamma(t) = \gamma(0) H(t) \tag{F.14}$$

のようにひずみは表現できる。このとき粘弾性材料には $\sigma(t)$ の応力が

$$\sigma(t) = \gamma(0) G(t) \tag{F.15}$$

になると表すことにする。ここに関数 $G(t)$ は緩和関数あるいは緩和弾性率と呼ばれ，多くの材料では一般的に

$$G(t) = G_{\mathrm{R}} + \phi(t), \quad \phi(0) = G_{\mathrm{G}} - G_{\mathrm{R}} \tag{F.16a, b}$$

のようにモデル化される。式 (F.16a) の右辺第 1 項の G_{R} はゴム的弾性率と呼ばれ，第 2 項の $\phi(t)$ はある有界な流動を表し，式 (F.16b) の G_{G} はガラス的弾性率と呼ばれる。例えば図 F.1 (b) のような性質を示す。

この Δt 秒後にひずみ増分 $\Delta\gamma(t + \Delta t) H(t + \Delta t)$ が与えられた場合を考え，前節と同じような考え方を用いると，ひずみが連続的に与えられた場合

$$\sigma(t) = \gamma(0) G(t) + \int_{0+}^{t} G(t - s)\,\mathrm{d}\gamma(s) = \gamma(0) G(t) + \int_{0+}^{t} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}(s) G(t - s)\,\mathrm{d}s \tag{F.17}$$

のように算定できる。これが応力緩和という現象を表現する基礎式である。

(2) Maxwell モデル

Kelvin モデルとは異なり，バネとダッシュポットを直列につないだ系を Maxwell モデルと呼ぶ。この場合の変形（実際は変形速度）の整合性は

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\sigma}}{\mu} + \frac{\sigma}{\eta}$$

あるいは

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma = \mu\dot{\gamma} \tag{F.18}$$

となる。ここに τ は式 (F.10) と全く同じ定義

$$\tau \equiv \frac{\eta}{\mu} \tag{F.19}$$

で表されるが，緩和時間と呼ばれる。ひずみは $t = 0$ に γ_0 を与えたものとすればいいので

$$\gamma(t) = \gamma_0 H(t) \tag{F.20}$$

で与えられる。これを式 (F.18) の右辺に代入すると，解くべき式は

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma = \mu\gamma_0\delta(t) \tag{F.21}$$

となる。ここに右辺の $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。 $H(t)$ も $\delta(t)$ も超関数なので慣れないとその取り扱い方はとても難しいが，結局式 (F.21) の右辺は時刻 $t = 0$ 以外では零と考えればいいので，この式の解が

$$\sigma(t) = \mu\gamma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) H(t) \tag{F.22}$$

となることは想像できるかもしれない。今はその解き方については言及しない（できないからだが）ことにしよう。実際この解を式 (F.21) に代入すれば，それが正しいことは確認できる。最終的には式 (F.22) の右辺の $H(t)$ は無くても同じだが，それが無いと式 (F.21) の右辺は得られないので注意すること。この結果を式 (F.15) の定義に代入すれば，緩和関数 $G(t)$ が

$$G(t) \equiv \frac{\sigma(t)}{\gamma_0} = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{F.23}$$

と求められる。ここでは $H(t)$ は省略した。

Maxwell モデルにもう一つのバネ（バネ定数 μ_{R}）を並列につなげば，緩和関数は

$$G(t) = \mu_{\mathrm{R}} + \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{F.24}$$

となり，式 (F.16a) の第 1 項を導入できる。と，ここまでは講義ノートの式を追うことができたのだが，ムニャムニャ・・・。

付録 G

1 次元の熱伝導と関連した力学

G.1　1 次元の熱伝導問題

G.1.1　熱伝導方程式

(1)　場の方程式

長さ a で断面積が A の一様な棒の中の長手方向の熱伝導を対象とする。位置 x における時刻 t の温度を $u(x,t)$ とし，位置 x の断面を通過する単位断面積当たりの熱流を $q(x,t)$ とする。q の符号は熱が x の正方向に流れているときに正とする。また棒の中間部には外からの入熱が単位体積当たり $r(x,t)$ だけ分布するものとする。多くの実験結果から，材料中に蓄積される単位質量当たりの熱は温度の時間変化率に比例することがわかっていて

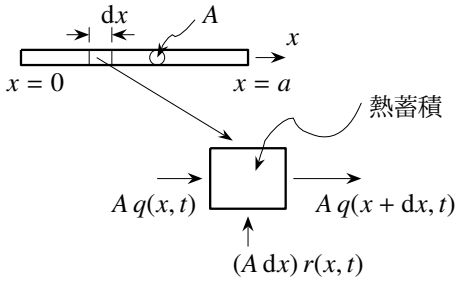


図 **G.1**　熱の入出力と蓄積

$$（熱蓄積）\ = c\rho\,(A\,\mathrm{d}x)\,\frac{\partial u}{\partial t} \tag{G.1}$$

と表される。ここに比例係数の c は**熱容量**であり ρ は密度で，いずれも材料パラメータである。したがって，図 G.1 の微分要素の熱（エネルギ）の保存則から

$$（熱入出力差）\ = (A\,\mathrm{d}x)\,r(x,t) + A\,q(x,t) - A\,q(x+\mathrm{d}x,t) = （熱蓄積）\ = c\rho A\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

あるいは

$$A\,r(x,t) - A\,\frac{q(x+\mathrm{d}x,t) - q(x,t)}{\mathrm{d}x} = c\rho A\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

となるので，$\mathrm{d}x \to 0$ の極限を考えれば

$$r(x,t) - \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = c\rho\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{G.2}$$

が基本的な熱伝導方程式である。

さらに，熱流は温度の高いところから低いところへと生じるという **Fourier** の法則は

$$q(x,t) = -\kappa\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{G.3}$$

と表すことができる。ここに κ は**熱伝導率**と呼ばれる材料パラメータである。式 (G.3) を式 (G.2) に代入すれば，一般的な熱伝導方程式が

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + r(x,t) = c\rho\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \quad 0 < x < a \tag{G.4}$$

と求められる。もし材料が一様なら上で導入したすべての材料パラメータは x 方向に一定になるので，上式は

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{r(x,t)}{c\rho} \tag{G.5}$$

と書くことができる。ここに k は**熱拡散率**と呼ばれる材料定数で

$$k \equiv \frac{\kappa}{c\rho} \tag{G.6}$$

と定義されている。

(2)　初期条件と境界条件

熱伝導方程式は式 (G.5) の偏微分方程式で与えられ，これを用いて唯一な未来予測ができるためには，さらに初期条件と境界条件が適切に与えられなければならない。

初期条件:　初期条件は，時刻 $t = 0$ における棒中の温度分布で与えられるだろうから

$$u(x,0) = f(x) \tag{G.7}$$

と表される。ここに $f(x)$ は時刻 $t = 0$ における任意の場所 x の温度分布であり，未来予測を始める時点で測定して与えられる関数である。

境界条件:　さらに，棒の端部の $x = 0$ および $x = a$ における状態を境界条件として与えないと，唯一の解は求められない。境界条件は一般に 3 種類あるが，最も基本的なものは，その端部の温度を与える条件（**Dirichlet 条件**あるいは**第 1 種条件**）だろう。つまり

$$u(0,t) = T_{\mathrm{L}}(t), \quad u(a,t) = T_{\mathrm{R}}(t) \tag{G.8a, b}$$

であり， $T_{\mathrm{L}}(t)$ と $T_{\mathrm{R}}(t)$ は時々刻々端部で測定されている温度を表していて，与えられる関数である。

二つ目は端部の熱入出力を与える条件（**Neumann 条件**あるいは**第 2 種条件**）である。例えば発泡スチロールのような材料で両端を断熱する場合は，端部の熱流を零にする条件で与えればいいので

$$-q(0,t) = \kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad q(a,t) = -\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 \tag{G.9a, b}$$

となる。あるいは外部からの入熱装置を用いて， x の正の向きに指定した熱流を与えることができれば，その条件は

$$-q(0,t) = \kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = Q_{\mathrm{L}}(t), \quad q(a,t) = -\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = Q_{\mathrm{R}}(t)$$

のように与えられる。 $Q_{\mathrm{L}}(t)$ と $Q_{\mathrm{R}}(t)$ が端部の x の正方向の入熱流量を表していて，与えられる関数である。

三つ目の境界条件は上の二つの条件を混合したもの（**Robin 条件**あるいは**第 3 種条件**または**混合条件**）で，熱伝導問題では例えば **Newton の冷却法則**という条件がある。それは

$$\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h_{\mathrm{L}}\,\{u(0,t) - v_{\mathrm{L}}\}, \quad -\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = h_{\mathrm{R}}\,\{u(a,t) - v_{\mathrm{R}}\} \tag{G.10a, b}$$

のように与えられる。つまり，端部の熱流はそこの温度に比例するというもので， h_{L} や h_{R}, v_{L}, v_{R} は材料や端部に設置した装置特性を表すパラメータである。 Fourier 級数を用いてこのような種々の初期値境界値問題を解く方法は付録 I に示した。

G.1.2 過去に向かって拡がる

Northwestern 大学の Olmstead 先生 (1980 年頃当時）の ‘Differential Equations of Mathematical Physics’ の講義ノートに，一つ面白い考察がある。それは「逆向きの熱伝導方程式」という問題[1]で，簡単のために $k = 1$ としたときに無限に長い棒中で，時間を $t \to -t$ のように置き換えて得られる

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{G.11}$$

のような逆向きの時間方向の熱伝導の問題を

$$v(x,0) = f(x), \quad \text{および，} \quad x \to \infty \text{ において } |f(x,t)| < \infty \text{（有界）} \tag{G.12a, b}$$

の条件で解いたときに，「どんお (Erutarepmet)」 $v(x,t)$ が存在するかどうかという問題である。講義ノートを今読んでも全く理解できないが，発散しない解が存在しないことを比較的容易に証明できるようだ。つまり，時間の逆向きの熱伝導方程式には物理的に意味のある答が無いことが証明できるというのだ。逆向きに再生された拡散する煙の映像には違和感を持つと思うが，それが物理ではないことを数学は証明できるというのだ。数学はすごい。興味のある読者のために当時の講義ノートのコピーを pp.741-743 に置いた。

G.2 1 次元の力学との簡単な連成

もう一つ面白い問題がある。 Northwestern 大学の Dundurs 先生（1980 年頃）の ‘Elasticity’ の講義ノートにある問題である。図 G.2 のように，長さ a の棒の左端が温度 T_{L} になっていて，この温度を 0 度から十分ゆっくりと上げていって棒全体が一様な温度 T_{L} になると近似できるものとする。右の壁の温度は $T_{\mathrm{R}} = 0$ 度で， $T_{\mathrm{L}} = 0$ 度の初期状態には棒の右端と右の壁との間には隙間 g があるものとする。

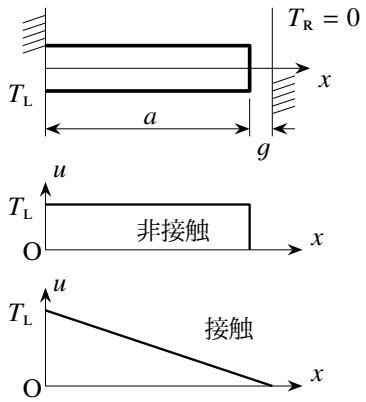


図 G.2 棒の伸びと接触

温度膨張ひずみは非弾性ひずみなので，一般化された Hooke の法則式 (3.105) の 1 次元版は

$$\sigma_{xx} = E\left(\epsilon_{xx} - \epsilon^T\right), \quad \epsilon^T(x,t) = \alpha\, u(x,t) \tag{G.13a, b}$$

になる。ここに ϵ^T は温度膨張ひずみであり， u は初期状態からの温度増加分である。 E は Young 率で α は**線膨張係数**であり，どちらも材料パラメータ（ここでは定数とする）である。右端が壁に接触する前は，棒中の温度は一様で T_{L} に等しいとしたので，右端が壁に接触するのは伸び変位が g になった瞬間である。したがってそのときの温度 T_0 は次の条件から

$$\epsilon^T a = g, \quad \epsilon^T = \alpha\, T_{\mathrm{L}} \quad \to \quad T_{\mathrm{L}} = T_0 \equiv \frac{g}{a\,\alpha} \tag{G.14}$$

のように求められる。

一方， T_{L} を非常に大きな値に固定して，かつ右端が壁に接触した状態を保持し続けられていれば，十分時間が経った定常状態では図 G.2 の一番下のような線形の温度分布になる。したがって

$$u(x,t) = T_{\mathrm{L}}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad \to \quad \epsilon^T = \alpha\, T_{\mathrm{L}}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

であり，ひずみは式 (G.13) から

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha\, T_{\mathrm{L}}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

[1] 日本の高等教育現場で，こんな洒落た名称の物理量（ん!?）を定義した問題の記述ができる先生が何人いるだろうか。

と求められる。このとき棒の途中には外力は存在しないので応力は x 方向に一定の圧縮になる。したがって $\sigma_{xx} = -p$ とすると

$$\epsilon_{xx} = -\frac{p}{E} + \alpha T_{\mathrm{L}}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

となる。この温度膨張ひずみによる棒の伸びは隙間の g に等しいから

$$g = \int_0^a \epsilon_{xx}\,\mathrm{d}x = -\frac{p\,a}{E} + \frac{a\,\alpha\,T_{\mathrm{L}}}{2}$$

という関係が成立する。そこで，左壁の温度を徐々に下げていき，右端が壁から離れる時点の温度 T_1 を求めると，それは $p = 0$ の瞬間に相当するので，上式から

$$\frac{p\,a}{E} = \frac{a\,\alpha\,T_1}{2} - g = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 = \frac{2g}{a\,\alpha} = 2\,T_0 \tag{G.15}$$

と求められ，式 (G.14) の T_0 の 2 倍の温度になったときに棒は壁と離れることがわかる。

この結果は面白いでしょう。つまり，では

$$T_0 < T_{\mathrm{L}} < T_1 = 2\,T_0$$

の間は一体何が起こっているのかということである。多分容易に想像がつくと思うが，$T_{\mathrm{L}} = T_0$ で右端が接触した途端右端の温度は 0 度になるから棒の先端はすぐに縮んで接触を失うことになるが，熱伝導によってまたすぐに伸びて接触する，といったことを繰り返すだろう。そこで，左壁の温度を T_0 から $U(t)$ だけ上げ続けることにして，棒が（理想的に）右端で壁に接触して，棒に圧縮応力が生じた状態を保持できたとすると，棒中の温度分布は一定から線形分布に徐々に変化していく。もしそういうことが可能なら，その熱伝導問題は，$g << a$ と近似できる場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{p(t)\,a}{E} = \alpha \int_0^a u\,\mathrm{d}x - g \geq 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{G.16a, b}$$

という問題を

$$u(0,t) = T_0 + U(t), \quad u(a,t) = 0, \quad u(x,0) = T_0, \quad \text{ただし} \quad U(0) = 0, \quad U(\infty) = T_0 \tag{G.17a, b, c, d, e}$$

の条件で解けばいい。しかし，どんなに急に温度を上げても軸力 $p(t)$ は負になり，結局右端では接触・非接触の振動が生じることになる。いやぁ，面白い。

「どんお」問題についての講義ノート No.1[2]

103

The study of Erutarapmet

$v(x,t)$ = Erutarapmet

(Backward heat eq)

$$\star \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ v(x,0) = f(x) & \\ v(x,t) \ \text{bounded} & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

$$v(x,T) = \ ? \qquad t = \tau > 0$$

To connect to a problem involving the regular heat eq., let

$$\tau = T - t$$

$$u(x,\tau) = v(x,t) = v(x, T-\tau)$$

Here $u(x,\tau)$ will satisfy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0 & -\infty < x < \infty,\ \tau > 0 \\ u(x,0) = v(x,T) & ? \\ \left(u(x,T) = f(x) \right) & \\ u(x,\tau) \ \text{bounded} & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

Attempt to solve with Green's fn.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \dfrac{\partial G}{\partial \tau} = -\delta(x-x_0)\delta(\tau-\tau_0) \\ G \equiv 0 \qquad \tau < \tau_0 \\ G \to 0 \qquad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

$$G(x,\tau \mid x_0,\tau_0) = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(\tau-\tau_0)}}}{2\pi^{1/2}(\tau-\tau_0)^{1/2}}$$

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}}}{2\pi^{1/2}\tau^{1/2}}\, v(x_0,T)\, dx_0$$

This satisfies the PDE and cond'n as $|x| \to \infty$. But $v(x,T)$ not known !!

[2] 英語で受講する権利を持っている留学生を含む学部 3 年生に英語で数学（付録 I がその内容）を教えていたとき，日本人学生による授業評価に「黒板で筆記体を使うな」という強い表現の警告が書いてあって驚いた。というのも，第 1 著者が留学していたときの板書はすべて筆記体だったし，試験問題や資料にも筆記体が使われること（p.744 に例示）もあったからだ。何か悪いことをしているような気がずっとしながらもそのまま続けていたが，呵呵，なんと驚くべきことに，我が国の中等教育の英語科目では筆記体を教えていないということがあとでわかった。実際 2016 年に，配付資料に手書きした ‘*kan*’ の最後の文字がわからないという質問をもらった。前後の文字列を眺めて推測すればわかるだろうに，最近は何でもかんでも聞くのよねぇ。あぁーあ。

「どんお」問題についての講義ノート No.2[3]

104

Let us attempt to use the information $u(x,T)=f(x)$

$$u(x,T)=\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi^{1/2}T^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4T}}\, v(x_0,T)\,dx_0}$$

Thus we have an integral eq. for the determination of $v(x,T)$.

Note that if $v(x,T)$ is locally integrable in x on $(-\infty,\infty)$, then $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4T}} v(x_0,T)\,dx_0$ is a C^∞ function.

Hence $f(x)$ must be $\in C^\infty$. Thus if $f(x)\notin C^\infty$, <u>no soln</u> exists to the Initial value problem for Eruterepmet.

Suppose we try to examine uniqueness.

Let v_1 and v_2 be soln of ★.

$$w(x,t)=v_1-v_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial w}{\partial t}=0 & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ w(x,0)=0 & \\ w(x,t)\to 0 & \text{as } |x|\to\infty \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx=0$$

$$\underbrace{w\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2\,dx=0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2\,dx=2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)\,dx-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,0)\,dx}_{=0}=2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dt'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)\,dx=2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dt' \not\Rightarrow w\equiv 0$$

uniqueness doesn't necessarily follow!!

[3] お気付きと思うが，ここに示した quarter 制の 90 分週 2 回 10 週の letter-size 講義ノートの右上のページ番号は 100 を超えて（p.745 にその他の例）いる。我が国の 90 分授業 14 回（少なくとも 1 回は定期試験だとして）で，50 ページを超える板書をしてくれる教員が第 1 著者以外に何人いるだろうか。と書いても，日本人学生にとってはそれがたいへん不評で，学生による授業評価から「字が汚い」と「速過ぎる」が無くならない。上の数学のノートと同じく文章を書くので，漢字は雰囲気だけを残した記号にならざるを得ない。呵呵。ただその文章は必ずしゃべりながら板書しているのだが，それを聞きながら（ということができないのかもしれないが，昔は声に出した技術用語の定義を正確に写し取らないといけない東京大学の国分正胤先生の「コンクリート工学」という講義もあったぞ）その汚い字を 90 分間に A4 版 4 枚分複写しないといけないのである。ん? そんなに辛くなさそうだなぁ。呵呵。最近はカメラで撮影する学生もいるくらいだ。先日計ったら 90 分の講義中にホワイトボードの前を 900 歩以上歩いていた。そもそも B5 サイズの綴じたノートを使っているのが間違いの元の一つだと思うのだが，シラバスでいくら注意しても誰も気にしてくれない。A4 幅 21 cm のレポート用紙に板書を書きなぐって写すことができる「自由」は魅力的なのに。ただし，左には綴じ代の 25 mm くらいのマージンは必須だ。

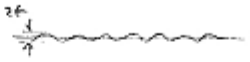
「どんお」問題についての講義ノート No.3[4]

105

Suppose we try to examine continuous dependence on data.

Consider the following example case for $f(x)$

$$f(x) = \epsilon \sin \alpha x$$



Since $f(x) = \epsilon \sin \alpha x \in C^\infty$, can solve the integral eq. for $v(x,T)$ to find

$$v(x,\tau) = \epsilon \sin \alpha x \, e^{\alpha^2 T} = v(x,0) e^{\alpha^2 T}$$

Note that no matter how small we make $v(x,0)$ (i.e. $\epsilon <<< 1$), we can have $v(x,T)$ as large as desired by taking α sufficiently large.

That is

$$|\epsilon \sin \alpha x - 0| \leq \epsilon$$

$$|v(x,T) - 0| = |v(x,0)| e^{\alpha^2 T}$$

$$\leq \epsilon e^{\alpha^2 T} \longrightarrow \infty$$

Hence no continuous dependence on data. //

$\boxed{\text{it is not physics}}$

The Backward Heat eq. problem is often referred to as an <u>ill-posed problem</u>.

[4] ついでだが，以下は第 1 著者の経験談である。 NU の quarter 制講義は 1 科目 90 分週 2 回（例えば TTh1300-1430）あるいは 60 分週 3 回（例えば MWF1000-1100）ないし 4 回（例えば火曜日にクイズのある数学が MTWF1200-1300）で 11 週 30 時間だった。中には T1300-1400, Th1300-1500 という変則的なものもあった。最終週に定期試験が設定されるが，同日に 3 科目以上の試験を受けるような履修登録は禁止されていることからもわかるように，卒業に必要な単位数は我が国に比べるとかなり少ない。ただし PhD プログラムの講義は quarter 当たり 3 科目が限度， 2 科目でもきついかもしれない。また我が国と違って卒論も無いことからも明らかなように，学部は専門教育を主目的とはしておらず，幅広い教養を身に付けた人材育成が教育目標だと思われる。単位数は普通 1 科目 1 単位である。そして，秋学期が始まる時点で 6 単位以下の学生が Freshmen， 17 単位以下が Sophomores， 28 単位以下が Juniors で 29 単位以上が Seniors となっていた。また quarter 制といっても summer session はほぼ誰も受講しない，というよりも，期間が短いこともあって質の充実した通常の講義は提供されないので，実質 3 学期制である。そして理解を深めるために少なくない宿題が出される。学生は金曜の午後と土曜か日曜の個人的な重要行事を除き 11 週間，場合によっては夜遅くまで必死に予習・復習・宿題をこなして定期試験を受けたあとは，その quarter に得た知識をすべて忘れ去るという効率的かつ有意義な青春を楽しんでいた。さらに take-home exam（p.744 の右上が 24 時間の期末試験だ）もあった。例えば火曜日の講義時に試験問題が提示され， 3 日後の金曜の講義のときに答案を提出するものだ。何を見てもいいが他人と相談してはいけない試験で，難易度はかなり高い。著者は，「難しいから早めに始めなさい」と先生が付け加えた試験では落第しそうになった。もし相対評価をした場合， 90 点を取っても不合格になるかもしれないといった試験である。興味深いことに，宿題であっても他人のを写すアメリカ人はいない（同室のアメリカ人学生を観察した事実に基づく推量）と思われる。さて， 100 人くらいの学部 3 年生の数学の授業（付録 I がその内容）における貴重な経験では，講義に遅刻する者はおらず始まる前に全員着席して待ち，私語は無かった。どこかの 3 年生とは全く違っていた。ただ終了時刻が近づくと，わざと「バタン」と音を立ててノートを閉じる学生が複数いたのは楽しかった。再履修制度は多分無く，学部生の場合，ある quarter 期末の成績が B average（80 点くらいか：大学によって異なるらしい）を下回ると，まず父兄に警告が伝えられる。次の quarter でも同様だった場合には即退学である。当時の NU にはスポーツ入学は無く，学部生のレベルは全米でもかなり上位だと聞いた。成績が下がると試合に出られなくなるため，場合によってはチューターがついた。図書館は夜中まで開いているが，夜間，複数の学生に勉強を教えてもらっている体格がとてもいい (No offense) 学生がいたのがそれだったのだろう。東北大学の議論では，すべての科目に GP を付けるべき（米国のはそうなっていないし P/N オプションもあった）だとか， GPA を更新できるような救済的再履修制度を作るべきだとか，本末転倒で本質的ではない提案が強かった。実際，新しくトップダウン方式で導入されたレベル認定試験も複数回受験できる。さて NU の学内には university police がいた。銃も持っていたような気がするが，学生と同じ若者もいたような記憶がある。間違いかもしれない。我が国のどこかの大学では駐輪違反はし放題だが，中西部のある州立大学の場合，学内外の誰であろうと学内で駐車違反すると一晩留置所に拘留されると聞いた。が， NU には違反切符を貯めた猛者もいたなぁ。彼は卒業できたのだろうか。

筆記体で書かれた試験問題や宿題の例[5]

① Consider the elastic half plane shown and the Airy stress function

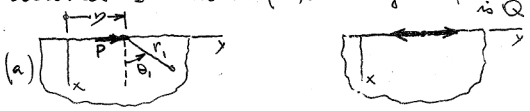
$$U = \frac{q}{2\pi}\left\{ r^2(\theta \sin 2\theta - \log r \cos 2\theta) + r^2 - r^2 \log r + r^2 \cos 2\theta + \frac{\pi}{2} r^2 \sin 2\theta \right\}$$

What tractions on $\theta = +\pi/2$ and $\theta = -\pi/2$ correspond to this Airy stress function?

② The Airy stress function for a concentrated load, as shown in (a), is

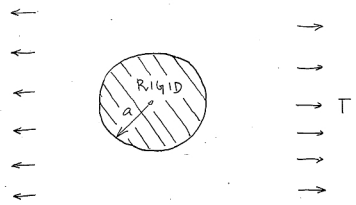
$$U = \frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \cos\theta_1$$

Find the Airy stress function for a doublet shown in (b). Strength of doublet is Q



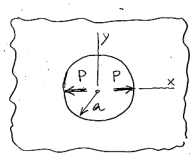
Final 3/13 · 2:30 pm (24 hr) 3/14 ~2:30 p.m.

① Uniform tension field disturbed by a rigid circular inclusion.



1. Find the Airy stress function.
2. Specialize the result for $n=1$ and study the stress concentration effect.

② Infinitely extended material with a circular hole, subjected to two concentrated forces.



Review the Hertz solution for the diametrally compressed disk. Then

1. Find the Airy stress function (use the same coordinates as for disk)
2. Find stresses on $x=0$.

MATH C05 COMPLEX VARIABLES FOR APPLICATIONS

INSTRUCTOR: GEORGE GASPER

OFFICE: LUNT 222

OFFICE HOURS: 10 AM MWF AND BY APPOINTMENT

TEXT: SAFF & SNIDER "FUNDAMENTALS OF COMPLEX ANALYSIS" (LATE ARRIVING AT THE SBX SINCE IT WAS TEMPORARILY OUT OF PRINT)

HOMEWORK PROBLEMS FOR THE FIRST WEEK (NOT TO BE HANDED IN)

1. Simplify the following:

a) $(8+i) - (5+i)$ e) $\frac{2+3i}{1+2i} - \frac{8+i}{6-i}$

b) $(-1+i)^2$ f) $i^3(i+1)^2$

c) $\frac{8i-1}{i}$ g) $i^{1/k}$, $k \in \mathbb{Z}$ (the set of integers)

d) $\frac{-1+5i}{2+3i}$ h) i^{8k+3}, $k \in \mathbb{Z}$

2. Evaluate: $3i^{11} + 6i^3 + \frac{8}{i^{20}} + i^{-1}$.

3. Show that the complex numbers $z_1 = -1+i$ and $z_2 = -1-i$ satisfy the equation $z^2 + 2z + 2 = 0$.

4. Given four particles of masses 2, 1, 3, and 5 located at the respective points $1+i$, $-3i$, $1-2i$, and -6, find the center of mass of this system.

5. Which of the points i, $2-i$, and -3 is farthest from the origin?

6. Describe the set of points z in the complex plane which satisfy each of the following

a) $\operatorname{Im} z = -2$ c) $|z-i| = |z+i|$

b) $|z-2+i| = 3$ d) $|z| = \operatorname{Re} z + 2$

$a^2+b^2+a-b=0$
$(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$

7. Find the following

a) $\left|\frac{1+2i}{-2-i}\right|$ b) $\left|\overline{(3+i)}(2-3i)(4i-3)\right|$

c) $\left|\frac{i^2(2+i)^3}{(1-i)^2}\right|$ d) $\left|\frac{(\pi+i)^{100}}{(\pi-i)^{100}}\right|$

8. Find the argument of each of the following complex numbers and write each in polar form

a) $-3/2$ b) $-3+3i$

c) $-\pi i$ d) $-2\sqrt{3}-2i$

e) $(2-i)(-\sqrt{3}+i)$ f) $(\sqrt{3}-i)^2$

g) $\frac{-2+\sqrt{3}i}{2+2i}$ h) $\frac{-\sqrt{3}(1+i)}{\sqrt{3}+i}$

9. Find the following

a) $\operatorname{Arg}(-6-6i)$ b) $\operatorname{Arg}(10i)$

c) $\operatorname{Arg}(-\pi)$ d) $\operatorname{Arg}(\sqrt{3}-i)$

10. Decide which of the following statements are true

a) $\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$

b) $\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z$, z not a real number

c) $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$

d) $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$.

[5] 上の二つはDundurs先生による「弾性論」の中間・期末試験問題の一部分であり，下の二つはGasper先生による「複素数とその応用」の宿題である。前者の右は24時間のtake-home examだったが，珍しいことに次の学期の継続講義の初回にDundurs先生が答を解説してくれた。後者は1年生か2年生対象の講義で，第1著者は複素関数論が苦手だったため復習を兼ねて興味本位で第1回目だけ座ってみたのだが，講義終了時に一人の学生が「あちこちに出てくる‘i’というのは何か?」という質問をした。教員の回答はprerequisiteについての説明だった。我が国の状況からするととても面白く特徴的な事態だろう。

米国における講義ノート (letter size) の 1 quarter 当たりのページ数の例[6]

講義名	担当教員名	ページ数	$\times(^{21}/_{30})$
Asymp. and Pertur. Meth. in Appl. Math.	Prof. Davis	135	95
Continuum Theory of Fracture	Prof. Keer	89	62
Diff. Eqs and Math. Physics I	Prof. Olmstead	104	73
Diff. Eqs and Math. Physics II	Prof. Olmstead	107	75
Diff. Eqs and Math. Physics III	Prof. Olmstead	84	59
Elasticity I	Prof. Dundurs	65	46
Elasticity II	Prof. Dundurs	66	46
Fourier Series and BVP	Assist. Prof. Mahar	64	45
Mechanics of Continua I	Prof. Nemat-Nasser	92	64
Mechanics of Continua II	Prof. Nemat-Nasser	62	43
Mechanics of Fracture	Prof. Achenbach	84	59
Plasticity	Prof. Mura	54	38
Plasticity	Prof. Nemat-Nasser	48	34
Seminar in Micromechanics	Prof. Mura[7]	28	20
Viscoelasticity	Prof. Achenbach	63	44
Wave Propagation	Prof. Achenbach	63	44
科目当たりの平均		76	53

Technological Institute

Deering (Music) Library

Weber Arch

2010 年 5 月の Northwestern 大学 Evanston キャンパス[8]を Sheridan Road に沿って北（左）から南（右）へ

[6] さて，米国の個々の講義の質は高く，高い評価を得ている上手な授業を教員が参観する等の努力（著者はそんなことはしたくないのだが）をするし，板書はよくオーガナイズされていて，それを写した講義ノートはあとで独りで復習できるような，読むことができる貴重な資料になる。西野文雄先生が留学をしつこく勧める理由の一つがこれだった。おかげでその講義ノートからの流用がこの文書にはたくさんある。今は知らないが，もちろんスライドや OHP を用いる講義は一つも無かった。あとで読んで何が書いてあるかわからないような表やグラフ等の数値を羅列した資料や図等は配られなかった。よほどのことが無い限り休講は無い。単位目的ではないものも含めた 17 科目中，2 科目でそれぞれ 1 回ずつ休講があったが，重要人物との会合の予定を事前に知らされて 1 回，もう 1 回は先生達の間の予算獲得会議が長引いてしまったことが理由だった。そもそも先生が出張等しないものだから，PhD の学生にとってはたいへんなストレスなのである。そんな講義 30 時間の板書を写したノートのページ数の例が上の表である。科目当たりの平均が 76 ページになる。我が国の講義は 1 科目 21 時間なので，それに相当するページ数を一番右の列に記したが，平均が 53 ページである。しかし，我が国の講義で 50 ページ以上の板書をする教員はほとんどいないのではないだろうか。西野文雄先生の 4 年次の応用弾性学が 38 ページ，大学院の弾性論が 66 ページだったが，当時はそれでも多いなぁと感じたものだった。ちなみに A4 サイズである。特に最近廊下から教室を覗くと，プロジェクタの性能が向上したためか多くの授業でスライドが用いられている。多分，そのスライドのコピーが資料として配られているのだろうが，教員がしゃべった内容をその資料の欄外にきちんと加筆しているとはとても期待できない。それで合格できるのだからたいしたものかもしれないが，オーガナイズされた知識として頭の中にきちんと納まっているのかどうかについては疑問を持っている。なお，上の表にある講義のいくつかでは，70 ページから 100 ページくらいの手書きかタイプされた資料がもらえるものもあった。

[7] 村外志夫先生は当時文献 [70] の初版をご執筆中だったこともあって，その草稿の 300 ページ以上のコピーを資料として配って式展開等の板書を省略なさったため，講義ノートが薄かっただけである。第 1 著者所有の講義ノートファイルには当時の宿題の計算用紙も綴じてあるが，それをノートに加えると倍以上の量になることを見ると，式展開等の板書を省略したくなる村外志夫先生のお気持ちもわからなくもないですよねぇ。

[8] 昔の Northwestern 大学の写真は `http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node25.html` に。また Evanston 周辺の昔の写真は `http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node26.html` に。

写真 G.1 松齢橋の親柱　福島県　1925 年竣工

‘energy,’ ‘data,’ ‘memory,’ ‘mail,’ ‘main’ and ‘sale:’ この文書では「エネルギ」と長音を無しにすると述べたが，「データ」「メモリ」も同様である。第 1 著者は「メイル」あるいは「メィル」と書くが，「メール」でもいいような気もする。どれもきちんとした理由がありそうだがわからない。ただ，昨今の新聞で「メーン」と書くのはなぜだろう。文字をみて意味を思い浮かべられないのだが。がしかし，「セール」でいいのは，もう日本語だからか。なら，「メール」「メーン」「セール」に整合性があるか。

付録 H

複合材料の平均特性

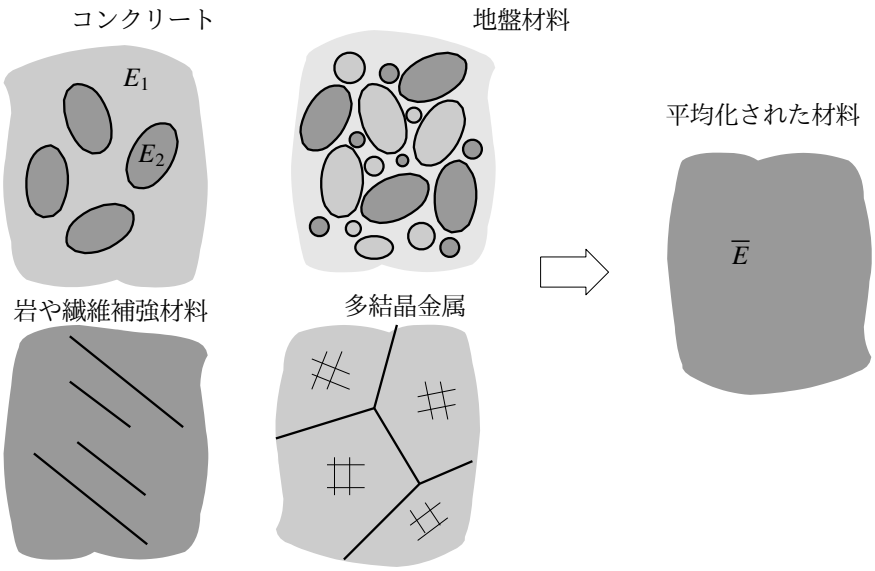


図 H.1 内部に微視構造を持つ材料とその平均化

H.1　内部に微視構造を持つ材料

この章は第 26 版までは英語で書かれていて，英語のみで実施する大学院博士課程（俗称）向けの集中講義用資料だった。ガラス繊維や炭素繊維を用いた繊維補強ポリマー (GFRP, CFRP) やコンクリートのような複合材料はもちろん，鋼のような多結晶金属でさえ内部は均質ではなく，異なる相等から成る複雑な内部の微視構造を持っている。例えばコンクリートは少なくとも二つの材料であるセメントペーストと骨材がそれぞれ異なる Young 率 E_1, E_2 等を持っている。岩には多くの節理が，繊維補強材には多くの繊維が内部に分布している。図 H.1 の左下の図では実線で節理や繊維を表している。地盤材料は各種粒子の隙間に空気や水が含まれている。多結晶金属はランダムな形や方向性を持った無数の単結晶がランダムに分布している。ただ社会基盤構造物の実際の設計では巨視的な材料特性を用いるのが現実的だが，もしこの微視構造に起因する特性を陽に考慮できればより合理的な設計が可能になるかもしれない。有限要素法で微視構造も要素分割すればその特性を考慮できるが，要素数が膨大になって，複雑な構造系全体の境界値問題を設計段階で数値解析の対象にするのはあまり現実的ではない。これに対し，複合材料の平均特性を解析的に求める方法もいくつか提案されていて，それを有限要素に組み込めば計算負荷もそれほど大きくならなくて済む。また例えば繊維補強材の繊維の種類や向

き・量のような材料中の微視構造そのものを設計する際にもその解析的手法は有用なツールになる。この章ではその解析的な平均化[1]手法の代表例について説明する。

まず最も単純で古典的な平均化に Voigt モデルというものがある。2 種類のバネ定数 E_1, E_2 を持つ二つの異なるバネを図 H.2 の左側の図のように並列に設置し，その両方に全体的に $\overline{\epsilon}$ だけの伸びを与えると，全体合計の抵抗力は

$$\overline{\sigma} = (1-f)\,\sigma_1 + f\,\sigma_2, \quad \sigma_1 = E_1\,\overline{\epsilon}, \quad \sigma_2 = E_2\,\overline{\epsilon} \tag{H.1a, b, c}$$

と算定できる。ここに f はバネの全本数のうちの二つ目のバネの本数の比率だ。この関係式から平均的なバネ定数（Young 率に相当）を

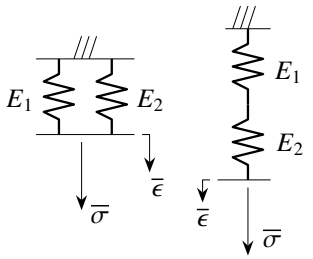


図 **H.2** Voigt と Reuss のモデル

$$\overline{\sigma} = \overline{E}\,\overline{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \overline{E} \equiv (1-f)\,E_1 + f\,E_2 \quad \text{(Voigt)} \tag{H.2a, b}$$

のように定義できることがわかる。つまり Young 率「だけ」の単純な体積平均である。これに対し，図 H.2 の右側の図のようにバネを直列に並べて全体的に $\overline{\sigma}$ だけの力を加えると，全体合計の伸びは

$$\overline{\epsilon} = (1-f)\,\epsilon_1 + f\,\epsilon_2, \quad \epsilon_1 = \frac{\overline{\sigma}}{E_1}, \quad \epsilon_2 = \frac{\overline{\sigma}}{E_2} \tag{H.3a, b, c}$$

と算定できるので，平均的なバネ定数（Young 率に相当）を

$$\overline{\epsilon} = \frac{\overline{\sigma}}{\overline{E}} \quad \rightarrow \quad \overline{E} \equiv \left(\frac{1-f}{E_1} + \frac{f}{E_2}\right)^{-1} \quad \text{(Reuss)} \tag{H.4a, b}$$

のようにも定義できる。これはコンプライアンスの体積平均で，明らかに Voigt の式 (H.2b) とは異なり Reuss モデルと呼ばれる。では平均 Poisson 比はどうやって求めますか?

現在この二つは平均 Young 率の上下界として知られていて，実測値はたいていはこの二つの値の間に分布する。しかし，例えば図 H.8 のようにこの上下界同士は f が小さい範囲であっても離れて過ぎていて現場では使い難く，幅広い境界値問題で使うにはさらなる精度の改良が必要だ。そしてこの古典的平均に決定的に欠けているのは，二つの相（材料）同士の力学的な相互作用が十分には考慮されていないことである。さらに，二つの相の形や向きといった幾何学的特徴も考慮されておらず，もう少し微視的な力学挙動を反映させる必要があることが明らかだ。ここでは文献 [70] で定義された ‘Micromechanics[2]’ の枠組の中で定式化される手法について説明する。例えば図 H.8 で ‘Mori-Tanaka’ と付記した曲線がその基本的なモデルによる平均値で「森・田中平均」として知られている。同じ図には Hill による self-consistent モデル [37] による平均値も比較のために ‘SC’ と付記して載せてある。なお第 H.3.1 節までは上述の文献 [70] からの抜粋コピーである。

H.2 非均質体と介在物

H.2.1 非均質体と Eshelby の解

まず，2 相複合材料の中の第 2 相の存在が回りの力学場をどのように乱すかを知る必要がある。図 H.3 の左側の図のように，ある母材でできた無限体中に 1 種類の非均質体が無数に分布した複合材料を考え，非均質体が占める全領域を Ω とする。母材も非均質体も等方弾性で，それぞれの Young 率と Poisson 比が E_{M}, ν_{M} と E_{I},

[1] この章では微視的特性から巨視的特性を求める行為を「平均化 (averaging)」と呼ぶことにした。文献 [155] で紹介されている著名な手法では，微視・巨視の相互作用を異なるスケール間の特異摂動法によって考慮しながら有限要素法を併用して平均化しているので，その名称に用いられる「均質化 (homogenization)」という言葉は使わないように努めた。

[2] 単に寸法が 10^{-6} m レベルの微視的な力学という意味ではなく，後述する eigen ひずみを仲介とする力学のことで，村外志夫先生独自の命名である。種々の出版物ではこの村先生の定義とは無関係の力学体系を同じように呼んでいたりするので注意が必要だ。

ν_{I} だとする。添え字の M と I が母材か非均質体かを区別している。非均質体は三つの主半径 a_1, a_2, a_3 を持つ楕円体だとする。

非均質体が 1 個のときの Eshelby の偉大な発見 [25] は，図 H.3 の右側の図のように無限遠点で何らかの外力が作用したとき

非均質体中のひずみ場は均質である。 $\boldsymbol{\epsilon} = \text{一様 in } \Omega$ (H.5)

ということだ。この結論は等方弾性でない場合や非均質体が楕円体でない場合には成立しない。この発見は，非均質体の存在によって乱される場が，その非均質体の領域 Ω の材料を母材と同じものにした上で，さらにその領域に熱膨張のような「適切な」残留ひずみを分布させて求められる場に等しくできる，ということを示唆している。このような残留ひずみを以下では **eigen ひずみ**と呼ぶことにする。文献 [70] の定義では，「非均質体」はある領域を占める母材とは異なる材料のことだが，均質な材料中に上述の eigen ひずみが分布した領域 Ω は「介在物」と呼ばれている。ただし，以下簡単のために「非均質体」も「介在物」と呼んだりするので注意して欲しい。この非均質体を適切な介在物で置き換える方法は「等価介在物法 [25]」と呼ばれているが，それについてはあとで説明する。

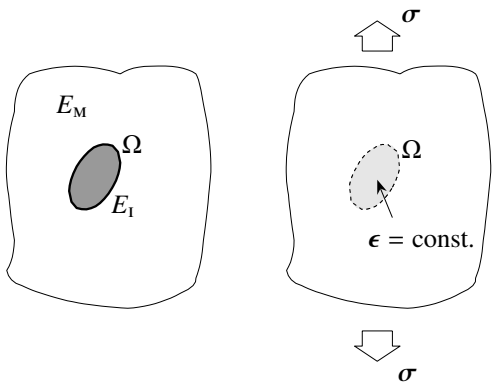


図 H.3 Eshelby の解

H.2.2 支配方程式

(1) 非均質体の問題 — 元の問題

まず図 H.4 の左側に描いたような，無限体 D 中に一個だけ非均質体が Ω の領域を占めている元々の問題の支配方程式を列挙しておく。任意点の変位 $\boldsymbol{u}$ とひずみ $\boldsymbol{\epsilon}$ には

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{H.6}$$

という関係がある。等方弾性体を対象とするので，それぞれの材料は

$$\sigma_{ij} = C^{\mathrm{M}}_{ijkl}\,\epsilon_{kl} = C^{\mathrm{M}}_{ijkl}\,u_{k,l} \text{ in } D - \Omega, \quad \sigma_{ij} = C^{\mathrm{I}}_{ijkl}\,\epsilon_{kl} = C^{\mathrm{I}}_{ijkl}\,u_{k,l} \text{ in } \Omega \tag{H.7a, b}$$

という Hooke の法則を満足する。ここに $\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}}$ と $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ はそれぞれ母材と非均質体の弾性係数である。ただしそれぞれの第 2 式から第 3 式への等号では，式 (H.6) を代入した上で，弾性係数の $C^{\mathrm{K}}_{ijkl} = C^{\mathrm{K}}_{ijlk}$ ($\mathrm{K} = \mathrm{M}, \mathrm{I}$) という対称性を用いた。それぞれの弾性係数は Lamé 定数 $\mu_{\mathrm{K}}, \lambda_{\mathrm{K}}$ を用いて

$$C^{\mathrm{K}}_{ijkl} = \mu_{\mathrm{K}}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right) + \lambda_{\mathrm{K}}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}, \quad (\mathrm{K} = \mathrm{M}, \mathrm{I}) \tag{H.8}$$

のように表される。δ_{ij} はの Kronecker のデルタである。 Lamé 定数は Young 率と Poisson 比と

$$\mu_{\mathrm{K}} = \frac{E_{\mathrm{K}}}{2\,(1+\nu_{\mathrm{K}})}, \quad \lambda_{\mathrm{K}} = \frac{\nu_{\mathrm{K}}\,E_{\mathrm{K}}}{(1+\nu_{\mathrm{K}})\,(1-2\nu_{\mathrm{K}})}, \quad (\mathrm{K} = \mathrm{M}, \mathrm{I}) \tag{H.9a, b}$$

という関係にある。そして体積力が無い場合の力とモーメントのつり合い式は

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \rightarrow \quad \text{あるいは} \quad \sigma_{ij,j} = 0 \tag{H.10a, b, c}$$

と表される。式 (H.10c) はモーメントのつり合い式 (H.10b) を力のつり合い式 (H.10a) に代入したものである。境界条件は無限遠点で

$$n_j\,\sigma_{ji} = f_i \text{ at } |\boldsymbol{x}| \rightarrow \infty \tag{H.11}$$

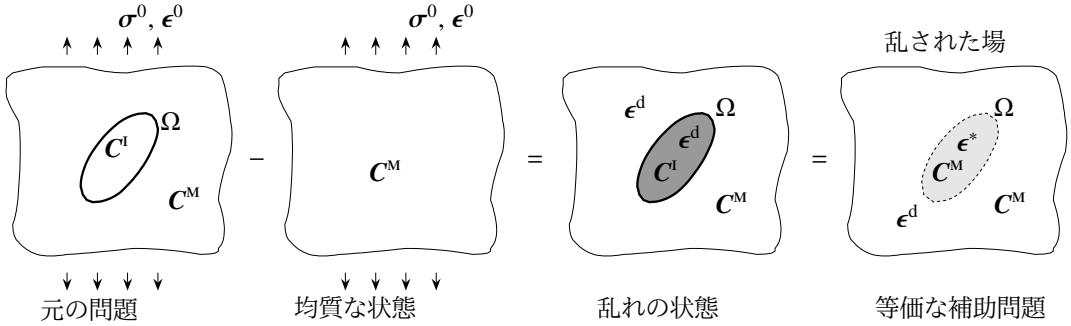


図 H.4 問題の分解; 母材 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}}$ 中の非均質体 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ を均質母材 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}}$ 中の eigen ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^*$ を持つ介在物で置き換える

のように与えられる。ここに $\boldsymbol{n}$ は外力 $\boldsymbol{f}$ が作用している無限遠点の表面の外向き単位法線ベクトルである。さらに非均質体の界面 $\partial\Omega$ では変位 $\boldsymbol{u}$ と表面力 $(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ の連続条件を満たしていないといけない。ここに $\boldsymbol{\nu}$ は界面 $\partial\Omega$ の単位法線ベクトルである。

このように，異なる材料が存在する 2 相問題を解くときには，非均質体の界面 $\partial\Omega$ 上の連続条件を取り扱うことによって生じるひずみや応力の乱れ成分を求めるのがかなり面倒である。その応力とひずみの乱れ成分を $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}}, \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{d}}$ で表すと，それは無限遠点では

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\epsilon}^0 + \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x}) \to 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{as } |\boldsymbol{x}| \to \infty \tag{H.12a, b, c, d}$$

という条件を満たす。ここに $\boldsymbol{\sigma}^0$ は非均質体が存在しない場合の無限遠点の外力 $\boldsymbol{f}$ によって生じる均質な応力成分である。

(2) eigen ひずみを用いた介在物問題

そこで元々の問題を直接解く代わりに，図 H.4 のように均質な状態と乱された状態に分解して解いてみよう。均質な状態の場は簡単に解けて，解は $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : \boldsymbol{\epsilon}^0$ である。それに対し乱された場 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}}$ と $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{d}}$ は，前述の Eshelby の発見を踏まえると，図 H.4 の一番右側の図のような介在物の問題を解くことによって求めることができそうだ。この等価な補助問題と記した問題は，無限遠点に外力が作用していない一様な弾性係数 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}}$ を持つ無限体を対象とするが，領域 Ω にはある種の残留ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^*$ が分布しているものとする。この残留ひずみが前述した **eigen ひずみ**である。この節では外力の作用の無い乱された場だけを対象とし，上添え字 ‘d’ を省略する。またここでは eigen ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^*$ は与えられるものとして取り扱い，それが持つべき適切な値を求める方法については第 H.2.4 節で説明する。

eigen ひずみは熱膨張と同じ非適合ひずみなので，総ひずみは弾性ひずみ $\boldsymbol{e}$ と eigen ひずみの和で

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = e_{ij}(\boldsymbol{x}) + \epsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}), \quad \epsilon^*_{ij} \neq 0 \text{ in } \Omega \tag{H.13}$$

のように関係付けられなければならない。弾性ひずみも非適合ひずみなので，式 (H.6) のひずみ変位関係は左辺の総ひずみに対して成立する。一方 Hooke の法則は弾性ひずみ成分と応力の間で定義され

$$\sigma_{ij} = C^{\mathrm{M}}_{ijkl}\, e_{kl} = C^{\mathrm{M}}_{ijkl}\left(\epsilon_{kl} - \epsilon^*_{kl}\right) = C^{\mathrm{M}}_{ijkl}\left(u_{k,l} - \epsilon^*_{kl}\right) \tag{H.14}$$

のようになる。ここでは式 (H.6) (H.13) と $C^{\mathrm{M}}_{ijkl} = C^{\mathrm{M}}_{ijlk}$ の対称性を用いた。弾性係数は式 (H.8) で定義されている。以下簡単のために添え字の M を省略する。また体積力が無い場合のつり合い式は式 (H.10c) なので，それに式 (H.14) を代入して変位 $\boldsymbol{u}$ で表したつり合い式が

$$C_{ijkl}\, u_{k,lj} = C_{ijkl}\, \epsilon^*_{kl,j} \tag{H.15}$$

と表される。無限遠点で外力は作用していないので，境界条件は

$$n_j\,\sigma_{ji} = 0 \text{ at } |\boldsymbol{x}| \to \infty \tag{H.16}$$

である。式 (H.14) を式 (H.16) に代入して変位 $\boldsymbol{u}$ で表した境界条件が

$$n_j\,C_{ijkl}\,u_{k,l} = n_j\,C_{ijkl}\,\epsilon^*_{kl} = 0 \text{ at } |\boldsymbol{x}| \to \infty \quad [\because \boldsymbol{\epsilon}^*(|\boldsymbol{x}| \to \infty) = 0] \tag{H.17}$$

と表される。これを介在物問題と呼ぼう。

H.2.3 Fourier 解析

(1) Fourier 積分と Fourier 変換

前節で定式化した介在物問題の方を Fourier 変換で解くためにまず eigen ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^*$ を Fourier 積分で

$$\epsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \overline{\epsilon}^*_{ij}(\boldsymbol{\xi})\,\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{H.18}$$

と表す。もちろん Fourier 変換 $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^*$ はこの逆作用なので

$$\overline{\epsilon}^*_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} \epsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x})\,\exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{H.19}$$

となる。同様に変位の Fourier 積分も

$$u_i(\boldsymbol{x}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \overline{u}_i(\boldsymbol{\xi})\,\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{H.20}$$

と表しておく。

式 (H.18) (H.20) をつり合い式 (H.15) に代入すれば

$$-\int_{-\infty}^{\infty} C_{ijkl}\overline{u}_k(\boldsymbol{\xi})\xi_l\xi_j\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{ijkl}\overline{\epsilon}^*_{kl}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{i}\,\xi_j\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

を得る。簡単のために 3 重積分の積分記号は一つにした。これより変位と eigen ひずみの Fourier 変換同士が

$$(C_{ijkl}\,\xi_l\,\xi_j)\,\overline{u}_k = -\mathrm{i}\,C_{ijkl}\,\overline{\epsilon}^*_{kl}\,\xi_j \tag{H.21}$$

を満足することがわかる。もちろんこれはつり合い式 (H.15) の Fourier 変換そのものである。したがって $\overline{\boldsymbol{u}}$ についての代数方程式

$$K_{ik}\,\overline{u}_k = X_i \tag{H.22}$$

を得る。ここに

$$K_{ik} \equiv C_{ijkl}\,\xi_l\,\xi_j, \quad X_i \equiv -\mathrm{i}\,C_{ijkl}\,\overline{\epsilon}^*_{kl}\,\xi_j$$

と定義した。この式を解けば変位の Fourier 変換が

$$\overline{u}_k = (K_{ik})^{-1}\,X_i = \frac{N_{ki}(\boldsymbol{\xi})}{D(\boldsymbol{\xi})}X_i \tag{H.23}$$

と求められる。ここに N_{ij} は行列 K_{ij} の余因子行列であり D はその行列式で，次式で算定できる。

$$N_{ij} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ikl}\,\epsilon_{jmn}\,K_{mk}\,K_{nl}, \quad D = \frac{1}{6}\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmn}\,K_{il}\,K_{jm}\,K_{kn} \tag{H.24a, b}$$

ここに ϵ_{ijk} は交代記号である。変位はこの式を Fourier 逆変換すれば求めることができて

$$u_i(\boldsymbol{x}) = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn}\,\overline{\epsilon}^*_{mn}(\boldsymbol{\xi})\,\xi_l\,N_{ij}(\boldsymbol{\xi})\,D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{H.25}$$

を得る。さらに対応するひずみと応力も

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} C_{klmn}\,\overline{\epsilon}^{*}_{mn}(\boldsymbol{\xi})\,\xi_l\,\left\{\xi_j\,N_{ik}(\boldsymbol{\xi}) + \xi_i\,N_{jk}(\boldsymbol{\xi})\right\}\,D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \tag{H.26}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}\left[\int_{-\infty}^{\infty} C_{pqmn}\,\overline{\epsilon}^{*}_{mn}(\boldsymbol{\xi})\,\xi_q\,\xi_l\,N_{kp}(\boldsymbol{\xi})\,D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} - \epsilon^{*}_{kl}(\boldsymbol{x})\right] \tag{H.27}$$

のように求めることができる。

(2) Green 関数

式 (H.19) を式 (H.25) に代入すれば

$$u_i(\boldsymbol{x}) = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,C_{jlmn}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\,\epsilon^{*}_{mn}(\boldsymbol{x}')\,\exp\left(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}'\right)\right\}\xi_l\,N_{ij}(\boldsymbol{\xi})\,D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\exp\left(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{H.28}$$

を得るが，ここで関数 $\boldsymbol{G}$ を

$$G_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,N_{ij}(\boldsymbol{\xi})\,D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\exp\left\{\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right\} \tag{H.29}$$

と定義すると，上式の変位は次式のように表すことができる。

$$u_i(\boldsymbol{x}) = -\int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn}\,\epsilon^{*}_{mn}(\boldsymbol{x}')\left(\frac{\partial G_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{H.30}$$

この被積分関数の形から判断すると，そこに現れる $\boldsymbol{G}$ の偏微係数は「ある単位の eigen ひずみ」に対する影響係数に相当するので，この関数 $\boldsymbol{G}$ そのものはこの問題の Green 関数と呼ばれる。ただここで対象としているのは無限体なので Green 関数は基本解と同じだ。実際，関数 $\boldsymbol{G}$ が方程式

$$C_{ijkl}\,G_{km,lj}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') + \delta_{im}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = 0 \tag{H.31}$$

を満足することを証明すること（演習問題 **H-1** の 1 番）はできる。ここに δ_{im} も Kronecker のデルタだが，第 2 項の最後の δ は Dirac のデルタ関数である。ただし $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) \equiv \delta(x_1-c_1)\,\delta(x_2-c_2)\,\delta(x_3-c_3)$ と定義した。一方，任意の体積力 $\boldsymbol{X}$ が作用した無限体のつり合い式が

$$C_{ijkl}\,u_{k,lj} + X_i = 0 \tag{H.32}$$

で表されることを踏まえると，この式と式 (H.31) の比較から Green 関数 $\boldsymbol{G}$ の物理的な意味が

> $G_{km}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ は，物体中の $\boldsymbol{x}'$ の位置に x_m 方向に作用した単位の集中荷重に対する，位置 $\boldsymbol{x}$ の x_k 方向の変位成分である。

ということがわかる。構造力学の影響線と同じだ。

式 (H.30) の微係数から，ひずみ場と応力場も

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} C^{\mathrm{M}}_{klmn}\,\epsilon^{*}_{mn}(\boldsymbol{x}')\left\{\frac{\partial^2 G_{ik}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\partial x_l\,\partial x_i} + \frac{\partial^2 G_{jk}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\partial x_l\,\partial x_j}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}', \tag{H.33}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = -C^{\mathrm{M}}_{ijkl}\left[\int_{-\infty}^{\infty} C^{\mathrm{M}}_{pqmn}\,\epsilon^{*}_{mn}(\boldsymbol{x}')\,\frac{\partial^2 G_{kp}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\partial x_q\,\partial x_l}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' + \epsilon^{*}_{kl}(\boldsymbol{x})\right] \tag{H.34}$$

のように表される。等方弾性体の場合の各量および Green 関数の陽な表現は

$$D(\boldsymbol{\xi}) = \mu_{\mathrm{M}}^2\,(\lambda_{\mathrm{M}} + 2\mu_{\mathrm{M}})\,\xi^6, \quad N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \mu_{\mathrm{M}}\,\xi^2\,\left\{(\lambda_{\mathrm{M}} + 2\mu_{\mathrm{M}})\,\delta_{ij}\,\xi^2 - (\lambda_{\mathrm{M}} + \mu_{\mathrm{M}})\,\xi_i\,\xi_j\right\}, \tag{H.35a, b}$$

$$G_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{4\pi\mu_{\mathrm{M}}}\,\frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} - \frac{1}{16\pi\mu_{\mathrm{M}}\,(1-\nu_{\mathrm{M}})}\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\right|, \quad \xi^2 \equiv \xi_k\,\xi_k \tag{H.35c, d}$$

と求められて[3]いる。

[3] この Green 関数を求めるのがとても困難であることは知っておいて欲しい。

例: 結晶金属材料中に無数に分布する刃状転位やらせん転位は内部に分布するある種のギャップとしてモデル化できる。つまり非適合ひずみとして捉えることができ，第 11 章で説明したように塑性変形の最もわかり易い例でありモデルである。例えばらせん転位も非適合ひずみの分布つまり eigen ひずみのある種の分布でモデル化できるだろう。ここで対象とするらせん転位では，結晶構造のある直線状の x_3 方向のギャップ b が x_1 方向につながっている状態としてモデル化できる。このギャップ量 b は Burgers ベクトルと呼ばれる。この状態を描いたのが図 H.5 である。つまり

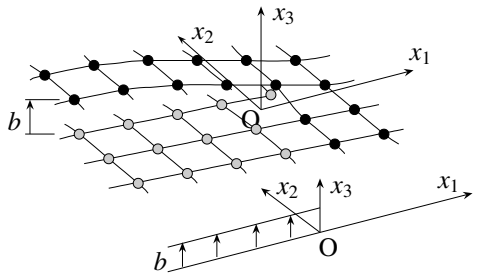


図 H.5 らせん転位

$$\epsilon^*_{23} = \frac{1}{2}\, b\, H(-x_1)\, \delta(x_2) \tag{H.36}$$

という eigen ひずみを分布させたものがらせん転位に相当する。ここに $H(x)$ は Heaviside 関数である。この Fourier 変換は

$$\overline{\epsilon}^*_{23} = -\frac{b\,\delta(\xi_2)}{8\pi^2\,\mathrm{i}\,\xi_1} \tag{H.37}$$

と求められるので，この式を式 (H.25) に代入すれば，二つの変位成分は零つまり $u_1 = 0, u_2 = 0$ になり，非零の変位成分が

$$u_3 = -\mathrm{i} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\, \frac{-b}{8\pi^2\,\mathrm{i}\,\xi_1}\, \xi_2\, \exp\{\mathrm{i}\,(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 = \frac{b}{2\pi}\, \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} \tag{H.38}$$

のような 2 値関数として求められる。果たして， x_1 軸の負の部分に x_3 方向の b のギャップを表している。

(3) Eshelby テンソル — 等方の場合

Eshelby の発見を利用するために，材料は等方弾性で介在物は楕円体とする。もし介在物領域 Ω 内に一様な eigen ひずみが分布するとその領域内のひずみも一様で，領域外のひずみは無限遠点で零に収束する。この場合には式 (H.33) の $\boldsymbol{\epsilon}^*$ は積分の外に出すことができるので，少なくとも形式的には

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = S_{ijkl}(\boldsymbol{x})\, \epsilon^*_{kl} \tag{H.39}$$

という表現が可能である。そしてこの 4 階のテンソル $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ が領域 Ω 内では定数 ($\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) =$ 一様, $\boldsymbol{x} \in \Omega$) になり，母材の Poisson 比と介在物形状の主半径 a_i $(i = 1, 2, 3)$ の比のみに依存する。この $\boldsymbol{S}$ は Eshelby テンソル [70] と呼ばれ，介在物が球形の場合はその内部で

$$S_{ijkl} = \alpha\, \frac{1}{3}\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \beta \left\{ \frac{1}{2} \left(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk} \right) - \frac{1}{3}\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} \right\} = \alpha\, A_{ijkl} + \beta\, B_{ijkl} \tag{H.40}$$

のような定数成分を持つ。ここに

$$\alpha \equiv \frac{1 + \nu_{\mathrm{M}}}{3\,(1 - \nu_{\mathrm{M}})}, \quad \beta \equiv \frac{2\,(4 - 5\nu_{\mathrm{M}})}{15\,(1 - \nu_{\mathrm{M}})} \tag{H.41a, b}$$

と定義される。さらに $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は基本的な等方テンソルで

$$A_{ijkl} \equiv \frac{1}{3}\, \delta_{ij}\, \delta_{kl}, \quad B_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} \left(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk} \right) - \frac{1}{3}\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} \tag{H.42a, b}$$

と定義されていて

$$A_{ijmn}\, B_{mnkl} = 0 \tag{H.43}$$

という性質（直交性）を持っている。

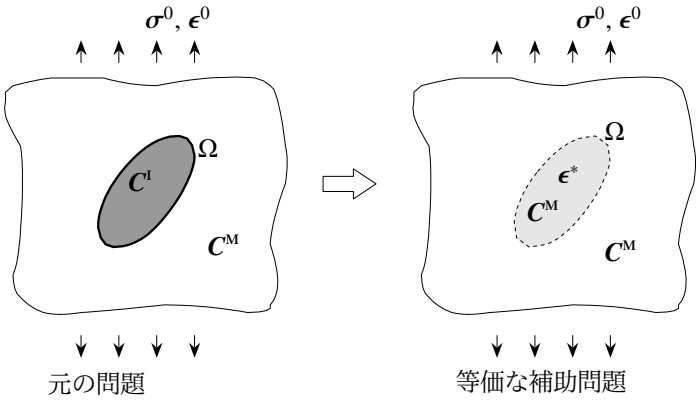


図 H.6 等価介在物法

この等方テンソルを用いると，等方弾性係数も

$$C^{\mathrm{M}}_{ijkl} = 3\kappa_{\mathrm{M}}\,\frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + 2\mu_{\mathrm{M}}\left\{\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}\right\} = 3\kappa_{\mathrm{M}}\,A_{ijkl} + 2\mu_{\mathrm{M}}\,B_{ijkl} \tag{H.44}$$

のように表すことができる。この κ_{M} は体積弾性係数で， Lamé 定数とは

$$\kappa_{\mathrm{M}} \equiv \lambda_{\mathrm{M}} + \frac{2}{3}\,\mu_{\mathrm{M}} \tag{H.45}$$

という関係がある。このように，等方テンソルの $\boldsymbol{A}$ の成分は体積変形に関する成分で，もう一つの $\boldsymbol{B}$ の成分がせん断変形に関する成分であることが明らかだ。同様に，単位テンソル $\boldsymbol{I}$ も

$$I_{ijkl} = 1\frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + 1\left\{\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right) - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}\right\} = 1\,A_{ijkl} + 1\,B_{ijkl} \tag{H.46}$$

と表現できる。このように二つの物理的な成分に分解できるので， 4 階の等方テンソルの簡易表現としての

$$\boldsymbol{S} = (\alpha,\,\beta), \quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} = (3\kappa_{\mathrm{M}},\,2\mu_{\mathrm{M}}), \quad \boldsymbol{I} = (1,\,1) \tag{H.47a, b, c}$$

を用いると，式 (H.43) の直交性によって二つの成分の係数間に次のような簡単な演算[4]が可能だ。

$$\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I} = (\alpha - 1,\,\beta - 1)\,, \quad (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}})^{-1}\,\boldsymbol{S} = \left(\frac{\alpha}{3\kappa_{\mathrm{M}}},\,\frac{\beta}{2\mu_{\mathrm{M}}}\right) \tag{H.48a, b}$$

H.2.4 等価介在物法

では図 H.6 の左側に示したような， 1 個だけ非均質体が存在する無限体の無限遠点に外力が作用した問題に戻ろう。材料は等方弾性で非均質体は楕円体とすると，前述の Eshelby の発見 [25] によって，非均質体の領域 Ω 内のひずみは一様だということがわかっている。その結論は，同じ図の右側に示したようにその領域 Ω を母材と同じ材料にした上で，そこにある適切な値を持つ一様な eigen ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^*$ を分布させた補助問題が元の問題と等価になる可能性を示唆している。前節では eigen ひずみが与えられたものとして乱された場を求めたが，ここではその eigen ひずみの値そのものを元の問題との等価性を持つように求める。

そこで図 H.4 のように，無限遠点の外力に対して一様な応力場とひずみ場の $\boldsymbol{\sigma}^0$, $\boldsymbol{\epsilon}^0$ が生じた均質場と，非均質体の存在で乱された応力場とひずみ場の $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ の乱された成分の場に分解すると，まず均質場は

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : \boldsymbol{\epsilon}^0 \tag{H.49}$$

[4] 東京大学地震研究所堀宗朗先生の示唆による。

を満足している。また乱された場は式 (H.10c) のつり合い式と式 (H.16) の境界条件を満足する。この二つの場を重ね合わせた Hooke の法則は，それぞれの領域で

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}^{\mathrm{M}} \left(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}(\boldsymbol{x})\right) \text{ in } D - \Omega, \quad \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}^{\mathrm{I}} \left(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}(\boldsymbol{x})\right) \text{ in } \Omega \tag{H.50a, b}$$

と表される。そして Eshelby の発見 [25] は

$$\epsilon_{ij} = \text{一様 in } \Omega \tag{H.51}$$

を保証する。

この元々の問題の乱された場についての問題を図 H.4 の一番右側の補助問題と等価にできれば，外力がある場合のその置き換えられた補助問題は図 H.6 の右側の図のようになる。このように非均質体を介在物で置換することによって 2 相問題を解く方法を**等価介在物法**と呼び，その補助問題では応力の表現式 (H.50) は

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}^{\mathrm{M}} \left(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) - \epsilon_{kl}^*\right) \tag{H.52}$$

で置き換えることができると考えるのだ。ここに eigen ひずみは

$$\epsilon_{ij}^* \begin{cases} = 0 & \text{in } D - \Omega \\ \neq 0 & \text{in } \Omega \text{（未知だが一様）} \end{cases} \tag{H.53}$$

のように領域 Ω にのみ存在するものとする。そして eigen ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^*$ の値を，元の問題と補助問題の領域 Ω 内の応力表現同士の等価性から求める。つまり式 (H.50b) と式 (H.52) を領域 Ω で等置して

$$C_{ijkl}^{\mathrm{I}} \left(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}\right) = C_{ijkl}^{\mathrm{M}} \left(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*\right) \text{ in } \Omega \tag{H.54}$$

が eigen ひずみの値を決定するのである。

一方式 (H.39) から，乱されたひずみ成分は eigen ひずみと

$$\epsilon_{kl} = S_{klmn}\, \epsilon_{mn}^* \tag{H.55}$$

という関係にあるので，これを式 (H.54) に代入すれば

$$C_{ijkl}^{\mathrm{I}} \left(\epsilon_{kl}^0 + S_{klmn}\, \epsilon_{mn}^*\right) = C_{ijkl}^{\mathrm{M}} \left(\epsilon_{kl}^0 + S_{klmn}\, \epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*\right) \quad \rightarrow \quad \left\{C_{ijkl}^{\mathrm{I}}\, S_{klmn} - C_{ijkl}^{\mathrm{M}}\, (S_{klmn} - I_{klmn})\right\} \epsilon_{mn}^* = \left(C_{ijkl}^{\mathrm{M}} - C_{ijkl}^{\mathrm{I}}\right) \epsilon_{kl}^0$$

を得る。これを解けば

$$\epsilon_{ij}^* = \left\{C_{ijmn}^{\mathrm{I}}\, S_{mnkl} - C_{ijmn}^{\mathrm{M}}\, (S_{mnkl} - I_{mnkl})\right\}^{-1} \left(C_{klpq}^{\mathrm{M}} - C_{klpq}^{\mathrm{I}}\right) \epsilon_{pq}^0 \tag{H.56}$$

のように適切な eigen ひずみの値が求められる。一旦 eigen ひずみが求められれば，式 (H.56) を式 (H.55) に代入すれば非均質体中の乱されたひずみ場を求めることができ，式 (H.52) から応力場も求めることができる。

演習問題 H-1

1. 関数 $\boldsymbol{G}$ が式 (H.31) を満足することを証明せよ。ただし Dirac のデルタ関数は '1' の Fourier 変換である。

$$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\mathrm{i}\, \boldsymbol{\xi} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\right\} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{H.57}$$

2. 非均質体と母材の弾性定数の比が，例えばせん断弾性係数比が $\dfrac{\mu_{\mathrm{I}}}{\mu_{\mathrm{M}}} = 10$ や $1/10$ で，Poisson 比が $\nu_{\mathrm{I}} = \nu_{\mathrm{M}} = 0.3$ の場合を対象として，等価介在物法を用いて介在物中の $\left(\sigma_{12}^0 + \sigma_{12}\right)$ と σ_{12}^0 の比と $\left(\sigma_{kk}^0 + \sigma_{kk}\right)$ と σ_{kk}^0 の比を求め，結果を考察せよ。

H.3 複合材料の平均特性

H.3.1 弾性材料の森・田中平均

非均質体の存在は母材中に力学的な乱れを生じさせるが，そのような乱れの源は種々の相互作用である。第 H.2 節では無限体にたった一個の非均質体が存在する場合のみを対象としたので，母材と 1 個の非均質体の間の相互作用はある程度定量的に評価できるかもしれないが，実際の複合材料のように多数の非均質体が規則的あるいはランダムに分布している状態に対する解にはなっているとは限らない。つまり，非均質体が多数ある場合や近接している場合のような非均質体同士の相互作用というのもあるのだ。もちろん非均質体数が比較的少なければ第 H.2 節の解を近似として用いることはできそうだ。ここではその解を流用しながら上述の 2 種類の相互作用を近似的に考慮して，複合材料の平均特性を定量的に予測する森・田中平均手法を説明する。

材料は等方弾性で非均質体は楕円体とする。もちろん以下でも図 H.7 の右側の図のように等価な介在物問題として複合材料をモデル化するが，森・田中手法 [68] の基本的な魔法は，まず第 H.2 節で扱った一個だけの非均質体が無限体に存在する問題の解で母材と介在物の間の相互作用を近似することなのだ。そして母材領域の平均ひずみを $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}}$ として，その領域の Hooke の法則を

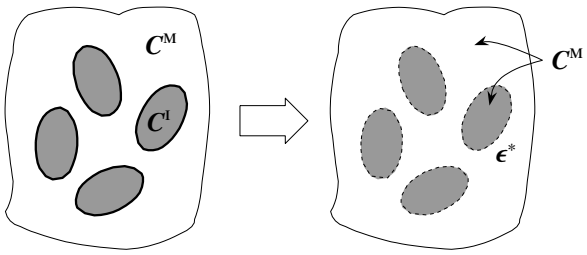


図 H.7 複合材料のモデル化

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} \tag{H.58}$$

と表すのだ。実は森・田中手法では，この母材中の平均ひずみ $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}}$ が具体的にどういう力学量であるかを明言しないというのが重要な特徴である。以下 $\langle \cdot \rangle_{\mathrm{M}}$ は母材領域の平均を表す。

森・田中手法の主張は，多くの非均質体が分布して生じた式 (H.58) で表された母材の均質場に非均質体をさらにもう 1 個だけ加えても，平均挙動には何ら影響を及ぼさないから，その非均質体による乱れつまり母材と非均質体の相互作用は第 H.2 節の解が使えるというものだ。つまり，非均質体領域の Hooke の法則を

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{I}} \tag{H.59}$$

と表したとき，相互作用によるひずみの乱れ成分を $\langle \boldsymbol{\gamma} \rangle_{\mathrm{I}}$ とすると，非均質体中のひずみが

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{I}} = \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle_{\mathrm{I}} \tag{H.60}$$

と表していいことにするのである。以下 $\langle \cdot \rangle_{\mathrm{I}}$ は非均質体領域の平均を表す。そこで等価介在物法を用いて，非均質体の弾性係数も母材のそれと同じにした上で，そこに eigen ひずみ $\langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}}$ を分布させた補助問題を考えると，介在物中の応力に対して

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} : \{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle_{\mathrm{I}}\} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : \{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle_{\mathrm{I}} - \langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}}\} \tag{H.61}$$

という等価性が成立しなければならない。さらに Eshelby テンソルを介してひずみの乱れ成分は

$$\langle \boldsymbol{\gamma} \rangle_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{S} : \langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}} \tag{H.62}$$

のように eigen ひずみと関係付けられるので，式 (H.62) を式 (H.61) に代入すると

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} : \{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} + \boldsymbol{S} : \langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}}\} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : \{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} + (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I}) : \langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}}\}$$

を得る。このあと数ステップの演算をすれば

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}} = \{\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{S}\}^{-1}\, (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}) : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} = \{\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{S}\}^{-1}\, (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\, (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{M}} \tag{H.63}$$

のように eigen ひずみが求められる。ここの演算では式 (H.58) を用いたが，式 (H.63) は式 (H.56) と同じである。式 (H.62) を式 (H.61) に代入したあと，式 (H.58) を考慮すれば

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : \{\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} + (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I}) : \langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}}\} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{M}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}}\, (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I}) : \langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}} \tag{H.64}$$

のように介在物中の応力が求められる。

さて非均質体の体積分率を

$$f \equiv \frac{\sum V_{\Omega}}{V} \tag{H.65}$$

と定義する。分母の V は「無限体」の体積なので変だと思う読者もいると思うが，これは理論的な定式化で生じる違和感でしかなく，実際にはある有限な観察対象の材料がその材料の代表的な領域だと捉えるので，その代表領域の体積が V である。この体積分率を用いて，平均応力あるいは巨視的な応力 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ を

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \frac{1}{V} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}V + \frac{1}{V} \int_{D-\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}V = \frac{V_{\Omega}}{V}\, \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{I}} + \left(\frac{V - V_{\Omega}}{V} \right) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{M}} = f\, \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{I}} + (1 - f)\, \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{M}} \tag{H.66}$$

と定義する。 Voigt 平均ではこの平均のみを用いていたが，さらにここでは対応する平均ひずみ $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$ も

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}} \equiv f\, \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{I}} + (1 - f)\, \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}} \tag{H.67}$$

のように定義する。これは Reuss 平均の考え方に相当するから，式 (H.1) の Voigt 平均と式 (H.3) の Reuss 平均を同時に仮定していることになる。ちょっと面白いと思いませんか。式 (H.58) (H.62) (H.63) を式 (H.67) に代入すれば

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}} = (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}})^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{M}} + f\, \boldsymbol{S} : \langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}} \tag{H.68}$$

を得る。最終的に式 (H.63) (H.64) (H.66) (H.68) から $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{M}}, \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\mathrm{I}}, \langle \boldsymbol{\epsilon}^* \rangle_{\mathrm{I}}, \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}}$ を消去すれば，

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}} = [\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\, \{\boldsymbol{S} - f\, (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I})\}]^{-1}\, [\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - (1 - f)\, (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{S}]\, (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}})^{-1} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{H.69}$$

という関係を得る。前述のように $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_{\mathrm{M}}$ の具体的な表現がどこにも無いのが特徴[5]の一つだ。複合材料の平均コンプライアンスを $\overline{\boldsymbol{C}}^{-1}$ と表すと，上式の右辺は形式的に

$$\text{Eq.(H.69) の右辺} \equiv \overline{\boldsymbol{C}}^{-1} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{H.70}$$

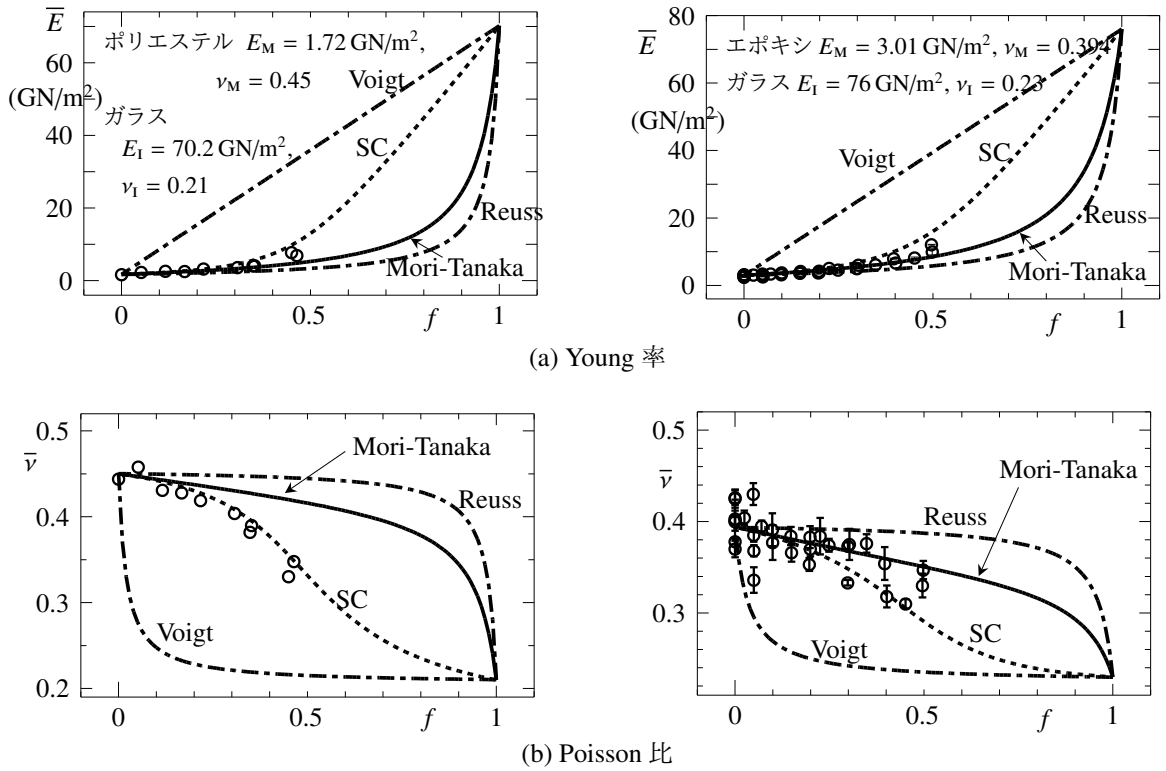
と定義していいので，この右辺から複合材料の平均弾性係数を

$$\overline{\boldsymbol{C}} \equiv \left[[\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\, \{\boldsymbol{S} - f\, (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I})\}]^{-1}\, [\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - (1 - f)\, (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\, \boldsymbol{S}]\, (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}})^{-1} \right]^{-1} \tag{H.71}$$

と定義できる。

実際には 4 階のテンソルの逆テンソルを計算しなければならないが，非均質体が球形であればすべてのテンソルは等方テンソルになるので，式 (H.48) の性質を用いて比較的容易に具体的な値を求めることができる。そうでない場合も文献 [74] のやり方が使える。例えば第 3.4.3 節の炭素繊維補強ポリマーの巨視的な弾性係数を森・田中手法で求めてみよう。母材のビニルエステル樹脂の弾性係数を $E_{\mathrm{M}} = 2.81\,\mathrm{GN/m^2}$ と $\nu_{\mathrm{M}} = 0.274$ と設定し，炭素繊維の弾性係数は $E_{\mathrm{I}} = 223\,\mathrm{GN/m^2}$ および $\nu_{\mathrm{I}} = 0.352$ として，体積分率を $f = 0.5$ と設定した。繊維は

[5] これがこの手法の魔法だということに第 2 著者が気付いた。



(a) Young 率

(b) Poisson 比

図 H.8 非均質体を球形と仮定した場合の実測値との比較

x_3 方向に無限に長い円柱形状にして Eshelby テンソルの値を文献 [70] を参照して求めた上で，上式 (H.71) で定義された弾性係数を求めると， Voigt 定数の表記で対称行列になり

$$\left(\overline{C} \right) \equiv \begin{pmatrix} 8.62 & 3.17 & 3.77 & 0 & 0 & 0 \\ 3.17 & 8.62 & 3.77 & 0 & 0 & 0 \\ 3.77 & 3.77 & 115. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.72 \end{pmatrix} \text{ GN/m}^2 \tag{H.72}$$

のように求められ，横等方性を持っていることが明らかだ。

H.3.2 実測値との比較

弾性係数の実測値 [80, 86] を森・田中平均で予測して図 H.8 で比較した。実験で用いられた非均質体は球形で近似できる。一点鎖線で Voigt 平均と Reuss 平均を表したが， ‘Mori-Tanaka’ と付記した実線で表した森・田中平均はその中間のやや Reuss 平均側に位置する。また参考のために， Hill の self-consisten 法 [37] による予測も ‘SC’ と付記した点線で示した。体積分率 f が小さいときは，実測値は古典的な上下界よりも森・田中予測に近く，森・田中手法が相互作用をうまく考慮できていることがわかる。一方，体積分率の大きさによらず Hill の self-consistent 平均が実測値をよく予測しているのは興味深い。

Hill の self-consistent 法: では，その Hill の self-consistent 法の特徴について少しだけ書いておこう。この方法では，非均質体が実際の母材材料の中に分布しているのではなく，未知の（まだ求められていない）平均弾性を持つ母材中に分布していると問題を設定するのだ。そりゃそうだと納得する読者も少なくないと思う。し

たがって，平均弾性を求める式 (H.71) に相当する式が陰な方程式になる。例えば球形介在物の場合は

$$\overline{\mu} = \mu_{\mathrm{M}} + \frac{f\,(\mu_{\mathrm{I}} - \mu_{\mathrm{M}})\,\overline{\mu}}{\overline{\mu} + 2\,S_{1212}\,(\mu_{\mathrm{I}} - \overline{\mu})}, \quad \overline{\kappa} = \kappa_{\mathrm{M}} + \frac{f\,(\kappa_{\mathrm{I}} - \kappa_{\mathrm{M}})\,\overline{\kappa}}{\overline{\kappa} + \frac{1}{3}\,S_{iijj}\,(\kappa_{\mathrm{I}} - \overline{\kappa})} \tag{H.73}$$

のような関係式になり，両辺に平均弾性係数が含まれる。さらに Eshelby テンソルにも未知の平均 Poisson 比が含まれていて

$$2\,S_{1212} = \frac{2\,(4 - 5\overline{\nu_{\mathrm{M}}})}{15\,(1 - \overline{\nu_{\mathrm{M}}})}, \quad \frac{1}{3}\,S_{ijij} = \frac{1 + \overline{\nu_{\mathrm{M}}}}{3\,(1 - \overline{\nu_{\mathrm{M}}})}, \quad \overline{\nu} = \frac{3\overline{\kappa} - 2\overline{\mu}}{2\,(\overline{\mu} + 3\overline{\kappa})} \tag{H.74}$$

のようになる。この予測が持つ最も面白い特徴は多孔質材料の場合に見ることができる。つまり非均質体の弾性係数が零のときには上式からは

$$\frac{\overline{\mu}}{\mu_{\mathrm{M}}} = 1 - \frac{f}{1 - 2\,S_{1212}}, \quad \frac{\overline{\kappa}}{\kappa_{\mathrm{M}}} = 1 - \frac{f}{1 - \frac{1}{3}\,S_{iijj}} \tag{H.75a, b}$$

となり，平均 Poisson 比が

$$\overline{\nu} = \frac{(7 + 5\nu_{\mathrm{M}}) - 6f\,(1 + \nu_{\mathrm{M}}) - \sqrt{D}}{5\,\{2 - 3f\,(1 - \nu_{\mathrm{M}})\}} \tag{H.76}$$

のように求められる。ここに

$$D \equiv (7 - 5\nu_{\mathrm{M}})^2 - 6f\left(19 - 56\nu_{\mathrm{M}} + 45\nu_{\mathrm{M}}^2\right) + 9f^2\left(9 - 42\nu_{\mathrm{M}} + 49\nu_{\mathrm{M}}^2\right) \tag{H.77}$$

と置いた。式から明らかなように空隙の体積分率 f が 50% で弾性係数は零になるのだ。立方体に接する球が占める体積分率は $f = \pi/6 \simeq 0.52$ なので，この結果は当然だと考える読者も少なくないとは思うが，以上の定式化では介在物の大きさは全く指定していないのでスポンジのように・・・。

あるいは孔のせん断弾性係数は零にして Poisson 比は 0.5 のまま，体積弾性係数が非零の任意の値を持つ場合

$$\mu_{\mathrm{I}} = 0, \quad \nu_{\mathrm{I}} = 0.5, \quad \kappa_{\mathrm{I}} = \text{任意}, \quad k \equiv \frac{\kappa_{\mathrm{I}}}{\kappa_{\mathrm{M}}} \neq 0 \tag{H.78a, b, c, d}$$

を計算してみよう。結果を図 H.9 に示した。空隙率 f の増加に伴って平均 Poisson 比は小さくなっていくが，$f = 0.5$ に近づくと急に大きくなり始め，$f = 0.6$ で

$$\overline{\nu} = 0.5, \quad \overline{\mu} = 0, \quad \frac{\overline{\kappa}}{\kappa_{\mathrm{M}}} = \frac{5k}{3 + 2k} \tag{H.79a, b, c}$$

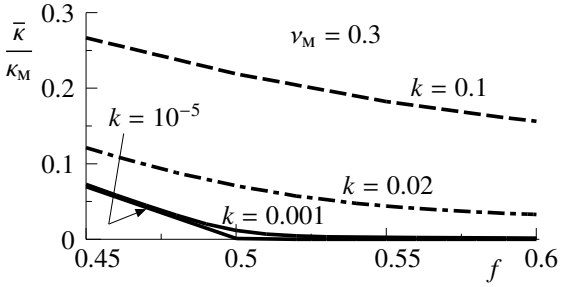


図 H.9 多孔質材料の体積弾性係数

のように平均体積弾性係数の方は零にはならない。しかし実際の空気の体積弾性係数は $\kappa_{\mathrm{I}} \simeq 0.14\,\mathrm{MN/m^2}$ 程度なので，母材が鋼やアルミニウムあるいはガラスなら $k \simeq 10^{-6}$ 程度だし，塩化ビニル母材でも $k \simeq 10^{-5}$ 程度になり，平均弾性係数の self-consistent 予測値は $f = 0.5$ でほぼ零になると考えていい。

演習問題 H-2

3. まず式 (H.63) (H.69) を求めよ。そして非均質体が球形の場合に，図 H.8 のように平均弾性係数を求めて図示せよ。例えば $\dfrac{\mu_{\mathrm{I}}}{\mu_{\mathrm{M}}} = 10$ として Poisson 比はどちらも同じ $\nu_{\mathrm{M}} = \nu_{\mathrm{I}} = 0.3$ とすればいい。その計算を踏まえて，母材と非均質体を入れ替えて同じような計算をし，上で求めた結果と比較せよ。つまり
   1. 球形の材料 A が体積分率 f だけ材料 B の中に分布していると考えた場合と
   2. 球形の材料 B が体積分率 $(1 - f)$ だけ材料 A の中に分布していると考えた場合

という 2 種類の計算をするのだ。介在物の形はともかく，どちらも二つの材料 A と B は同じ体積比率で複合化されているわけだが，二つの森・田中予測は一致する[6]だろうか。得られた結果を $\bar{\mu}$ と f の関係図に描いて考察して欲しい。できれば Hill の self-consistent 予測と比較すると，とても興味深い結果が得られるのでやってみて欲しい。実はこの二つの予測は第 H.3.3 (2) 節で説明するように Hashin と Shtrikman の上下界 [35] と一致するのである。

H.3.3 弾塑性材料の場合とその改善手法

(1) 増分塑性論と降伏曲面

増分塑性論の支配方程式は微小変位理論のそれと形式的にはほぼ同じなので，前節の森・田中手法を弾塑性材料に応用する [113, 183, 197] のはそれほど難しくはない。局所的な平均構成則はそれぞれの材料で

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : (\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_{\mathrm{M}} - \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{M}}), \quad \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} : (\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_{\mathrm{I}} - \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{I}}) \tag{H.80a, b}$$

と表される。上付きドットは増分を表し，$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}}$ は塑性ひずみ増分である。式 (H.80a) を式 (H.80b) に代入すれば

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} : \left\{ (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}})^{-1} : \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_{\mathrm{I}} - \Delta \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{I}} \right\} \tag{H.81}$$

を得る。ここに

$$\Delta \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{I}} \equiv \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{I}} - \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{M}} \tag{H.82}$$

は母材と非均質体の間の塑性ひずみ増分のミスフィットである。したがって等価介在物の構成則との間には

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} : \left\{ (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}})^{-1} : \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_{\mathrm{I}} - \Delta \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{I}} \right\} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : \left\{ (\boldsymbol{C}^{\mathrm{M}})^{-1} : \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_{\mathrm{I}} - (\Delta \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{I}} + \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{*} \rangle_{\mathrm{I}}) \right\} \tag{H.83}$$

という関係が成立しなければならない。また塑性ひずみ増分のミスフィットによる乱れ成分は Eshelby テンソルを用いて

$$\langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{S} : (\Delta \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{I}} + \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{*} \rangle_{\mathrm{I}}) \tag{H.84}$$

のような関係になるので，以上の式を用いて eigen ひずみ増分 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{*}$ を求めることができる。そのあと数ステップの演算を通して，巨視的な構成則を

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \overline{\boldsymbol{C}}^{-1} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{F} : \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{M}} + \boldsymbol{G} : \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_{\mathrm{I}} \tag{H.85}$$

と表すことができる。ここに $\overline{\boldsymbol{C}}$ や $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ は文献 [113, 183] に定義してあるが，$\overline{\boldsymbol{C}}$ は巨視的な弾性係数である。ただし

$$\boldsymbol{F} \neq (1 - f)\, \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{G} \neq f\, \boldsymbol{I} \tag{H.86a, b}$$

となっており，巨視的な塑性ひずみ増分が 2 相の塑性ひずみ増分の体積平均ではないということには注意が必要だ。

例えば文献 [92] で参照している SiC で補強したアルミニウムを対象としてみよう。 SiC は弾性を維持し，母材が Mises の降伏条件を満足するものとする。回転楕円とした SiC の長軸は x_1-x_3 平面上にあって x_2 軸回りに x_3 軸から時計回りに 60 度の向きに並んでいるものとし，半径比は $a_1 = a_2$ と $a_3/a_1 = 2$ で体積分率は 13.2% である。弾性係数はそれぞれ $E_{\mathrm{M}} = 60\,\mathrm{GN/m^2}$, $\nu_{\mathrm{M}} = 0.3$, $E_{\mathrm{I}} = 450\,\mathrm{GN/m^2}$, $\nu_{\mathrm{I}} = 0.2$ で，母材の引張降伏応力を $\sigma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{Y}} = 700\,\mathrm{MN/m^2}$ とした。森・田中手法で求めた母材中の平均応力が Mises の降伏条件を満足するときの巨

[6] 同じ比率のご飯とカレールーを，ご飯にカレーをかけた場合とカレーにご飯を載せた場合とで味が同じか，という問題だ。呵呵。

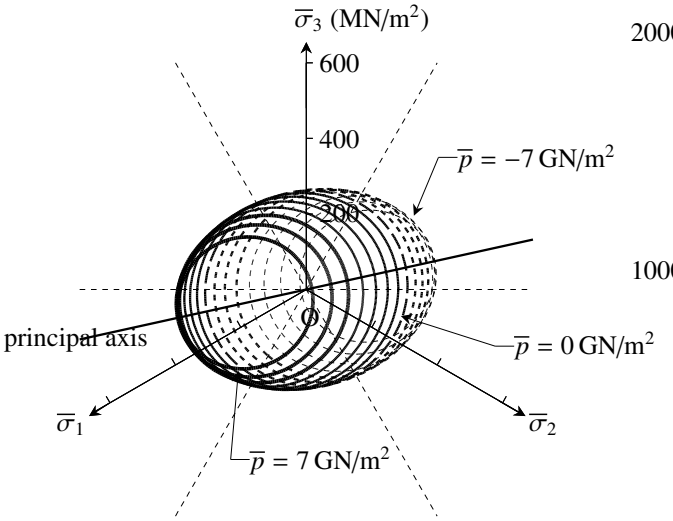


図 H.10 複合材料の巨視的な降伏曲面

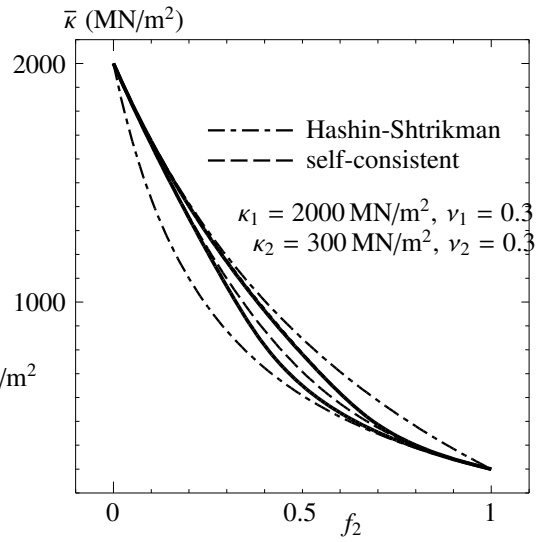


図 H.11 改善された平均体積弾性係数

視的な応力で描いた巨視的な降伏曲面が図 H.10 である。実線・破線の円は，巨視的な静水圧 $\overline{p}$ がある一定値を持つときの降伏曲面の輪郭だ。母材そのものはもちろん静水圧では降伏しないが，内部の微視構造の存在によって巨視的には等方応力状態でも降伏するのである。なお，この図では降伏曲面がラグビーボールくらいにしか見えないが，実際には静水圧方向に非常に長いフランスパンのような形状である。

(2) 3 相モデルを用いた改善手法

Voigt 平均等に比べると森・田中手法は相互作用をある程度良く考慮できているので，比較的精度のいい平均化ができている。さらに非均質体の向きや形（大きさではない）の影響も定量的に考慮できることがわかったが，図 H.8 を見る限りは非均質体の量が多くなると精度が落ちることもわかった。一方， Hill の self-consistent 法は非均質体の体積分率によらず実測値を比較的良く予測できていた。そこでその self-consistent 法の考え方を念頭に置いて，森・田中平均の精度を上げる手法の一つとして， 3 相問題による 2 相材料の平均化手法 [48] を説明しておこう。その手法では例えば材料 A と B の複合材料を対象としたとき，まずその二つの材料を一時的には非均質体と捉え，それを別の材料 C を母材として複合化して森・田中平均を求めておく。しかしそのあと母材 C の体積分率を零にすることによって材料 A と B の 2 相材料の平均挙動を予測するという手法である。この母材 C は最終的な複合材料には存在しないので文献では仮想母材と呼んでいる。代表的な例として，二つの非均質体を球形としてそれぞれ異なる体積弾性係数 κ_1 と κ_2 を持っているものとし，それぞれの体積分率を f_1, f_2 とする。これを体積弾性係数 κ_{M} を持つ母材中に分布させれば母材の体積分率は $\{1-(f_1+f_2)\}$ である。この 3 相材料に対して森・田中理論で平均体積弾性係数を求めた上で，最終的に母材を無くす極限つまり $(f_1+f_2)\to 1$ の極限をとる。このようにして求められる平均体積弾性係数 $\overline{\kappa}$ は

$$\overline{\kappa} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{f_i\,\kappa_i}{\kappa_{\mathrm{M}} - (\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)\ \alpha}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{f_i}{\kappa_{\mathrm{M}} - (\kappa_{\mathrm{M}} - \kappa_i)\ \alpha}} \tag{H.87}$$

となる。ここに α と β は存在しない母材の Poisson 比を用いて式 (H.41) で定義される。母材は存在しないのに κ_{M} と ν_{M} が無くならないのが最も重要な特徴であり，この手法の有用性である。つまり，この母材の選び方によって求められる平均弾性係数は違ってくるのである。

例えば母材が剛体だとしよう。つまり $\kappa_{\mathrm{M}} \to \infty$ の場合には上式は

$$\bar{\kappa} = f_1 \kappa_1 + f_2 \kappa_2 \tag{H.88}$$

となる。これは取りも直さず式 (H.2b) の Voigt 平均である。もう予想できていると思うが，逆に母材が真空つまり $\kappa_{\mathrm{M}} \to 0$ の場合は

$$\bar{\kappa} = \left(\frac{f_1}{\kappa_1} + \frac{f_2}{\kappa_2} \right)^{-1} \tag{H.89}$$

のように式 (H.4b) の Reuss 平均に一致する。したがって存在しない母材の弾性係数の選び方によって，予測される弾性係数は Voigt と Reuss の平均の中間の値になるのである。つまり Voigt と Reuss 平均は，平均弾性係数の上下界というよりも上限値と下限値だと考えていいだろう。

さらに興味深いのは，母材が材料 1 と同じ弾性係数を持っている場合だ。つまり $\kappa_{\mathrm{M}} = \kappa_1, \nu_{\mathrm{M}} = \nu_1$ とすると，式 (H.87) は

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_1} = 1 - \frac{f_2 \left(1 - \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)}{1 - f_1 \left(1 - \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \alpha} \tag{H.90}$$

となり，これは母材が材料 1 である場合の 2 相材料の森・田中平均である。実は，森・田中平均は非均質体が球形の場合には Hashin と Shtrikman の上下界 [35] の一つに一致することが知られている。そして， Hashin と Shtrikman のもう片方の上下界は，ここの 3 相問題で母材が材料 2 と同じ弾性係数を持ち $\kappa_{\mathrm{M}} = \kappa_2, \nu_{\mathrm{M}} = \nu_2$ とした場合の平均値と一致するのである。演習問題 **H-2** の 3 番の後半で計算したのが，このもう片方の森・田中平均である。

結果を図 H.11 に示したが， Hill の self-consistent 予測も示しておいた。 1 点鎖線が上述の二つの森・田中平均で Hashin と Shtrikman の上下界だ。そこで式 (H.87) で用いる母材の弾性定数の選び方として文献 [48] では，複合材料の弾性エネルギを最小にするような選択法を提案している。しかも巨視的なひずみ $\bar{\epsilon}$ を与えた場合と巨視的な応力 $\bar{\sigma}$ を与えた場合とで二つの異なる予測ができることもわかっていた。図中の実線がそのエネルギ的考察に基づく平均弾性係数であり，通常の森・田中平均つまり Hashin と Shtrikman の上下界よりも狭い予測をしていて，さらに Hill の self-consistent 予測にも近づいている。そしてさらに特徴的なのは， f_2 が小さい場合には森・田中平均（Hashin と Shtrikman の上界）とこの 3 相問題による平均および Hill の self-consistent 予測が同じ漸近特性を持つことだ。逆に f_2 が大きい場合には，母材と非均質体を入れ替えた森・田中平均（Hashin と Shtrikman の下界）とこの 3 相問題による平均および Hill の self-consistent 予測が同じ漸近特性を持つのである。ちなみに，図示してはいないが特に Voigt 平均にはこのような漸近特性は無い。

(3) 弾塑性挙動

前節の 3 相問題による平均化は弾塑性挙動に対しても用いること [56, 141] ができる。ただし最終的に存在しなくなる母材は弾性体とした。母材と非均質体の平均構成則は

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_{\mathrm{M}}, \quad \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_i = \boldsymbol{C}^i : \{ \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_i - \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_i \} \tag{H.91a, b}$$

と表される。ひずみ増分は乱れ成分を含めて $\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_i = \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_i$ と置くことができるので

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_i = \boldsymbol{C}^i : \{ \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_i - \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_i \} \tag{H.92}$$

となる。再度等価介在物法を用いることにすると，補助問題に対しては

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_i = \boldsymbol{C}^{\mathrm{M}} : [\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle_{\mathrm{M}} + \langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_i - \{ \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_i + \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* \rangle_i \}] \tag{H.93}$$

のように eigen ひずみ増分を導入すればよく，それを用いれば乱れ成分は

$$\langle \dot{\boldsymbol{\gamma}} \rangle_i = \boldsymbol{S}_i : \{ \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_i + \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{*} \rangle_i \} \tag{H.94}$$

のように Eshelby テンソルを介して表すことができる。介在物中の等価性から eigen ひずみ増分 $\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{*} \rangle_i$ が求められる。

式 (H.66) (H.67) で定義した巨視的な応力とひずみを考慮して数ステップの演算をし，母材の体積分率を零にすることによって

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \overline{\boldsymbol{C}}^{-1} : \dot{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \sum_{i=1}^{2} f_i \left(\boldsymbol{P}_i - \overline{\boldsymbol{C}}^{-1} \boldsymbol{M}_i \right) : \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_i \tag{H.95}$$

のように巨視的な構成則を表すことができる。ここで $\overline{\boldsymbol{C}}$ や他のテンソルの定義については文献 [141] を参照して欲しい。式 (H.95) 右辺の第 2 項は巨視的な塑性ひずみ増分である。図 H.12 には，図中に示した文献で用いられた実測値との比較を示した。材料は長いボロン繊維で補強したアルミニウムで，アルミニウムの Young 率と Poisson 比は $E_1 = 55.85\,\mathrm{GN/m^2}$ と $\nu_1 = 0.32$ で，ボロンの方は $E_2 = 379.23\,\mathrm{GN/m^2}$ と $\nu_2 = 0.2$ で与えた。ボロンの体積分率を 34% とし，楕円体介在物の半径比は $a_3/a_1 = 1000$ $a_2 = a_1$ のようにした。ボロン繊維は弾性だが，アルミニウムは Mises の降伏条件

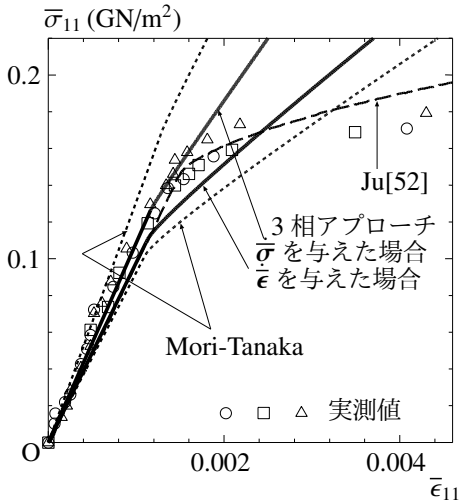


図 H.12 ボロン繊維補強アルミニウム

$$f \equiv \sqrt{J_2} - F\left(\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_1\right) = 0 \tag{H.96}$$

を満足し，引張降伏応力 $F\left(\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_1\right)$ は

$$F\left(\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sigma_1^{\mathrm{Y}} + h_1 \left(\frac{\epsilon_1^{\mathrm{eq}}}{\sqrt{3}} \right)^{n_1} \right\} \tag{H.97}$$

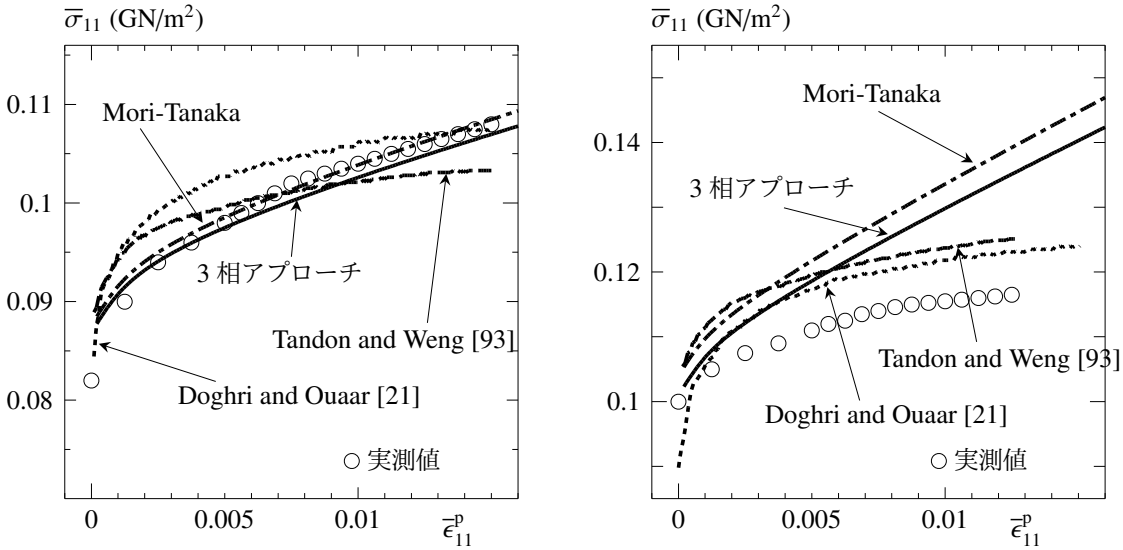
のべき乗則で与えた。ここで $\sigma_1^{\mathrm{Y}} = 79.29\,\mathrm{MN/m^2}$ および $h_1 = 827.4\,\mathrm{MN/m^2}$, $n_1 = 0.6$ とした。なお ϵ_1^{eq} は

$$\epsilon_1^{\mathrm{eq}} \equiv \int_{\mathrm{history}} \sqrt{2\,\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_1 : \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathrm{p}} \rangle_1}\,\mathrm{d}t \tag{H.98}$$

で定義される相当塑性ひずみである。ちなみに文献 [52] の予測は非均質体の界面剥離を考慮していたので，この 3 相問題によるアプローチにもある界面剥離モデルを用いて予測した結果を文献 [56] には示しておいたが，上図にある実測値との差異を剥離で説明できることもわかっている。

もう一つ，球形のシリカ粒子で補強したエポキシの例を図 H.13 で比較した。エポキシは $E_1 = 3.16\,\mathrm{GN/m^2}$ および $\nu_1 = 0.35$ で，シリカは $E_2 = 73.1\,\mathrm{GN/m^2}$ および $\nu_2 = 0.18$ とした。シリカは弾性で，エポキシは上の例と同じべき乗則の Mises の降伏条件を満足し，$\sigma_1^{\mathrm{Y}} = 75.86\,\mathrm{MN/m^2}$, $h_1 = 32.18\,\mathrm{MN/m^2}$, $n_1 = 0.26$ である。ここで提案した予測は森・田中予測を若干改善するが，非均質体の体積比率が大きい場合の精度はまだ良くない。

しかし複合材料そのものを設計する場合にこういった手法を用いることは，微視構造も有限要素分割した場合の数値解析では避けられない計算負荷を抑えることができ，非均質体の体積分率だけではなく形や向きも考慮して，解析的にあるいは負荷がほとんど無い数値計算によって平均挙動の予測ができるという特徴があるので，工学的な有用性はある。材料開発の段階で必要な経費や発生するかもしれない産業廃棄物の量を減らすという観点からも，解析的手法の提案は決して無駄な研究だとは思えないのだが，どうだろう。



(a) シリカの体積分率が 15% の場合　(b) シリカの体積分率が 35% の場合

図 H.13 シリカ粒子補強エポキシ

写真 H.1 ものつくり大学内の FRP トラス歩道橋（学生の研修成果）　2007 年竣工

‘Guess what!,’ ‘Tell you what’ and ‘Chances are ...:’ これは難しい。最初は何を言いたいのかわからなかった。自分では使えない。

付録 I

Fourier 級数と境界値問題

I.1　準備 — ベクトル値関数と常微分方程式

I.1.1　問題の設定

この章は第 26 版までは英語で書かれていて，英語のみで実施する 3 年生向けの講義用資料だった。自然科学や社会科学の種々の分野の基礎的問題は，例えば次のようなスカラー関数 $u(t)$ に対する常微分方程式 (ODE) でモデル化されることがある。

$$\dot{u}(t) = a\,u(t)$$

ここに上付きドットは時間 t についての微分である。そしてこの解は

$$u(t) = c\,\exp(a\,t)$$

と求められるが， c は初期条件で決定される積分定数である。この解は a の符号に依存して収束するのか発散するのかといった全く異なる特性を持つことから， a が問題の最も重要なパラメータであることがわかる。

これをベクトル値関数 $\boldsymbol{v}(t)$ に対する問題に拡張すると，その支配方程式は

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}(t) = \lfloor v_1(t)\ v_2(t)\ v_3(t) \rfloor^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{A} = 3\times 3 \text{ 実対称行列} \tag{I.1a, b, c}$$

と記すことができ，初期条件は例えば

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{\alpha} = \lfloor \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \rfloor^{\mathrm{T}} \text{ (与えられる)} \tag{I.2}$$

のように与えられる。 3 元連立 ODE だが，これをどうやって解こう。関数 $\boldsymbol{v}$ の 3 成分から 2 成分を消去して高次の微分方程式にする方法もあるかもしれない。しかし，次元がもっと大きくなった場合はその方法は適切だとは思えない。なおこの章では簡単のために括弧無しの太字で行列を表す。

I.1.2　固有値問題

前述のスカラー関数についての ODE における a の符号が持つ特性を踏まえると，式 (I.1) の係数行列 $\boldsymbol{A}$ もやはり解の特性を左右する最も重要なパラメータだと推測できる。では行列の「符号」って何だろう。実はそれはこの係数行列の固有値問題を考察することによってわかるのだ。つまり λ をこの係数行列の固有値とし， $\boldsymbol{e}$ を対応する固有ベクトルとすると，この係数行列の固有値問題は

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e} = \lambda\,\boldsymbol{e} \tag{I.3}$$

で与えられる。この λ（値と符号）が解の特性を左右するのだ。我々が対象とする多くの工学的な問題では，この三つの固有値はお互いに異なる値を持つので，それをそれぞれ λ_i $(i = 1, 2, 3)$; $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$ とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とする。すると i 番目の固有値問題は

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{e}_i \tag{I.4}$$

と記すことできる。式 (I.4) に $\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}$ を左から乗じると

$$\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_i \tag{$*$}$$

となる。同様に j 番目の固有値問題の方程式に i 番目の固有ベクトルを左から乗じれば

$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_j = \lambda_j\,\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_j \tag{$**$}$$

を得る。ただ係数行列 $\boldsymbol{A}$ は対称なので $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_i$ という関係が成立するため，式 $(**)$ は

$$\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_i = \lambda_j\,\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_j = \lambda_j\,\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_i$$

と書き直される。この式と上式 $(*)$ を辺々引き算すると

$$0 = \left(\lambda_i - \lambda_j\right)\,\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_i$$

を得る。上述のように固有値同士は異なり $\lambda_i \neq \lambda_j$ が成立するので，この最後の式からは

$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_j = 0, \quad i \neq j \tag{I.5}$$

という結論を得る。つまり固有ベクトル同士はお互いに直交するのである。これがまず重要な特性だ。

I.1.3 ベクトル値関数の常微分方程式

支配方程式 (I.1) を初期条件式 (I.2) の下で解きたいのだが，まず解を固有ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{v}(t) = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\boldsymbol{e}_i \tag{I.6}$$

のように表現できると仮定しよう。すると

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i(t)\,\boldsymbol{e}_i$$

なので，式 (I.6) を支配方程式 (I.1) に代入すると

$$\sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i(t)\,\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}\,\sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_i$$

を得る。この最右辺に式 (I.4) の関係を代入すると

$$\sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i(t)\,\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\lambda_i\,\boldsymbol{e}_i$$

となる。そこで，この式に n 番目の固有ベクトル $\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}$ を左から乗じると，式 (I.5) で示したように異なる二つの固有ベクトルは直交するので，得られた式の総和のうち n 番目以外は零になり，結局 n 番目の項だけが残り

$$\dot{c}_n(t) = \lambda_n\,c_n(t)$$

を得る。これはスカラー関数 $c_n(t)$ の ODE なので章の最初に示したように簡単に解け，一般解が

$$c_n(t) = k_n \, \exp(\lambda_n \, t) \tag{I.7}$$

と求められる。k_n は積分定数だ。

したがって，ベクトル値関数 $\boldsymbol{v}$ の一般解が

$$\boldsymbol{v}(t) = \sum_{i=1}^{3} k_i \, \boldsymbol{e}_i \, \exp(\lambda_i \, t) \tag{I.8}$$

のように求められたことになる。あとは初期条件式 (I.2) を用いて k_i を求めるだけだ。そこで式 (I.8) を式 (I.2) に代入すれば

$$\boldsymbol{v}(0) = \sum_{i=1}^{3} k_i \, \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\alpha}$$

を得るが，果たして簡単に k_i を求められるだろうか。ここで重要なのが直交性だ。つまりこの式に $\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}$ を左から乗じて直交条件式 (I.5) を考慮すると，ここでも総和のうち k_n 以外を含む項は零になるので

$$k_n \, \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} \quad \rightarrow \quad k_n = \frac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{e}_n|^2}$$

のように積分定数を求めることができるのである。直交性が重要な理由が理解できたと思う。最終的に解は

$$\boldsymbol{v}(t) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{e}_i|^2} \right) \boldsymbol{e}_i \, \exp(\lambda_i \, t) \tag{I.9}$$

と求められる。

例: 簡単な例として

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \text{ (与えられる)}$$

を解いてみよう。係数行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値問題は

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

となるので，特性方程式は

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)\{(5-\lambda)^2 - 4\} = (5-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda) = 0$$

となる。したがって各固有値が

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 7$$

と求められる。この個々の固有値 λ_i に対する式 $(*)$ から，それぞれの固有ベクトルが

$$\boldsymbol{e}_1 = \lfloor 1 \; 0 \; 0 \rfloor^{\mathrm{T}}, \quad |\boldsymbol{e}_1|^2 = 1, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \lfloor 0 \; 1 \; 1 \rfloor^{\mathrm{T}}, \quad |\boldsymbol{e}_2|^2 = 2, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \lfloor 0 \; 1 \; -1 \rfloor^{\mathrm{T}}, \quad |\boldsymbol{e}_3|^2 = 2$$

と求められる。固有ベクトル同士の直交性は各自確かめて欲しい。

そこで式 (I.6) のように解の候補を設定すると，最終的にその未知関数 $c_i(t)$ に対する方程式が

$$\dot{c}_i(t) = \lambda_i\, c_i(t)$$

となるので，それぞれの解が

$$c_1(t) = k_1\ \exp(5t), \quad c_2(t) = k_2\ \exp(3t), \quad c_3(t) = k_3\ \exp(7t)$$

と求められる。これを初期条件に代入することによって

$$k_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{e}_1|^2} = \frac{6}{1} = 6, \quad k_2 = \frac{\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{e}_2|^2} = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2}, \quad k_3 = \frac{\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{e}_3|^2} = \frac{7-8}{2} = -\frac{1}{2}$$

を得るので，最終的な解が

$$\boldsymbol{v}(t) = 6\ \exp(5t)\,\boldsymbol{e}_1 + \frac{15}{2}\ \exp(3t)\,\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{2}\ \exp(7t)\,\boldsymbol{e}_3$$

と求められる。3 元連立 ODE を解く際の固有値問題と固有ベクトルの直交性との重要性を実感してもらえただろうか。

I.2 1 次元熱伝導方程式 — 放物型偏微分方程式

I.2.1 熱伝導方程式

誘導は付録 G に示したので，ここにはその結果だけを列挙する。温度を $u(x,t)$ として長さ a の棒の中の熱伝導方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + r(x,t) = c\rho\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \quad 0 < x < a \tag{I.10}$$

と表される。ここに κ は熱伝導率で，c が熱容量，ρ は密度である。$r(x,t)$ は外からの入熱だ。初期条件は時刻 $t = 0$ における棒の温度分布で与えればいいので

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{I.11}$$

となる。ただ，この問題は空間的にも広がっている $(0 < x < a)$ ので，境界条件も与える必要のある初期値境界値問題になる。境界条件には基本的に 3 種類あるが，最も基本的な条件は両端で温度を規定するもので

$$u(0,t) = T_{\mathrm{L}}(t), \quad u(a,t) = T_{\mathrm{R}}(t) \tag{I.12a, b}$$

と表される。ここに $T_{\mathrm{L}}(t)$ と $T_{\mathrm{R}}(t)$ が端部の温度である。もう一つの条件は端部が断熱されている場合で

$$q(0,t) = 0, \quad q(a,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 \tag{I.13a, b, c, d}$$

のように熱流が零だとして与えられる。最後の条件は Newton の冷却法則と呼ばれるもので

$$q(0,t) = -\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h_{\mathrm{L}}\ (u(0,t) - v_{\mathrm{L}}), \quad q(a,t) = -\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = h_{\mathrm{R}}\ (u(a,t) - v_{\mathrm{R}}) \tag{I.14a, b}$$

のように与えられる。つまり，端部の熱流がそこの温度に比例するというもので，上式の h_{L} と h_{R}, v_{L}, v_{R} は材料パラメータである。

最初は簡単のために外部からの入熱は無い $(r(x,t) \equiv 0)$ ことにし，棒は一様な材料でできていて κ や ρ, c は定数だとする。すると熱伝導方程式 (I.10) は

$$\dot{u}(x,t) = k\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{I.15}$$

となる。ここに k は次式で定義される熱拡散率である。

$$k \equiv \frac{\kappa}{c\rho} \tag{I.16}$$

I.2.2 固有値問題

第 I.1 節では次の連立 ODE

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}(t) \tag{$*$}$$

を解くために，解を次式で仮定した。

$$\boldsymbol{u} \sim \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\boldsymbol{e}_i$$

ここに $\boldsymbol{e}_i$ は行列 $\boldsymbol{A}$ に関する式

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_n = \lambda_n\,\boldsymbol{e}_n \tag{$**$}$$

で定義される固有値問題の固有ベクトルだった。では，これを踏まえて熱伝導式 (I.15) を眺めると，行列による作用を微分作用素で置き換えて

$$\boldsymbol{A} \sim k\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

とすることによって，それが式 ($*$) と同じ形式になっていることがわかる。したがって式 ($**$) からのアナロジーとして次のような固有値問題

$$k\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,f_n(x) = \lambda_n\,f_n(x) \tag{I.17}$$

を解くことが，元々の熱伝導方程式を解く道筋を与えてくれそうなことが推測できる。再度，この新しい（微分方程式で表した）固有値問題と行列の固有値問題とを比較しながら列挙しておこう。まず解くべき式は

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}(t) \quad \text{あるいは} \quad \dot{u}(x,t) = k\,\frac{\mathrm{d}^2 u(x,t)}{\mathrm{d}x^2}$$

である。そして，まず解くべき固有値問題は

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_n = \lambda_n\,\boldsymbol{e}_n \quad \text{あるいは} \quad k\,\frac{\mathrm{d}^2 f_n(x)}{\mathrm{d}x^2} = \lambda_n\,f_n(x)$$

で表される。最後に元々の問題の解を級数表示して

$$\boldsymbol{u} = \sum_{n=1}^{3} c_n(t)\,\boldsymbol{e}_n \quad \text{あるいは} \quad u(x,t) = \sum_{n} c_n(t)\,f_n(x)$$

のように置けば熱伝導方程式が解けそうだ。これが初期値境界値問題を**固有関数**を用いて解く手法である。

代表例として，初期条件が式 (I.11) で与えられた熱伝導方程式 (I.15) を解いておこう。境界条件としては，棒の左端が断熱されていて，右端には温度 0 度の巨大な氷が付着しているものとする。したがって境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 0 \tag{I.18a, b}$$

で与えられる。まず解くべき固有値問題は式 (I.17) で与えられるので

$$k\,f_n''(x) = \lambda_n\,f_n(x) \tag{I.19}$$

を解けばいいことになる。ここにプライムは x に関する微分である。また固有関数 $f_n(x)$ の境界条件も式 (I.18) と等価にしくしておく必要があるので，それは次式で与えられる。

$$f_n'(0) = 0, \quad f_n(a) = 0 \tag{I.20a, b}$$

実は解いてみればわかるのだが，固有値が $\lambda_n < 0$ の場合にのみ非零の固有関数 $f_n(x)$ が存在するのだ。したがって式 (I.19) の一般解は

$$f_n(x) = A_n\,\sin\xi_n x + B_n\,\cos\xi_n x, \quad \xi_n \equiv \sqrt{-\lambda_n/k}$$

と求められる。これを境界条件式 (I.20) に代入すると

$$\xi A_n = 0, \quad A_n \sin \xi_n a + B_n \cos \xi_n a = 0$$

を得る。つまり

$$A_n = 0, \quad B_n \cos \xi_n a = 0$$

であるが，第 2 式には二つの可能性がある。一つは $B_n = 0$ であり，これは当たり前の結果（棒が 0 度のまま）であり，今欲しい答ではない。これに対してもう一つの可能性は

$$\cos \xi_n a = 0 \tag{I.21}$$

であり，つまり

$$\xi_n a = \frac{2n-1}{2}\pi \quad \to \quad \xi_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a} \tag{I.22}$$

であればよく，この場合は $B_n \neq 0$ は不定になる。これが欲しい結果であり，結局固有関数と固有値が

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right), \quad \lambda_n = -k\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \cdots, \infty \tag{I.23a, b}$$

のように求められるのだ。ここは重要なステップなので，わからない人は手を動かすこと。

式 (I.19) から i 番目の固有関数は

$$f_i''(x) = \frac{1}{k}\lambda_i f_i(x)$$

を満足するので，これにある固有関数 $f_j(x)$ を乗じて 0 から a まで積分しよう。つまり仮想仕事の原理だが

$$\int_0^a f_j f_i'' \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\lambda_i \int_0^a f_j f_i \,\mathrm{d}x$$

を得る。さらに左辺を部分積分して境界条件式 (I.20) を用いると

$$f_j f_i'\Big|_0^a - \int_0^a f_j' f_i' \,\mathrm{d}x = -\int_0^a f_j' f_i' \,\mathrm{d}x$$

を得る。したがって上式からは

$$-\int_0^a f_j' f_i' \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\lambda_i \int_0^a f_j f_i \,\mathrm{d}x$$

という関係が成立する。同様に， j 番目の固有値問題の式に $f_i(x)$ を乗じて同じ積分をすると

$$-\int_0^a f_i' f_j' \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\lambda_j \int_0^a f_i f_j \,\mathrm{d}x$$

を得る。この 2 式を辺々引き算すれば

$$0 = \frac{1}{k}\left(\lambda_i - \lambda_j\right)\int_0^a f_i f_j \,\mathrm{d}x$$

となるが，式 (I.23b) から二つの固有値は異なり $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$ なので

$$\int_0^a f_i(x) f_j(x) \,\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad i \neq j \tag{I.24}$$

が成立する。この式の左辺は二つの関数の「内積」と呼ばれる。そしてその内積が零になるので，固有関数同士はお互いに直交していると呼び，式 (I.24) が**直交性**の定義である。

I.2.3 固有関数を用いた解

第 I.1 節の ODE と同じように，偏微分方程式 (PDE) の解も次のような級数解で求めてみよう。

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)\, f_i(x) \tag{I.25}$$

この式 (I.25) を式 (I.15) に代入すると

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{c}_i(t)\, f_i(x) = k \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)\, f_i''(x)$$

を得るが，右辺に式 (I.19) の関係を用いると

$$k \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)\, \frac{1}{k}\, \lambda_i\, f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)\, \lambda_i\, f_i(x)$$

となる。したがって未知関数 $c_i(t)$ について解くべき上式は

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{c}_i(t)\, f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)\, \lambda_i\, f_i(x)$$

となる。ここで辺々固有関数 $f_n(x)$ との内積をとり，直交条件式 (I.24) を用いれば n 番目の項だけが抽出できて

$$\dot{c}_n(t)\, \langle f_n, f_n \rangle = \lambda_n\, c_n(t)\, \langle f_n, f_n \rangle \quad \rightarrow \quad \dot{c}_n(t) = \lambda_n\, c_n(t)$$

を得る。したがって $c_n(t)$ の一般解が

$$c_n(t) = A_n\, \exp(\lambda_n t) \tag{I.26}$$

と求められるので， $u(x,t)$ の一般解が

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, \exp\left(-k \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \tag{I.27}$$

となる。ここでは式 (I.23b) の λ_i を代入した。あとは初期条件から A_n を求めればいい。

式 (I.27) を初期条件式 (I.11) に代入すると

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, f_n(x) = u_0(x)$$

を得るので，再度固有関数 $f_i(x)$ との内積をとって直交性を利用すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a f_i\, f_n\, \mathrm{d}x = \int_0^a f_i\, u_0\, \mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad A_i\, \langle f_i, f_i \rangle = \langle f_i, u_0 \rangle \quad \rightarrow \quad A_i = \frac{\langle f_i, u_0 \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}$$

と求められる。したがって最終的な解が級数表示で

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f_n, u_0 \rangle}{\langle f_n, f_n \rangle}\, \exp\left(-k \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \tag{I.28}$$

のように求められる。ここの二つの内積の陽な形は

$$\langle f_n, u_0 \rangle = \int_0^a u_0(x)\, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \mathrm{d}x, \quad \langle f_n, f_n \rangle = \int_0^a \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \mathrm{d}x = \frac{a}{2} \tag{I.29a, b}$$

である。結局，解は次式のように求められる。

$$u(x,t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^a u_0(\eta)\, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi \eta}{2a}\right) \mathrm{d}\eta \right) \exp\left(-k \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \tag{I.30}$$

この解が時間と共に零に収束しないといけないことは容易に推測できる。というのも，外部からの入熱は無く，左端は断熱され右端は 0 度を維持するからだ。確かに式 (I.30) の指数関数の中の係数は負になっている。

初期条件が一様 $u_0(x) = u_0 = \text{const.}$ の場合は

$$\langle f_n, u_0\rangle = u_0 \int_0^a \cos\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2a}\right) \mathrm{d}\eta = \frac{2au_0(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}$$

となるので，解は次式になる。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4u_0(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \exp\left(-k\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right)$$

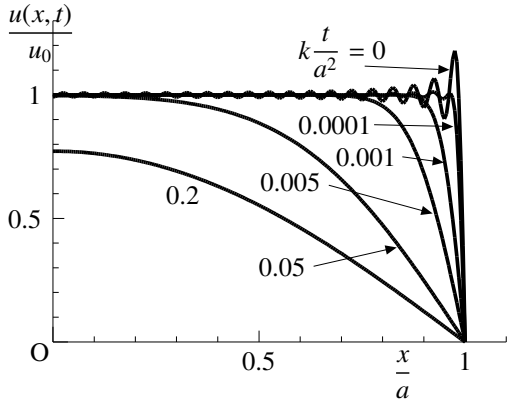


図 I.1 熱問題の例

級数で 40 項を用いた場合の結果を図 I.1 に示した。有限個の項しか使ってないので，特に初期に近い $k\,t/a^2 = 0$ や 0.0001 のときの結果はあまりよくない。ただし右端 $x = a$ の温度は零のままだし，左端 $x = 0$ の温度勾配も零のままになっていて断熱条件をきちんと満足している。

I.2.4 非零の境界条件

熱伝導方程式は斉次の

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{I.31}$$

のままだが，境界条件が零ではない

$$u(0,t) = T_{\mathrm{L}}, \quad u(a,t) = T_{\mathrm{R}} \tag{I.32a, b}$$

の場合を解いておこう。ここに T_{L} と T_{R} は与えられた温度だ。初期条件は式 (I.11) と同じとする。

固有値問題を定式化するに当たって，境界条件を零にするために関数を変換して

$$v(x,t) \equiv u(x,t) - \left\{T_{\mathrm{L}} + (T_{\mathrm{R}} - T_{\mathrm{L}})\,\frac{x}{a}\right\} \tag{I.33}$$

と置くと， $v(x,t)$ に対する境界条件は

$$v(0,t) = u(0,t) - T_{\mathrm{L}} = 0, \quad v(a,t) = u(a,t) - T_{\mathrm{R}} = 0 \tag{I.34a, b}$$

のように零境界条件になる。また $\left\{T_{\mathrm{L}} + (T_{\mathrm{R}} - T_{\mathrm{L}})\,\frac{x}{a}\right\}$ という項は一定なので v と u の熱伝導方程式は同じく次式になる。

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \tag{I.35}$$

ただし初期条件はその項の分だけずらして次式で与えられる。

$$v(x,0) = \hat{f}(x), \quad \hat{f}(x) \equiv f(x) - \left\{T_{\mathrm{L}} + (T_{\mathrm{R}} - T_{\mathrm{L}})\,\frac{x}{a}\right\} \tag{I.36a, b}$$

関数 $v(x,t)$ の問題は境界条件以外は前節の問題と同じだ。対応する固有関数を $v_n(x)$ とすると

$$v_n(x) = A_n \sin\xi_n x + B_n \cos\xi_n x, \quad \xi_n \equiv \sqrt{-\lambda_n/k}$$

である。境界条件式 (I.34) に代入すると $B_n = 0$ と $A_n \sin\xi_n a = 0$ を得る。第 2 式から意味のある固有関数が存在するためには

$$\sin\xi_n a = 0$$

でなければならないので

$$\xi_n a = n\pi \quad \rightarrow \quad \xi_n = \frac{n\pi}{a}$$

を得る。したがって次のように固有関数と固有値を得る。

$$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \lambda_n = -k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{I.37a, b}$$

境界条件によって固有関数と固有値が違ってくることを実感して欲しい。したがって v の初期条件を考慮して解 $v(x,t)$ を求めると，最終的な解 $u(x,t)$ が次のように求められる。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle \hat{f}(\xi), v_n(\xi)\right\rangle}{\langle v_n(\eta), v_n(\eta)\rangle} \exp(\lambda_n t)\, v_n(x) + \left\{T_{\mathrm{L}} + (T_{\mathrm{R}} - T_{\mathrm{L}})\frac{x}{a}\right\} \tag{I.38}$$

I.2.5 非斉次問題

最終的に非斉次の一般的な問題は

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x)$$

と非零境界条件で与えられる。解法については波動方程式の節で説明する。

演習問題 I-1

1. 次の熱伝導方程式を与えた境界条件の下で解け。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 1, 0 < t) \qquad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$$

   ただし初期条件は

$$u(x,0) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < 1/2 \\ +1, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

   とし， $t = 0, 0.0005, 0.0025, 0.01, 0.06$ の解を図示せよ。このノートの結果を公式として用いるのではなく，各自基礎式から始めて級数解を求めよ。

2. $0 < x < 1, 0 < t$ で次の問題を解け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x$$

   初期条件と境界条件は $u(0,t) = 2$, $u(1,t) = 3$, $u(x,0) = 5$ とし， $t = 0, 0.0005, 0.0025, 0.01, 0.06$ の解を図示せよ。

3. $0 < x < 1, 0 < t$ で次の問題を解け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = \cos 7\pi x$$

I.3 1 次元波動方程式 — 双曲型偏微分方程式

I.3.1 波動方程式

弦の振動は波動方程式でモデル化される。 1 次元の波動方程式は

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t) + g(x,t) \tag{I.39}$$

となる。ここには $u(x,t)$ は横変位で， c は位相速度だ。また $g(x,t)$ は単位長さ当たりの分布外力である。弦の振動の場合は T を弦の張力として m を単位長さ当たりの質量とすると

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

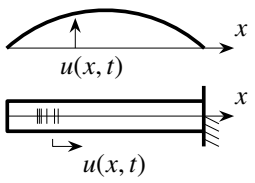


図 I.2 波動方程式の例

で定義される。熱伝導方程式とは異なり時間 t について 2 階の微分方程式なので，二つの初期条件が必要だ。通常それは次式のように初期の変位（形状）と速度で与えられる。

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x) \tag{I.40a, b}$$

図 I.2 の上図の長さ a の弦の境界条件の場合は

$$u(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 0 \tag{I.41a, b}$$

で与えられ，同じ図 I.2 の下図のような棒の場合は

$$u'(0,t) = 0, \quad u(a,t) = 0 \tag{I.42a, b}$$

で与えられる。以下しばらくは

$$t := c\,t \tag{I.43}$$

と再定義（無次元化）しておくと，波動方程式は次式で表される。

$$\ddot{u}(x,t) = u''(x,t) + g(x,t) \tag{I.44}$$

I.3.2 固有値問題

まずは固有値問題を定式化しなければならない。分布外力が無く $g(x,t) \equiv 0$ の場合，対応する固有値問題は

$$f_n''(x) = \lambda_n f_n(x)$$

と次の境界条件で与えられることは前節からの類推で理解できると思う。

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(a) = 0$$

この場合も $\lambda_n < 0$ の場合にのみ意味のある固有関数が存在し

$$f_n(x) = A_n \sin\xi_n x + B_n \cos\xi_n x, \quad \xi_n \equiv \sqrt{-\lambda_n}$$

となる。この一般解を境界条件に代入すれば $B_n = 0$ と $A_n \sin\xi_n a = 0$ を得るので，ここでも第 2 式から意味のある解が存在するためには

$$\sin\xi_n a = 0 \quad \to \quad \xi_n a = n\pi \quad \to \quad \xi_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

でないといけないことがわかり，非零の固有関数が求められる。

I.3.3 斉次問題

弦の振動解を固有関数の級数解で仮定しよう。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{I.45}$$

これを分布外力の無い波動方程式 (I.44) に代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{c}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

となるので，$\sin\left(\dfrac{j\pi x}{a}\right)$ を乗じて 0 から a まで積分し，式 (I.24) の直交性を利用すれば

$$\ddot{c}_j(t) = -\left(\frac{j\pi}{a}\right)^2 c_j(t)$$

を得る。この ODE の一般解は

$$c_j(t) = A_j \sin\left(\frac{j\pi t}{a}\right) + B_j \cos\left(\frac{j\pi t}{a}\right)$$

なので，式 (I.43) の置き換えを元に戻して次式を得る。

$$c_j(t) = A_j \sin\left(\frac{j\pi ct}{a}\right) + B_j \cos\left(\frac{j\pi ct}{a}\right)$$

したがって弦の変位が次のように求められる。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left\{A_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)\right\} \tag{I.46}$$

最後に式 (I.46) を初期条件式 (I.40) に代入して

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{a}\right) A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = v_0(x)$$

となるので，ここでも $f_j(x)$ と内積をとって直交性を利用すれば

$$B_j \langle f_j(x), f_j(x)\rangle = \langle u_0(x), f_j(x)\rangle, \quad \left(\frac{j\pi c}{a}\right) A_j \langle f_j(x), f_j(x)\rangle = \langle v_0(x), f_j(x)\rangle$$

を得るので，次のように積分定数が求められる。

$$A_j = \frac{a}{j\pi c} \frac{\langle v_0(x), f_j(x)\rangle}{\langle f_j(x), f_j(x)\rangle} = \frac{2}{j\pi c} \int_0^a v_0(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x, \quad B_j = \frac{\langle u_0(x), f_j(x)\rangle}{\langle f_j(x), f_j(x)\rangle} = \frac{2}{a} \int_0^a u_0(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x$$

例: 境界条件が次式で与えられる場合を解こう。

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0 \dfrac{2x}{a} & 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ u_0 \left(2 - \dfrac{2x}{a}\right) & \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}, \quad v_0 = 0$$

各自解いて欲しいが，その解は

$$\frac{u(x,t)}{u_0} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi/2}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)$$

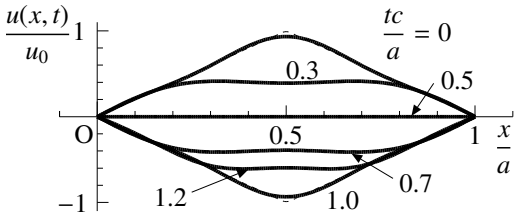


図 I.3 例

となる。図 I.3 の実線が級数の 5 項を用いた結果で，破線が 40 項を用いたものだ。もちろん正解は区分的な直線なのだが，たった 5 項の場合でもかなりいい精度を示しているのは興味深い。

I.3.4 非斉次問題

分布外力が存在し $g(x,t) \neq 0$ の場合を解こう。式 (I.45) を波動方程式 (I.39) に代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{c}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + g(x,t)$$

となるので，$\sin\left(\dfrac{j\pi x}{a}\right)$ を乗じて 0 から a まで積分して直交性を利用すれば

$$\ddot{c}_j(t) \langle f_j(x), f_j(x)\rangle = -\left(\frac{j\pi c}{a}\right)^2 c_j(t) \langle f_j(x), f_j(x)\rangle + \langle g(x,t), f_j(x)\rangle$$

を得る。ここで $\langle f_j(x), f_j(x)\rangle = a/2$ なので次式になる。

$$\ddot{c}_j(t) = -\left(\frac{j\pi c}{a}\right)^2 c_j(t) + \overline{g}_j(t), \quad \overline{g}_j(t) \equiv \frac{2}{a}\int_0^a g(x,t)\,\sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

ここで $p_j(t)$ で特解を表すと，一般解は

$$c_j(t) = A_j\,\sin\left(\frac{j\pi ct}{a}\right) + B_j\,\cos\left(\frac{j\pi ct}{a}\right) + p_j(t)$$

である。したがって $u(x,t)$ の一般解は次のようになる。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left\{A_n\,\sin\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) + B_n\,\cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) + p_n(t)\right\} \tag{I.47}$$

最後に式 (I.47) を初期条件式 (I.40) に代入すれば

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n + p_n(0))\,\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n\pi c}{a}\right)A_n + \dot{p}_n(0)\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = v_0(x)$$

となるので，ここでも $f_j(x)$ との内積をとって直交性を利用すれば

$$\Big(B_j + p_j(0)\Big)\,\langle f_j(x), f_j(x)\rangle = \langle u_0(x), f_j(x)\rangle, \quad \left\{\left(\frac{j\pi c}{a}\right)A_j + \dot{p}_j(0)\right\}\langle f_j(x), f_j(x)\rangle = \langle v_0(x), f_j(x)\rangle$$

を得る。したがって積分定数が次式のように求められる。

$$A_j = \frac{a}{j\pi c}\left\{\frac{2}{a}\int_0^a v_0(x)\sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x - \dot{p}_j(0)\right\}, \quad B_j = \frac{2}{a}\int_0^a u_0(x)\sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x - p_j(0)$$

演習問題 I-2

4. 次の波動問題を解け。

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + x\,(1-x), \quad 0 < x < 1, 0 < t$$

ただし，境界条件を $u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$ とし，初期条件を $u(x,0) = \sin x, \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos x$ とする。

I.4 直角座標系のポテンシャル方程式 — 楕円型偏微分方程式

2 次元あるいは 3 次元の熱伝導方程式と波動方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2}\left(+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial z^2}\right) + g(x, y(,z)), \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2}\left(+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial z^2}\right) + g(x, y(,z))$$

これが定常状態の場合には，次式のようにラプラシアン作用素で支配方程式は表される。

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2}\left(+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial z^2}\right) + g(x, y(,z)) = 0 \tag{I.48}$$

これはポテンシャル方程式と呼ばれる。これも固有値問題を介して解いてみよう。

例として $0 < x < a, 0 < y < b$ の 2 次元領域を対象とし，境界条件を次式で与える。

$$u(0,y) = A(y), \quad u(a,y) = B(y), \quad u(x,0) = C(x), \quad u(x,b) = D(x) \tag{I.49a, b, c, d}$$

このままでは零境界条件が無いので固有値問題の定式化ができない。そこで，どこかに零境界条件が適切に含まれるようにこの問題を三つの別々の問題に分解しておこう。

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y)$$

としたとき， u_1 と u_2 は式 (I.48) で $g(x,y) \equiv 0$ とした場合の解で， u_3 は $g(x,y)$ を考慮した特解とする。そして $u_1(x,y)$ は

$$\frac{\partial^2 u_1(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

を満足して境界条件が

$$u_1(0,y) = A(y), \quad u_1(a,y) = B(y), \qquad u_1(x,0) = 0, \quad u_1(x,b) = 0$$

で与えられるものとし，これに対し $u_2(x,y)$ は

$$\frac{\partial^2 u_2(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

と境界条件

$$u_2(0,y) = 0, \quad u_2(a,y) = 0, \qquad u_2(x,0) = C(x), \quad u_2(x,b) = D(x)$$

を満たすものとする。最後に $u_3(x,y)$ は

$$\frac{\partial^2 u_3(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3(x,y)}{\partial y^2} + g(x,y) = 0$$

と次式の零境界条件を満足するものとする。

$$u_3(0,y) = 0, \quad u_3(a,y) = 0, \qquad u_3(x,0) = 0, \quad u_3(x,b) = 0$$

$u_2(x,y)$ の問題を変数分離法で解こう。そのために $u_2(x,y) = X(x)\,Y(y)$ と置くと，ポテンシャル方程式は

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu^2$$

と分解できる。プライムはそれぞれの引数に関する微分を表す。こうすると $X(x)$ に対する境界条件だけが零境界条件になる。解くべき問題は

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad \text{with} \quad X(0) = 0, \quad X(a) = 0$$

のような固有値問題にできて，固有値と固有関数が

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right), \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

と求められる。 μ_n が求められたので， $Y(y)$ の問題も解けて一般解が

$$Y(y) = c_n \exp\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + d_n \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right)$$

となるから， $u_2(x,y)$ の一般解が級数解で次のように表される。

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \exp\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + d_n \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

最終的にはまだ使ってない境界条件から積分定数 c_n と d_n が求められるが，その際必要になるのが固有関数の直交性だ。各自解いてみて欲しい。 $u_1(x,y)$ の問題も同様に解くことができる。

最後に $u_3(x,y)$ の問題の固有値問題は，周囲の零境界条件の下の

$$\frac{\partial^2 f_3(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3(x,y)}{\partial y^2} = \lambda\, f_3(x,y)$$

で定式化できるので，一般解が

$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \lambda_{nm} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

と求められる。これを $u_3(x,y)$ のポテンシャル方程式に代入して固有関数の直交性を利用すれば，積分定数 c_{nm} が次のように求められる。

$$c_{nm} = \frac{G_{nm}}{\lambda_{nm}}, \quad G_{nm} \equiv \int_0^a\int_0^b g(x,y)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ここには方針を書いただけなので，各自実際に手を動かして欲しい。

演習問題 I-3

5. 次のポテンシャル問題を解け。

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0, \qquad u(x,0) = C(x), \quad u(x,b) = D(x).$$

I.5 円盤上の熱伝導方程式

I.5.1 極座標系の熱伝導方程式

極座標系のラプラシアンを数学の教科書からコピーすれば，極座標系の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta,t)}{\partial \theta^2} + g(r,\theta,t) = \frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial t}, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < t \tag{I.50}$$

となる。以下簡単のために $k = 1$ と（無次元化）する。初期条件は

$$u(r,\theta,0) = u_0(r,\theta) \tag{I.51}$$

で与えられ，境界条件は

$$|u(0,\theta,t)| < \infty, \quad u(R_0,\theta,t) = 0 \tag{I.52a, b}$$

で与えられる。第 1 式は円盤中央で変なことが起きない条件だ。さらに実は θ 方向の連続性も与える必要があり，例えば次式で与えられる。

$$u(r,0,t) = u(r,2\pi,t) \tag{I.53}$$

I.5.2 円盤上の固有値問題

対応する固有値問題は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 v(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v(r,\theta)}{\partial \theta^2} = \lambda\, v(r,\theta) \tag{I.54}$$

ここでも変数分離法を用いるために

$$v(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \tag{I.55}$$

と置くと，式 (I.54) は次のように分解される。

$$\frac{r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}}{\Theta} \text{ must be } = \mu \text{ (const.)}$$

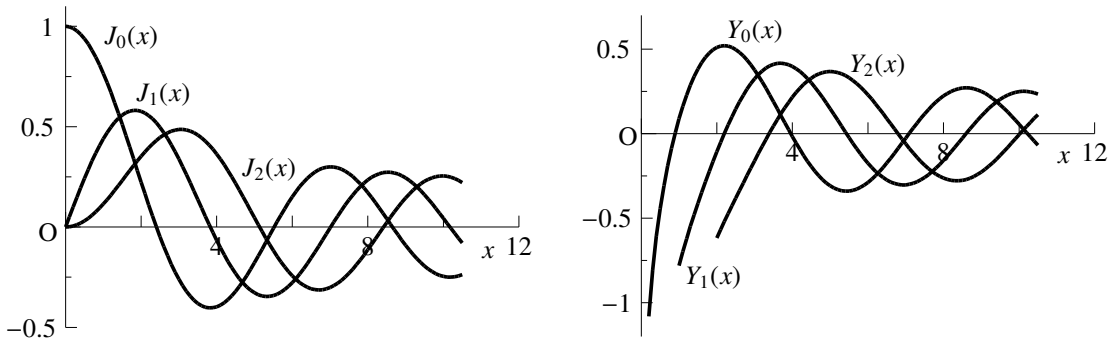


図 I.4 Bessel 関数

したがって，まず $\Theta(\theta)$ については

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \mu\Theta = 0$$

となるが，連続条件式 (I.53) からは解が 2π 周期でないといけないから

$$\mu = n^2, \quad \Theta(\theta) \sim \sin n\theta \quad \cos n\theta \tag{I.56a, b}$$

と求められる。ここに n は 0 を含む非零の整数だ。

一方， $R(r)$ についての方程式は

$$r^2R'' + rR' - \left(n^2 + \lambda r^2\right)R = 0 \tag{I.57}$$

となる。プライムは r に関する微分だ。境界条件も

$$R(R_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty \tag{I.58a, b}$$

となる。実は $\lambda < 0$ でないといけないことも証明できるので $\lambda = -\beta^2$ と置けば

$$r^2\,R'' + r\,R' + \left(\beta^2\,r^2 - n^2\right)\,R = 0 \tag{I.59}$$

となるが，これは第 n 次の Bessel 方程式と呼ばれる。 Bessel 方程式の解は Bessel 関数と呼ばれ，形式的に

$$R(r) = J_n(\beta r) \quad \text{および} \quad Y_n(\beta r) \tag{I.60a, b}$$

と書かれる。 $J_n(\beta r)$ は n 次の第 1 種 Bessel 関数で， $Y_n(\beta r)$ は n 次の第 2 種 Bessel 関数だ。図 I.4 にその特徴を示した。

式 (I.58b) のように $r = 0$ で解は有界でないといけなかったので，図からも明らかなように $Y_n(\beta r)$ の方は解の候補にはならない。したがって $R(r) = J_n(\beta r)$ と求められるので，これを境界条件式 (I.58a) に代入すれば

$$R(R_0) = J_n(\beta R_0) = 0 \tag{I.61}$$

でないといけない。図 I.4 と表 I.1 を用いると，例えば J_0 に対しては β に順に添え字を二つ付けて

表 I.1 第 1 種の Bessel 関数の零点

m	1	2	3	$\cdots$
$n = 0$ (J_0)	2.40	5.52	8.65	$\cdots$
$n = 1$ (J_1)	3.83	7.02	10.2	$\cdots$
$n = 2$ (J_2)	5.14	8.42	11.6	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$\beta R_0 \simeq 2.40 \to \beta_{01} \equiv \frac{2.40}{R_0}, \quad \beta R_0 \simeq 5.52 \to \beta_{02} \equiv \frac{5.52}{R_0}, \quad \beta R_0 \simeq 8.65 \to \beta_{03} \equiv \frac{8.65}{R_0} \cdots$$

となり， J_1 に対しては

$$\beta R_0 \simeq 3.83 \to \beta_{11} \equiv \frac{3.83}{R_0}, \quad \beta R_0 \simeq 7.02 \to \beta_{12} \equiv \frac{7.02}{R_0}, \quad \beta R_0 \simeq 10.2 \to \beta_{13} \equiv \frac{10.2}{R_0} \cdots$$

等となることから，無限個の β_{nm} を求めることができる。したがって固有関数は

$$v(r,\theta) \sim J_n(\beta_{nm} r)\ (A_n\ \cos n\theta + B_n\ \sin n\theta)$$

と求められる。ここに $n = 0, 1, \cdots$ であり， $m = 1, 2, \cdots$ である。

I.5.3 固有関数を用いた解

最終的に級数解が

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{A_{nm}(t)\,J_n(\beta_{nm} r)\ \cos n\theta + B_{nm}(t)\,J_n(\beta_{nm} r)\ \sin n\theta\} \tag{I.62}$$

と求められる。前節までの結論から， sine 関数と cosine 関数は

$$\langle f_i, f_j\rangle_\theta \equiv \int_0^{2\pi} f_i(\theta)\,f_j(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

で定義される内積によって直交性を有していることを知っている。さらに Bessel 関数も次式で定義される内積による直交性を有していることを証明することはできる。

$$\langle J_n(\beta_{ni} r), J_n(\beta_{nj} r)\rangle_r \equiv \int_0^{R_0} r\,J_n(\beta_{ni} r)\,J_n(\beta_{nj} r)\,\mathrm{d}r \tag{I.63}$$

この直交性を利用すれば，積分定数 A と B を初期条件から求めることができる。次節にヒントを書いておいたので，各自実際に計算してみて欲しい。

I.5.4 軸対称問題

軸対称の場合の熱伝導方程式は

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} + g(r) = \frac{\partial u(r,t)}{\partial t}, \quad r < R_0, \quad 0 < t \tag{I.64}$$

となる。つまり $n = 0$ の項だけが対象となる。初期条件は次式になる。

$$u(r,0) = u_0(r) \tag{I.65}$$

したがって固有関数を用いた級数解は

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m}(t)\,J_0(\beta_{0m} r) \tag{I.66}$$

と置くことができる。熱伝導方程式は式 (I.54) から

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial J_0}{\partial r} = \lambda\,J_0 = -\beta_{0m}^2\,J_0$$

となるので，上式 (I.66) を式 (I.64) に代入して

$$-\sum_{m=1}^{\infty} A_{0m}(t)\,\beta_{0m}^2\,J_0(\beta_{0m} r) + g(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_{0m}(t)\,J_0(\beta_{0m} r)$$

を得るが，上式の関係を用いるとこれは次式のように書き直される。

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\dot{A}_{0m}(t) + \beta_{0m}^2\,A_{0m}(t)\right\}\,J_0(\beta_{0m} r) - g(r) = 0$$

式 (I.63) を参考にして次のような作用を方程式にすると

$$\int_0^{R_0} J_0(\beta_{0j} r)\, r\, \mathrm{d}r \times$$

直交性を利用して A_{0j} に対する式が

$$\dot{A}_{0j}(t) + \beta_{0j}^2 A_{0j}(t) = \overline{G}_j, \quad \overline{G}_j \equiv \frac{\langle g(r), J_0(\beta_{0j} r)\rangle_r}{\langle J_0(\beta_{0j} r), J_0(\beta_{0j} r)\rangle_r} = \frac{\displaystyle\int_0^{R_0} g(r) J_0(\beta_{0j} r)\, r\, \mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^{R_0} \{J_0(\beta_{0i} r)\}^2\, r\, \mathrm{d}r}$$

のように求められる。したがって一般解が

$$A_{0j}(t) = c_j \exp\left(-\beta_{0j}^2 t\right) + \frac{\overline{G}_j}{\beta_{0j}^2} \tag{I.67}$$

となるので，元の問題の解も式 (I.66) に代入して

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_m \exp\left(-\beta_{0m}^2 t\right) + \frac{\overline{G}_m}{\beta_{0m}^2} \right\} J_0(\beta_{0m} r)$$

と求められる。この解を初期条件式 (I.65) に代入して得られる

$$u(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_m + \frac{\overline{G}_m}{\beta_{0m}^2} \right\} J_0(\beta_{0m} r) = u_0(r)$$

に対して次のような作用をすると

$$\int_0^{R_0} J_0(\beta_{0j} r)\, r\, \mathrm{d}r \times$$

再度 Bessel 関数の直交性が利用できて，結局

$$c_j + \frac{\overline{G}_j}{\beta_{0j}^2} = \overline{U}_j \equiv \frac{\displaystyle\int_0^{R_0} u_0(r) J_0(\beta_{0j} r)\, r\, \mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^{R_0} \left\{J_0(\beta_{0j} r)\right\}^2\, r\, \mathrm{d}r} \quad \rightarrow \quad c_j = \overline{U}_j - \frac{\overline{G}_j}{\beta_{0j}^2}$$

のように求められる。したがって最終的に解が

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(\overline{U}_m - \frac{\overline{G}_m}{\beta_{0m}^2} \right) \exp\left(-\beta_{0m}^2 t\right) + \frac{\overline{G}_m}{\beta_{0m}^2} \right\} J_0(\beta_{0m} r) \tag{I.68}$$

のように求められる。時間 t を ∞ にしてみると解は

$$u(r,t) \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{G}_m}{\beta_{0m}^2} J_0(\beta_{0m} r)$$

となり，これは次のポテンシャル方程式の解だ。

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u(r)}{\mathrm{d}r} + g(r) = 0 \tag{I.69}$$

この章は Northwestern 大学の Mahar 先生 (1980 年頃当時）のわかり易い講義 'Fourier Series and Boundary Value Problems' の講義ノートを参考にした。板書の補助（予習用といった）資料なので後半は特に端折ってある。具体的な式誘導等については教科書 [78] も参照[1]のこと。

[1] 東北大学図書館の工学分館には所蔵されている。

交代定理

まず，2 階の微分方程式で与えられる境界値問題と積分方程式で与えられる問題とについての ‘Alternative Theorem’ を，Northwestern 大学の Olmstead 先生 (1980 年頃当時）の ‘Differential Equations of Mathematical Physics’ の講義ノートから引用したものに加筆し，線形代数についての定理を真似てみる。

微分方程式について・・・

Consider a boundary-value problem with the 2nd linear differential equation

$$L\,u(x) = f(x), \quad a < x < b, \qquad B_1(u) = \alpha, \quad B_2(u) = \beta, \tag{1}$$

where

$$L \equiv a_0 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_2, \quad a_0 \neq 0,$$

and $f(x)$ is a locally integrable function. By the definition of a linear functional as

$$\langle g, h \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x,$$

the formal adjoint operator L^* and the corresponding boundary operators B^* can be defined by

$$\langle Lg, h \rangle = \langle g, L^* h \rangle.$$

Then the auxiliary problems are defined as follows:

$$L\,u_{\mathrm{H}}(x) = 0, \qquad B_1(u_{\mathrm{H}}) = 0, \quad B_2(u_{\mathrm{H}}) = 0, \tag{2}$$

$$L^*\,u^*_{\mathrm{H}}(x) = 0, \qquad B^*_1(u^*_{\mathrm{H}}) = 0, \quad B^*_2(u^*_{\mathrm{H}}) = 0, \tag{3}$$

$$L\,G(x|\xi) = \delta(x-\xi), \quad a < \xi < b, \qquad B_1(G) = 0, \quad B_2(G) = 0, \tag{4}$$

where $\delta(x-\xi)$ is the Dirac delta function.

<u>Theorem</u>: If $u_{\mathrm{H}}(x) = 0$ is the only solution of (2), then $u^*_{\mathrm{H}}(x) = 0$ is the only solution of (3), and (1) and (4) have a unique solution respectively. <u>Alternatively,</u> if (2) has a non-trivial solution(s), then (3) also will have a non-trivial solution(s), and (4) has no solution. Then (1) can have a solution (non-unique) if and only if

$$\int_a^b f(x)\, u^*_{\mathrm{H}}(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

for each $u^*_{\mathrm{H}}(x)$ satisfying (3).

積分方程式について・・・

Consider the problem with the integral equation

$$\int_a^b k(x,\xi)\, u(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \lambda\, u(x) = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{1}$$

where $k(x,\xi)$ and $f(x)$ are known functions. Then the auxiliary problems are defined as follows:

$$\int_a^b k(x,\xi)\, u_{\mathrm{H}}(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \lambda\, u_{\mathrm{H}}(x) = 0, \tag{2}$$

$$\int_a^b k(\xi,x)\, u^*_{\mathrm{H}}(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \lambda\, u^*_{\mathrm{H}}(x) = 0, \tag{3}$$

where $\int_a^b \mathrm{d}\xi\, k(\xi, x)$ is the adjoint integral operator of the integral operator $\int_a^b \mathrm{d}\xi\, k(x, \xi)$.

Theorem: If $u_{\mathrm{H}}(x) = 0$ is the only solution of (2) for a given value of λ, then $u_{\mathrm{H}}^*(x) = 0$ is the only solution of (3), and, for sufficiently smooth $k(x, \xi)$, (1) has a solution and it is unique. Alternatively, if (2) has a non-trivial solution, then (3) has a non-trivial solution, and (1) has a solution (non-unique) if and only if

$$\int_a^b f(x)\, u_{\mathrm{H}}^*(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

for each $u_{\mathrm{H}}^*(x)$ satisfying (3).

連立方程式について・・・

Consider a linear equation

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

where $\boldsymbol{A}$ is the $n \times n$ matrix, and $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{f}$ are $n \times 1$ vectors. Then the auxiliary problems are defined as follows:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}^*\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{H}}^* = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

where $\boldsymbol{A}^*$ is the adjoint (transposed) matrix of $\boldsymbol{A}$.

Theorem: If $\boldsymbol{u}_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{0}$ is the only solution of (2), then $\boldsymbol{u}_{\mathrm{H}}^* = \boldsymbol{0}$ is the only solution of (3), and (1) has a solution and it is unique. Alternatively, if (2) has a non-trivial solution(s), then (3) has a non-trivial solution(s), and (1) can have a solution (non-unique) if and only if

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{H}}^*) = 0$$

for each $\boldsymbol{u}_{\mathrm{H}}^*$ satisfying (3).

‘Caucasian:’ 秋田の内陸部には驚くほど色白の女性がいる。いわゆる秋田美人という人達のことだろうか。これは「白人」との関わりによるものだという説がある。北国だけに，樺太と北海道を通ってそれこそコーカサス地方から来たらしいというのだ。その説では同時に，秋田犬(いぬ)にヨーロッパ犬との関係が見つかるというが，元々犬そのものがあちらから連れてきた動物だろうから，信憑性は定かではない。が，常陸の国から佐竹氏が美人を連れて行ったから水戸には云々という説よりも，科学の匂いがして面白い。

写真 I.1 錦帯橋　岩国（アーチじゃないよ p.8 脚注参照）

‘rafel:’「ラーフル」というものをご存知だろうか。黒板消し[2]のことを鹿児島ではこう呼ぶ。そして鹿児島人は，それが県外では通じないことを知らない。ページ `http://www.osumi.or.jp/sakata/hougen/raful.htm` には詳細な調査結果が出ていて面白い。多分元はオランダ語というのが正しそうだ。こういった文化は全国各地にあって面白い。鹿児島の場合「茶碗蒸しの歌」を歌えない鹿児島人はあまりいないだろう。また岐阜の治水（宝暦治水）に命を懸けた平田靱負（ゆきえ）[3]を知らない鹿児島人はいない。前者は誰かに教えられるというわけではないが，後者は小学校で全員が学ぶ（多分）。今でも岐阜県では，鹿児島の出身者を大事にしてくれると聞く。学内のある丸秘作業のときの「一地方のみで教えられる歴史というのがあるか否か」という雑談で思い出した。

[2] さすがに黒板が消えてしまうわけではないのだが。
[3] この治水と薩摩義士の伝承については近年，さらなる研究や顕彰運動が行われているらしい［南日本新聞 (2017/5/24)］。