
構造と連続体の力学基礎

熊でもわかる変形できる物体の力学

岩熊 哲夫・小山 茂



構造と連続体の力学基礎

熊でもわかる変形できる物体の力学

I've Got a Bad Headache in Learning Mechanics of Structures and Continual

『表紙写真は1987年建設時の南北備讃瀬戸大橋，1988年竣工。学外見学の引率時に撮影したもので，瀬戸大橋が見学先に含まれていた
ので倉西茂先生も同行なされた。利用した貸切バス（下津井電鉄株式会社だったと思うが）の女性添乗員さんはとても勉強家だったら
しく，橋梁の種類を絵で説明する紙芝居を作ってきていて，走行中にそれを使いながら一番前に座っていた倉西先生と学生達とに向
かって橋梁工学の講義をしたのはとても愉快だった。

まえがき

構造力学は、ある種の仮定を連続体力学に追加して構築された近似力学理論体系である。その仮定は、構造特有の幾何学的な特徴すなわち細長い・薄いといった特徴を活かしたもので、非常に明解な仮定であり、最終的にはそれに基づいて美しい理論（例えば表 7.1）が誘導されている。そして、連続体力学は変形できる物体の力学体系であるから、構造力学も変形できる物体の力学である。

その力学を理解して使えるようになるために、できるだけ物理的に、しかし著者の限られた能力の範囲内だが数学的な正確さを保持しながらこれを書いてみた。だから間違っている可能性が非常に高い。呵呵。特に第 1 著者自身が理解できない「エネルギー¹」という概念を可能な限り使わないように心掛け、「仕事」の段階で説明がつくことはそこまでとした。また古典的・手計算的解析法については、その「仕事」に基づく手法と境界値問題の標準的な解法以外ではできるだけ載せなかった。何となくわかったような気にさせる魔法や一般論・読み替えも避け、個別的な情報の羅列にはなるものの、個々の話題毎にできるだけ具体的な表現を心掛けた。また基本的な部分についてはその誘導等も含めて詳述するように努め、著者が大事だと思っていることを他の文献を用いずに²学べるようにしたつもりである。したがって、大学院入試等でラーメン（骨組）が手計算で解けるようになることはこの文書の目的ではなく、そういった問題を解くときにどのような力学的な考え方が必要であり、それはどのような数理的な手法で記述されているかを正確に理解することが目的である。そういう意味の力学基礎である上に、昨今流行の数値的アプローチにはほとんど触れ（ることが著者の能力的にでき）ない解析的な内容になっているため、計算（機）力学の勉強のための情報については他の専門家と文献に相談して欲しい。「エネルギー」を避けて「仕事」を、と書いたが、基本的には「仮想仕事」という関数同士の積の積分（例えば第 3.5 節や式 (5.4) 前後の解説を参照のこと）つまり「関数の内積」がこの文書の背骨になっている。ただし、「仮想仕事」も使い方によっては数学的過ぎる場合もあるので、使わないでもいいところではできるだけ使わないようにした。

とは言え、この文書は、各種講義を受け持つようになって以来用いてきた³手書きの講義ノートを $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}^4$ 草稿として書いたもので、著者が学んで理解できた部分だけを抽出して単に列挙しただけの内容に過ぎない。著者索引を見ると古く偏った情報に基づいているように思うかもしれないが、力学の基礎に古いも新しいも無いはずだ。しかし、それぞれの章の本来の目標に達して研究の基礎にするためには、最低でもその内容の倍はさらに学ぶ必要があるだろう。そこは個々の読者自身が深めるべき専門化された基礎的内容だと思う。いろいろな方に読んでいただきコメントをいただいているが、種々の概念が土木系標準教科書とは異なっていることから、初学者にとってはこの文書は難しいかもしれない。逆に言うと、著者が学生だった頃に使われていた教科書等に見られる標準的な記述には間違いや曖昧な部分が多量にあると感じたこと、またいくつかの既刊書への批判を書いておきたかったことが、この文書を公開している理由には含まれる。また学部時代には難しく面白くもなかった構造力学だったが、指導教員と一緒に勉強しているうちに楽しい学問だなあと感じるようになったことも、他とは異なる記述になってしまった理由の一つだと思う。一通り学んだあとの復習あるいは *second opinion* として眺めてみると、自分がわからなかった部分へのヒントを得ることがあるかもしれない。例えば修士 1 年生の春から夏の間批判的に読むというのはどうだろう。そういう意味で、やはり独断と偏見に基づいた文書になっていることには注意して欲しい。ある査読者から「雑音」とまで酷評された内容⁵も含んでいるので、かなりバイアスのかかったものだと認識し、怪我をしないように注意して欲しい。さらに口語体を多用しているので、著者と波長の合わない人には読み難くなっている。

東北大学のカリキュラム等から類推すると、たいいていの大学の土木系学科・専攻における、学部 2 年生前半の静定構造を学ぶ講義から大学院の材料力学と構造力学に関する講義までの内容になっていると思う。第 1 章は第 12 版でようやく埋めることができたもので、東北大学工学部建築・社会環境工学科における 2 年生前半のコース振り分けのための情報提供科目「シビックデザインの力学」の配付資料を元にした。付録 H は同大学大学院博士課程（俗称）の集中講義の配付資料が元になっていて、付録 I は同大学短期留学プログラムの学部 3 年次留学生を含む英語による講義の配付資料を元にしてある。また付録 M は、同大学工学部 1 年生前半の演習付き「情報基礎 B」の配付資料を改訂したものである。

なお記号表記等は各章毎には統一するようにしたが、説明を少しだけ付録 R にまとめておいた。第 10 章以降では総和規約を用いている。また本文中の固有名詞等には原則として原語を用い、括弧書きの翻訳を示していない。同様に索引に並べ

¹ 文献 [127] 同様「エネルギー」に長音を用いないのは原語発音からという電気系の先生の助言による。

² 工学系大学生が学ぶべき基礎的な数学（例えば [36, 83, 150] の大半）は知っていることを前提とし、そのための章は設けていない。

³ 実際には、学部では第 4, 5, 6 章の一部を「橋梁力学」で、第 9 章を「振動解析学」で、大学院では第 7, 8 章を「薄肉構造」で、第 11 章を「構造強度論」で講義ノートとして用いた。いわゆる「構造力学」と「材料力学」は著者が所属した研究室担当ではなかった。

⁴ $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ は AMS（米国数学会）の商標。

⁵ 幸いなことに出版・公表されています。編集委員の先生に感謝。しかし「雑音」とはねえ。

る語句等も日本語か原語およびその混合のどれかを本文中では用い、括弧書きの翻訳を略している。その代わり索引ではどちらの言語からでも引けるようにした。その索引には \TeX についての著名な著書 [55] を真似た箇所⁶もある。第 11~25 版のタイトルは東京工業大学の森勉先生の命名「毎苦勞迷禍荷苦痛 [194]」を参考にした。

この文書を書くに当たっては、東京大学の堀井秀之先生からの個人的な重要な示唆はもちろん、同氏のご尽力で土木学会構造工学委員会の下に設置された力学教育に関する小委員会における議論もたいへん参考になった [164, 165]。委員の方々に感謝する。この委員会の報告書等は、下に書いた Web Page にアクセスすればすべて得ることができる。材料力学や塑性論については東北大学の岸野佑次先生から、有限要素法については同大の京谷孝史先生から多くの明快で有益な示唆を受けた。振動論については同大の斉木功先生と秋山充良先生からデータや有益な情報とコメントをいただいた。また行列の検算等で、同大大学院修士課程（俗称）に在学していた時の小林裕君や安藤聡君達の協力を得た。細かい語句から内容に至るまで貴重なご意見をいただいた東北大学の藤原稔先生⁷と、東北学院大学の飛田善雄先生と中沢正利先生、秋田大学の後藤文彦先生にも感謝します。もちろん⁸、著者が学生のときに受けた講義（単位を取得できたか否かはともかく）の担当教員にも大いに感謝しています。

不完全な上に間違いが多々あるはずだが Web Page を通して公開することにした。ソースは非公開⁹で、奥付に記した条件下の freeware とする。1 年も経たないうちに版が進んでいる場合もあるが、さらに小さい間違い等が見つかる度に β 版（版の副番号がある値から単調減少）にもなっている。文章に「魂」を入れること¹⁰に専念でき、文章の順番の変更はもちろん、式や図表等の順の入れ替えや追加・削除が簡単にできる上に目次と索引も間違いなく更新でき、ワードプロセサでは実現できない¹¹ような美しく読み易い出力を容易に可能にしてくれる組版パッケージ \TeX に出会えたことは、著者の幸せである。大幅な加筆修正も楽しみながら積極的に行っている。この software 群が無かったらこの文書は書き続けなかっただろう。これと文献 [173] を最初に紹介してくださったのが土木学会の中村雅昭氏である。心から感謝している。また、GUI 方式の OS ができる前のパーソナルコンピュータの時代（1980 年代後半）に、ほぼ完全版の日本語 \TeX freeware パッケージ JaWa \TeX (em \TeX , NTT-J \TeX base) を開発してくれた東北大学の渡邊雅俊先生と、その当時の東北大学内電子掲示板システム TAINSBbms の \TeX 仲間にも大いに感謝したい。

執筆に際し、Quick/Visual BASIC（旧版）やポストプロセサ等の正規購入 software に加えて、エディタ QX やファイル管理 WinFD・画像処理 GifConstructionSet 等の shareware を用いたが、それ以外は freeware を用いた。例えば、日本語組版の \LaTeX や対応するフォント生成の METAFONT に加えて索引作成の mendex や変換 dvipdfmx 等を含む Windows 版の \TeX パッケージと、その表示・出力の dviout for Windows, 図化の gnuplot や Ngraph とそれを利用した等高線描画ツール Le Pont, フローチャート作成の flow, 画像処理の Gimp や IrfanView・GhostScript, Cygwin パッケージのコンパイラ等や新 Visual BASIC・数値計算の Scilab・数式処理システムの Maxima, ワードプロセサやスプレッドシート等のパッケージ LibreOffice, そして QRWindow や pdf_as 等である。このような [free/share]ware の作者に加え、 \LaTeX の各種スタイルファイルやマクロ等の作者と関連した NEWSGROUP の情報提供者に感謝の意を表したい。 \LaTeX のスタイルファイル [46, 112] と、この文書で紹介している資料や構造解析プログラム・著者自作の software は

<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/bear-collections/>

に¹²置いてある。またこの文書の印刷版しかお持ちでない読者は、 β 版も含めた pdf ファイルを

<http://hc2.seikyuu.ne.jp/home/Tetsuo.Iwakuma/>

からダウンロードできる。

某年某月吉日

著者

⁶ その真似等も含めた難解な見出しは 40 個以上になる。ヲタクな世界のことなのでお問い合わせはご遠慮ください。呵呵。

⁷ 先生の著書 [185] では第 16 版のタイトルでこの文書を引用していただいた。感謝します。

⁸ 論理的な文章に口語体や「もちろん」を使うなどというウェブページを見たことがあるが、もちろん無視。口語体の代表例は「よい」の代わりに使う「いい」だ。読み易くてわかり易いと感じたからだ。

⁹ この文書は \LaTeX で書かれているが、 \LaTeX の「特殊でよくない」使い方等については相談に乗ります。アドレスは奥付に描いた。

¹⁰ ある先生が例えば科研費の申請書等を書くときの注意事項の説明会等でよく使う表現で、とても気に入っているのでここでも使った。その科研費申請書も \LaTeX で作れるようになってから魂を入れ易くなった。足し算もしてくれるし。呵呵。

¹¹ 全くと言っていいくらい使わないので正確ではないが、土木学会論文集の公式サンプルや査読で接した実例を見てこう判断した。しかし一度だけとても美しいワードプロセサによる出力に出会ったことがある。作成者は理学部の林檎 OS 上の \TeX ユーザーだった。

¹² サーバ変更のため 2016 年春以降は 'bear/' の前のチルダ '~' が無くなっているのに注意して欲しい。

目次

I	ほぼ線形のほぼ静力学	1		
1	力学を学ぶこととデザイン	3		
1.1	どうして力学を学ばなければならないのか	3		
1.2	力学と設計 — デザインとはどういった行為か	9		
	演習問題 1-1	12		
2	静定構造の力学 — 外力と内力	15		
2.1	つり合い式	15		
2.1.1	つり合っているとは?	15		
2.1.2	外力と反力	17		
2.1.3	変形できる物体の抵抗力 — 内力	18		
2.2	静定トラス	19		
2.2.1	トラス構造の特徴	19		
2.2.2	断面力の求め方 — 節点法と断面法	20		
	演習問題 2-1	23		
2.2.3	影響線と断面設計	24		
	演習問題 2-2	28		
2.3	静定梁	28		
2.3.1	梁の特徴と断面力の定義	28		
2.3.2	代表的な例	31		
	演習問題 2-3	38		
2.3.3	梁の中の応力分布と断面係数	38		
2.3.4	影響線と断面設計	39		
	演習問題 2-4	42		
2.3.5	微分方程式で表したつり合い式	42		
	演習問題 2-5	46		
2.4	不静定とは?	46		
2.4.1	トラス構造の安定性と不静定	46		
2.4.2	不静定構造が解けるためのヒント	49		
	演習問題 2-6	51		
3	変形できる物体の力学基礎	53		
3.1	連続体とは	53		
3.2	変形の定義	54		
3.2.1	変位ベクトル	54		
3.2.2	ひずみテンソル	55		
3.2.3	剛体変位成分と微小回転 — 「変形」とは	57		
3.2.4	ひずみの主方向	58		
3.2.5	ひずみ成分の座標変換	58		
3.2.6	体積ひずみとせん断ひずみ	60		
3.2.7	ひずみの適合条件	62		
	演習問題 3-1	63		
3.3	内力と局所的なつり合い式	63		
3.3.1	変形できる物体の抵抗とは	63		
3.3.2	表面力ベクトルと応力テンソル	64		
3.3.3	応力で表したつり合い	66		
3.3.4	境界条件	67		
	演習問題 3-2	68		
3.3.5	外力のつり合いと内力のつり合い — 巨視的なつり合いと局所的なつり合い	68		
3.3.6	応力の主方向と不変量	69		
	演習問題 3-3	72		
3.3.7	応力成分の座標変換	73		
	演習問題 3-4	74		
3.3.8	静水圧成分とせん断応力成分	74		
3.4	変形と内力の関係 — 材料特性の記述の仕方	74		
3.4.1	構成方程式	74		
3.4.2	Hooke の等方弾性体	75		
3.4.3	弾性係数の特性	79		
	演習問題 3-5	85		
3.4.4	非弾性ひずみと非適合ひずみ	85		
3.4.5	塑性論の基礎	87		
	演習問題 3-6	93		
3.4.6	ちょっとだけ粘性	93		
3.4.7	材料の抵抗則に用いるひずみと応力	93		
3.5	仮想仕事の原理	93		
3.5.1	二つの許容場と仮想仕事の原理	93		
3.5.2	ポテンシャルエネルギー — 厳密解同士の仮想仕事と変分原理	96		
3.5.3	相反定理 — 異なる問題同士の仮想仕事式	99		
3.5.4	非弾性ひずみに関する相反性	102		
3.5.5	弾性体の単位荷重法と Green 関数	104		
	演習問題 3-7	106		
3.6	弾性問題の例	106		
3.6.1	固体中を伝播する波	106		
3.6.2	流体力学の基礎	107		
	演習問題 3-8	114		
3.6.3	平面問題	114		
	演習問題 3-9	118		
3.6.4	Airy の応力関数で平面問題を解く	118		
	演習問題 3-10	121		
	演習問題 3-11	125		
	演習問題 3-12	133		
3.6.5	3次元問題とポテンシャル	133		
	演習問題 3-13	136		

4	面内曲げと軸力を受ける棒の力学	139	5	有限要素法の基礎 — 柱と梁と平面ひずみ問題	211
4.1	初等梁理論	139	5.1	境界値問題の弱形式と近似解法	211
4.1.1	梁とは	139	5.1.1	近似して解くということ	211
4.1.2	支配方程式	140	5.1.2	弱形式	212
	演習問題 4-1	146		演習問題 5-1	214
4.1.3	境界条件	146		演習問題 5-2	216
4.1.4	境界値問題の例	149		演習問題 5-3	218
	演習問題 4-2	154	5.2	有限要素法の考え方	218
4.2	梁中間の集中せん断力や集中モーメントの作用	155	5.2.1	Galerkin 法の精度改善	218
4.2.1	梁中間の集中外力の作用と連続条件	155		演習問題 5-4	220
4.2.2	集中せん断力の作用	157	5.2.2	区分的多項式による近似	220
	演習問題 4-3	161		演習問題 5-5	222
4.2.3	集中モーメントの作用	161	5.3	構造部材の有限要素	222
	演習問題 4-4	162	5.3.1	要素剛性方程式	222
4.3	重ね合わせの原理で不静定梁を解く	163		演習問題 5-6	225
	演習問題 4-5	166	5.3.2	直接剛性法と内力分布	225
4.4	集中外力の数学的表現と単位荷重法	167		演習問題 5-7	230
4.4.1	集中外力の分布外力的表現	167	5.3.3	平面トラス	230
	演習問題 4-6	169		演習問題 5-8	234
4.4.2	単位荷重法	169	5.3.4	平面骨組	234
4.5	影響線	175	5.3.5	全体剛性方程式の解法	236
4.5.1	たわみの影響線	175		演習問題 5-9	237
	演習問題 4-7	178	5.3.6	その他の要素	238
4.5.2	曲げモーメントとせん断力の影響線	178		演習問題 5-10	241
4.5.3	梁の設計 — 最大曲げモーメントと最大せん断力	179	5.4	有限要素の特徴	241
	演習問題 4-8	180	5.4.1	柱と梁の剛性方程式は厳密	241
4.5.4	不静定梁の影響線	180	5.4.2	要素剛性行列は特異	242
	演習問題 4-9	184	5.4.3	変分原理と近似度	244
4.6	梁のせん断応力・せん断変形	186		演習問題 5-11	247
4.6.1	初等梁理論の枠組内のせん断応力	186	5.5	剛性方程式や仮想仕事の原理によるやや古めかしい手法	248
	演習問題 4-10	189	5.5.1	剛性方程式の一部分だけを使う解法	248
	演習問題 4-11	194	5.5.2	補仮想仕事の原理とその利用	248
4.6.2	せん断遅れ	194		演習問題 5-12	252
4.6.3	せん断変形を考慮した梁理論	194	5.6	平面ひずみ問題の有限要素定式化	255
	演習問題 4-12	196	5.6.1	仮想仕事式と応力ひずみ関係	255
4.7	梁のその他の問題	196	5.6.2	定ひずみ三角形要素	256
4.7.1	弾性床上の梁	196	5.6.3	高次要素や非力学問題	261
	演習問題 4-13	197	6	安定問題と梁-柱理論	265
4.7.2	棒の運動と初期値境界値問題	197	6.1	安定問題とは	265
4.8	トラスと骨組	198	6.2	剛体バネモデルによる安定問題の例	266
4.8.1	単位荷重法の一般化	198	6.2.1	有限変位問題と安定・不安定	266
4.8.2	トラスの変位と断面力	200		エネルギーを利用した安定規準	270
4.8.3	骨組の変位と断面力	203		演習問題 6-1	273
4.8.4	アーチの力学	207	6.2.2	接線剛性と安定・不安定	273
	演習問題 4-14	207		演習問題 6-2	273
4.9	仮想仕事の原理を用いた梁理論の定式化	207	6.2.3	比較的小さい変位状態の安定・不安定	273
4.9.1	仮想仕事式	207	6.3	座屈現象の特徴と例	275
4.9.2	梁の微小変位理論	208	6.3.1	2種類の座屈現象	275
			6.3.2	座屈点およびそのあとの挙動	277
			6.4	梁-柱の力学	279
			6.4.1	梁-柱の境界値問題と座屈	279
				演習問題 6-3	281
			6.4.2	柱の曲げ座屈	284

演習問題 6-4	290	7.7.1 ねじれ座屈	347
6.4.3 軸圧縮力と曲げを受ける棒	290	7.7.2 横倒れ座屈	348
6.4.4 初期たわみのある棒	293	7.7.3 曲げ引張・圧縮強度	349
6.4.5 柱の非弾性座屈	295	8 平板の力学の基礎	351
6.4.6 1 軸部材の引張強度と圧縮強度	298	8.1 構造部材の最小単位	351
6.4.7 剛性方程式と座屈解析	298	8.2 支配方程式と境界条件	351
演習問題 6-5	300	8.2.1 ひずみの仮定と変位場	351
6.5 その他の梁-柱の座屈	300	8.2.2 応力と断面力	353
6.5.1 バネ支持された梁-柱の座屈	300	8.2.3 支配方程式	354
演習問題 6-6	302	演習問題 8-1	356
6.5.2 弾性床上的梁-柱の座屈	302	8.2.4 境界条件	356
演習問題 6-7	303	8.2.5 仮想仕事の原理を用いた平板理論の 定式化	357
6.5.3 Timoshenko 梁-柱の座屈	303	8.3 境界値問題の解法の例	360
6.5.4 弾性床上的 Timoshenko 梁-柱の座屈	304	8.3.1 変位で表した曲げの境界値問題	360
6.6 大きく変位する棒の力学	305	8.3.2 Navier の解法	360
6.6.1 棒の有限変位理論	305	演習問題 8-2	361
6.6.2 座屈後挙動	306	8.4 剛性方程式	362
6.6.3 伸びない棒の理論 — Elastica	306	8.4.1 仮想仕事式	362
6.6.4 ケーブル	307	8.4.2 変位関数	362
6.6.5 弦を考えてみる	309	8.5 安定問題	363
7 ねじりを受ける薄肉断面棒の力学	311	8.5.1 比較的変位の小さい範囲の非線形理論	363
7.1 円柱と円管のねじり	311	8.5.2 一様な面内場の場合	365
7.1.1 円柱のねじり	311	8.5.3 1 方向に圧縮された単純支持板の座屈	366
7.1.2 円管のねじり	313	演習問題 8-3	367
演習問題 7-1	315	8.5.4 座屈後の挙動	367
7.2 薄肉閉断面棒の Saint-Venant のねじり	315	8.5.5 膜を考えてみる	368
7.2.1 せん断流とねじりモーメント	315	II ほぼ線形の動力学	371
7.2.2 閉断面の Saint-Venant のねじり定数	317	9 振動論の基礎	373
演習問題 7-2	318	9.1 1 自由度系の振動	373
7.2.3 多室断面のねじり定数	318	9.1.1 非減衰自由振動	373
演習問題 7-3	319	演習問題 9-1	377
7.2.4 つり合い式と境界条件	319	9.1.2 減衰自由振動	378
7.3 薄肉開断面棒のねじり	319	9.1.3 強制振動	382
7.3.1 薄肉長方形断面棒のねじり	319	演習問題 9-2	384
7.3.2 薄肉開断面の Saint-Venant のねじり 定数	323	演習問題 9-3	393
演習問題 7-4	324	9.1.4 不規則応答	395
7.4 薄肉断面棒の曲げねじり	324	9.2 多自由度系の振動	401
7.4.1 I 形断面棒の曲げねじり	324	9.2.1 2 自由度系の振動	401
7.4.2 曲げねじりの境界値問題	330	演習問題 9-4	408
演習問題 7-5	334	9.2.2 多自由度系の振動	409
7.4.3 一般化した曲げねじり理論における 断面座標・定数と応力分布	334	演習問題 9-5	416
7.5 構造力学体系と充実断面棒のねじり	336	9.2.3 数値解析手法	419
7.5.1 棒の力学の表現のまとめ	336	9.3 連続体の振動 — 曲げ剛性の無い構造要素の 振動	420
7.5.2 充実断面棒のねじり	336	9.3.1 まっすぐな弦の振動	420
7.6 ねじりを受ける棒の剛性方程式	338	9.3.2 円形膜の振動	426
7.6.1 曲げねじり問題	338	演習問題 9-6	431
演習問題 7-6	339	9.4 連続体の振動 — 梁の振動	432
7.6.2 Saint-Venant のねじり問題	340	9.4.1 梁の運動方程式	432
演習問題 7-7	340	9.4.2 非減衰自由振動 — 正攻法	433
7.6.3 立体骨組の問題	340	9.4.3 非減衰自由振動	434
演習問題 7-8	343		
7.7 曲げねじりと安定問題	347		

9.4.4	振動モードの直交性と自由振動解 — モード解析法	436	11.4.2	静水圧依存モデル	549
	— 演習問題 9-7	438		演習問題 11-5	553
9.4.5	粘性減衰自由振動	439	11.4.3	非共軸モデル	553
9.4.6	強制振動	439	11.4.4	材料パラメータ特性	555
	演習問題 9-8	447	11.4.5	もっと現実的なモデル	557
9.4.7	有限要素と振動解析	448	11.5	塑性解析	558
	演習問題 9-9	453	11.5.1	メカニズムと安全率	558
9.4.8	回転慣性とせん断変形	456	11.5.2	すべり線理論	559
9.5	1 自由度系の非線形振動	460	11.5.3	変形の局所化予測	565
9.5.1	振り子の運動	460	11.5.4	極限解析	566
9.5.2	リミットサイクル	466		演習問題 11-6	574
9.5.3	係数励振	468	11.5.5	終局状態の選択は正しいか? — 進行 性破壊	575
9.5.4	Duffing 振動子の強制振動	473		演習問題 11-7	578
10	弾性体中を伝播する波 初歩	479	12	有限変形理論を直感で噛み砕く	583
10.1	1 次元の波動	479	12.1	有限変形って?	583
10.1.1	非破壊評価の勉強を目指して	479	12.2	ひずみとひずみ速度	584
10.1.2	支配方程式	479	12.2.1	変形とひずみ	584
10.1.3	d'Alembert の解と解の意味	479		演習問題 12-1	597
10.1.4	波の反射	481	12.2.2	変形と運動の変化率	597
	演習問題 10-1	483		演習問題 12-2	604
10.2	平面波	483	12.2.3	弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度	604
10.2.1	3 次元の運動方程式	483	12.3	応力とつり合い式および応力速度	608
10.2.2	平面波の定義	484	12.3.1	基本的な応力とつり合い式	608
10.2.3	無限領域の調和平面波	486	12.3.2	その他の応力とつり合い式	612
	演習問題 10-2	492	12.3.3	応力の物理的な意味	614
10.3	表面波	492		演習問題 12-3	618
10.3.1	Rayleigh 波	492	12.3.4	客観性を持つ応力速度	618
10.3.2	Love 波	495	12.4	現配置を基準配置と捉えること	620
	演習問題 10-3	497	12.4.1	updated Lagrange 手法	620
III	非線形の静力学	499	12.4.2	変形速度	621
11	塑性序論 — 時間が関与しない増分の力学	501	12.4.3	応力速度	621
11.1	非可逆変形と 1 次元塑性モデル	501	12.4.4	増分つり合い式	623
11.1.1	非可逆変形と破壊	501	12.4.5	応力の更新	624
11.1.2	1 次元の塑性モデル	504	12.5	有限変形の枠組で構成則を表すには	626
11.1.3	弾・完全塑性材料でできた構造要素 の例	509	12.5.1	構成則に用いる応力とは、ひずみと は?	626
	演習問題 11-1	511	12.5.2	超弾性と歪弾性	628
11.2	3 次元への一般化	512	12.5.3	こんな弾性体って?	630
11.2.1	降伏条件 — 状態の定義	512		演習問題 12-4	642
11.2.2	流れ則 — 変形の変化則	515	12.5.4	弾塑性体の代表例 — 速度非依存塑性	642
11.2.3	増分型構成方程式	517	12.6	非線形挙動の解析的予測の例	648
	演習問題 11-2	521	12.6.1	局所化条件	648
11.3	一般化された弾塑性構成方程式	521	12.6.2	構成則の違いによる代表的な例	649
11.3.1	降伏曲面と法線則	521	12.7	非線形挙動の数値的予測の例	651
11.3.2	塑性ポテンシャルの導入	525	12.7.1	updated Lagrange 的数値解析法	651
	演習問題 11-3	529	12.7.2	数値解析例 — 弾性体の 1 軸載荷	658
11.3.3	具体例と履歴依存性	529	12.7.3	構成則の違いによる代表的な例	659
11.3.4	転位の運動と Prandtl-Reuss モデル	543			
11.4	その他の有用な物理モデル	544			
11.4.1	移動硬化モデル	544			
	演習問題 11-4	549			

IV 補足と蛇足	673	E 境界要素法と逆問題の概念	729
A Timoshenko 梁理論	675	E.1 境界上の解の積分表現	729
A.1 支配方程式	675	E.1.1 問題の設定	729
A.1.1 運動場の仮定と合応力	675	E.1.2 解の積分表現	729
A.1.2 つり合い式と境界条件	676	E.2 境界要素法	730
A.1.3 たわみで表した支配方程式	677	E.3 逆問題の概念	731
A.2 曲げ問題の仮想仕事式と剛性方程式	678	F 1次元の粘弾性の基礎的な考え方	733
A.2.1 仮想仕事式	678	F.1 粘性	733
A.2.2 剛性方程式	679	F.2 粘弾性	733
B 面内の有限変位棒理論	683	F.2.1 クリープ	733
B.1 微小でない変位と変形	683	F.2.2 応力緩和	735
B.1.1 ひずみの定義	683	G 1次元の熱伝導と関連した力学	737
B.1.2 仮想仕事の原理と応力	684	G.1 1次元の熱伝導問題	737
B.1.3 運動場の仮定	684	G.1.1 熱伝導方程式	737
B.2 Bernoulli-Euler 梁理論 — 美しい理論	685	G.1.2 過去に向かって拡がる	739
B.2.1 運動場	685	G.2 1次元の力学との簡単な連成	739
B.2.2 つり合い式と境界条件	686	H 複合材料の平均特性	747
B.2.3 構成方程式	687	H.1 内部に微視構造を持つ材料	747
B.2.4 座屈荷重	688	H.2 非均質体と介在物	748
B.2.5 変分原理と <i>Elastica</i>	688	H.2.1 非均質体と Eshelby の解	748
B.3 Timoshenko 梁理論	690	H.2.2 支配方程式	749
B.3.1 つり合い式と境界条件	690	H.2.3 Fourier 解析	751
B.3.2 構成方程式	691	H.2.4 等価介在物法	754
B.3.3 近似支配方程式	692	演習問題 H-1	755
B.3.4 座屈荷重	693	H.3 複合材料の平均特性	756
B.4 微小変位の枠組の中の梁・柱理論	694	H.3.1 弾性材料の森・田中平均	756
B.4.1 有限変位理論の線形化	694	H.3.2 実測値との比較	758
B.4.2 剛性方程式	694	演習問題 H-2	759
B.5 断面変形する薄肉円管梁理論	697	H.3.3 弾塑性材料の場合とその改善手法	760
B.5.1 運動場	697	I Fourier 級数と境界値問題	765
B.5.2 支配方程式	699	I.1 準備 — ベクトル値関数と常微分方程式	765
B.5.3 断面力の変位表示	700	I.1.1 問題の設定	765
B.5.4 安定問題	700	I.1.2 固有値問題	765
B.6 数値解析法	702	I.1.3 ベクトル値関数の常微分方程式	766
B.6.1 2点境界値問題の一解法	702	I.2 1次元熱伝導方程式 — 放物型偏微分方程式	768
B.6.2 一つの有限要素解析法 — 有限変位の枠組の中で	703	I.2.1 熱伝導方程式	768
B.7 やや不安定な梁・柱の座屈と数値解	707	I.2.2 固有値問題	769
B.7.1 片端を斜面上で支持された棒	707	I.2.3 固有関数を用いた解	771
B.7.2 リンクで押された棒	713	I.2.4 非零の境界条件	772
C テンソル演算について	717	I.2.5 非斉次問題	773
C.1 座標と基底ベクトル	717	演習問題 I-1	773
C.2 計量テンソルと置換テンソル	718	I.3 1次元波動方程式 — 双曲型偏微分方程式	773
C.3 共変微分	719	I.3.1 波動方程式	773
C.4 極座標系における物理成分	720	I.3.2 固有値問題	774
D 破壊力学はどうしても好きになれない	723	I.3.3 斉次問題	774
D.1 破壊力学とは	723	I.3.4 非斉次問題	775
D.2 弾性亀裂と応力拡大係数	724	演習問題 I-2	776
D.2.1 亀裂の変形モードと面外問題	724	I.4 直角座標系のポテンシャル方程式 — 楕円型偏微分方程式	776
D.2.2 面内問題の場合	727	演習問題 I-3	778
D.2.3 平面問題の応力拡大係数	727	I.5 円盤上の熱伝導方程式	778
D.3 亀裂先端の塑性変形について	728	I.5.1 極座標系の熱伝導方程式	778

I.5.2	円盤上の固有値問題	778	M 情報の表現と伝達, そして処理と倫理	871
I.5.3	固有関数を用いた解	780	M.1 コマンドライン上のコンピュータとの対話	871
I.5.4	軸対称問題	780	演習問題 M-1	878
J 橋梁と鋼構造		785	M.2 HTML と \LaTeX による文書作成の基礎— 情報の表現と伝達	880
J.1	橋梁の形式と種類・構成	785	M.2.1 文書の記述法	880
J.1.1	橋梁について	785	M.2.2 HTML と \LaTeX の基本	885
J.1.2	鋼橋の形式や構成	788	演習問題 M-2	895
J.1.3	形式とスパン長	795	M.2.3 プログラムやパッケージを使う	898
J.2	鋼の基本的な特性	795	M.2.4 悲しいワードプロセサ	899
J.2.1	鋼の製法と冶金学的性質	795	M.3 プログラミング— 情報処理	901
J.2.2	鋼の機械的性質	799	M.3.1 数値の表現とコンピュータへの命令	901
J.3	構造設計の考え方	807	演習問題 M-3	903
J.3.1	新設の手順	807	M.3.2 Java 言語を例としたプログラミング	903
J.3.2	安全に対する設計法	808	演習問題 M-4	905
J.3.3	信頼性理論と設計法	810	演習問題 M-5	910
J.4	鋼の強度 — 許容応力	811	演習問題 M-6	915
J.4.1	引張強度	811	M.3.3 計算結果を可視化して文書にする	915
J.4.2	棒の圧縮強度	811	演習問題 M-7	919
J.4.3	梁の曲げ強度	817	M.3.4 C と FORTRAN77 や BASIC の例	921
J.4.4	せん断強度	818	M.4 情報取り扱いマナー — 情報倫理	924
J.4.5	複雑な応力状態に対する照査	818	N 独断と偏見に満ちた FORTRAN 入門	931
J.4.6	板や補剛材等の圧縮強度	820	N.1 はじめに	931
J.5	橋梁構造の荷重 (作用)	822	N.2 文法の基本	931
J.5.1	主な荷重の種類	822	N.2.1 プログラムの書き方と変数および算 術代入文	931
J.5.2	床版設計のための T 荷重	826	N.2.2 ファイル入出力と do ループ・if 文	936
J.5.3	桁設計のための L 荷重	828	N.2.3 文字変数と倍精度実数	940
J.6	プレートガーダの設計例	836	N.2.4 1次元配列	941
J.6.1	設計例 — 文献から	836	N.2.5 common 文と parameter 文・data 文	942
J.6.2	補足 I: 垂直補剛材について	836	N.2.6 2次元配列	945
J.6.3	補足 II: せん断遅れについて	837	N.2.7 2次元配列の受渡しと上手なメモリ の使い方 (整合配列)	947
J.7	接合	837	N.3 いくつかの応用例	954
J.7.1	接合の種類	837	N.3.1 ソーティングと最小 2 乗法	954
J.7.2	溶接接合	838	N.3.2 2分法による求解	956
J.7.3	高力ボルト接合の種類	841	N.3.3 Newton-Raphson 法	958
J.7.4	高力ボルトの摩擦接合	841	N.3.4 連立方程式の Newton-Raphson 法	959
J.8	吊橋の古典的考え方	845	N.3.5 計算を途中でやめたり継続したりす るには	961
J.9	あの津波による被害状況と仮橋	847	N.3.6 繰り返し計算と増分計算	962
K 模型で学ぶ		849	N.4 その他の一般的なこと	966
K.1	橋梁模型	849	O 支援ソフトウェア	967
K.1.1	ケント紙を使ったトラス	849	O.1 数学に関する自作ではないソフトウェア	967
K.1.2	トラスと桁のペーパークラフト	858	O.2 力学に関する自作のソフトウェア	967
K.2	自己展開型構造	858	O.3 文書作成に関するソフトウェア	968
K.3	折り紙やペーパークラフト等	859	O.3.1 自作のソフトウェア	968
L 図学って知ってますか?		869	O.3.2 自作ではないソフトウェア	969
L.1	それってなあに?	869	O.4 学位論文審査に関する \LaTeX ファイル	969
L.2	3次元的な線分と平面を 2次元で表す方法	869		
L.3	代表的な例	870		

P	卒業論文等の書き方とプレゼンテーション, そして 大学とは	971	P.3.1	スライド作成についての技術的なヒ ント	980		
	P.1	論文とは	971	P.3.2	発表と質疑応答におけるマナー	982	
		P.1.1	論文の目的	971	P.4	大学で学ぶということ	991
		P.1.2	論理的構成を持った論文	972	Q	演習問題の答	999
		P.1.3	自分自身の成果と他人の成果	973	R	数学記号等について	1009
	P.2	論文の執筆要領	974	参考文献	1013		
		P.2.1	文章のスタイルと章建て	974	索引 — 著者・記号・橋梁写真・英単語を含む	1023	
		P.2.2	フォント等	975	あとがき	1055	
		P.2.3	式番号や図表の番号と配置	976			
		P.2.4	参考文献の引用とリスト	977			
		P.2.5	図の描き方と著作権	979			
	P.3	審査会におけるプレゼンテーション	980				

トホホ¹³・・・の目次

☆	積分の縦棒って何?	477	☆	汎用プログラムがあれば力学は要らない?	10
☆	我が国の Fourier 級数の教え方は間違っていないか?	765	☆	シェル要素で3次元解析ができるか?	368
☆	複素関数論を学ばずに工学は発展できるか?	443	☆	数値解析の結果は解析解か?	262
☆	テンソル(数学)成分は物理成分か?	687	☆	板書を写さずして理解が深まるのか?	745
☆	構造力学って多項式の積分の練習科目か?	253	☆	英語だけでやる数学の授業はそんなに嫌ですか? ..	994
☆	線形系の基本は重ね合わせなんだがなぁ?	186	☆	それはとんでもない勘違いではないですか?	
☆	相反定理の証明に剛性行列が必要ですか?	101	▶	大学1年生のとんでもない勘違い	986
☆	Castigliano の定理等を教える必要ありますか? ..	254	▶	卒論生のとんでもない勘違い	985
☆	断面の性質を最初に教える意味がありますか? ..	143	☆	学生さんは朝からお疲れですか?	715
☆	立体構造を教える前に断面の主軸って? ..	342	☆	情報倫理教育ってどうすればいいのか?	924
☆	Young 係数と呼ばないといけませんか? ..	75	☆	パラスタってどこのスタジアムなのか?	264
☆	延性と靱性をちゃんと区別できますか? ..	803	☆	英文の論文表現に嘘は無いのか?	997
☆	仮想仕事の原理はエネルギー原理ですか? ..	93	☆	我が国への quarter 制や GPA 導入は大丈夫か? ..	743
☆	極複雑系の事実合う物理モデルって何? ..	581	☆	自然界を支配する法則って? ..	12
☆	水理学は得意ですか? ..	107	 呵呵	

¹³ ドイツ語標記の 'BACH' (シラドシ) という音階の有名な曲がある。多分 Max Reger による曲? そこで以前, 秋田大学の後藤文彦先生に「橋トホホ (ドシソミミ 'CHGEE')」の作曲 (<http://gthmhk.web.fc2.com/verkoj.html>) を依頼したことがある。

フリーライター等をする仙台在住の熊谷智美さん@Something が学科パンフレットに寄せてくれたコピー

社会環境工学の研究や開発の仕事は、
「ありがとう」と言われにくい。

なぜならそれは、
あまりに大きく、
あまりに身近だから。

なにげなく利用する道路や鉄道、
子どもたちの笑顔がはじける公園、
おだやかに流れる河川。
都市には活気が満ちあふれ、
一方で豊かな自然が保たれている。

こうした日常を守り支えているのが、
社会環境工学の技術だ。

誰か一人を幸せにもするし、
地域を、日本を、世界をも豊かにする。

「ありがとう」と言われる以上の価値が
社会環境工学の世界にはある。

ちなみにこのコピー [© 2010 年頃 東北大学大学院工学部
研究科土木工学専攻] 中の「社会環境工学」は「土木工学¹⁴」と同義

¹⁴ 「土木工学」は英語で ‘civil engineering’ と記される。その意味を「市民のための工学」とすることが多く、この鉤カッコは土木学会のホームページの表現そのままである。しかし第1著者が尊敬する先生から教えてもらったのは次のような経緯だった。『かつて工学には ‘military engineering’ という分野があり、それ以外の分野つまり土木工学分野が ‘civil engineering’ だった。そのあと前者から機械工学や電気工学等が派生して現在に至っているのであって、そもそも「市民」という意味ではなく ‘military’ に対峙するという意味に過ぎない』ということだ。このように昔は対軍事工学（敢えて文字にすると民生工学）だった土木工学の研究も昨今は他の工学研究との違いは無くなってきている。そもそも工学分野のほとんどの研究が軍事技術とは全く無関係だとは言えないのだが。さて、種々の分野や組織・機関のパンフレット製作の経験があって土木工学のこともご存知の熊谷智美さんには、「社会環境工学」は「土木工学」と同じだと伝えた上で、パンフレットの中身や文章表現等に対して助言をいただき、このコピーをボランティア提供していただいた。

第 I 部

ほぼ線形のほぼ静力学



大鳴門橋 1985年竣工

第1章

力学を学ぶこととデザイン

1.1 どうして力学を学ばなければならないのか



(a) 牛越橋 — ゲルバー梁



(b) 桁のスポンジ模型

写真 1.1 最も単純な橋梁形式 — 桁。牛越橋は仙台の広瀬川に架かる橋で 1953 年竣工

土木構造物（社会基盤構造物）の一例としての橋梁を対象として、構造物を設計（デザイン）する場合に、なぜ力学的な感覚を身に付けていないといけないのかについて、まずは示しておこう。

桁 — 最も単純な橋梁形式： 写真 1.1 (a) は東北大学の川内キャンパスのちょっと北にある牛越橋である。橋は、物や人・情報・文化をスムーズに渡すために谷や川等に架けられる重要な土木構造物の代表例である。その最も単純な形式は桁と呼ばれる¹もので

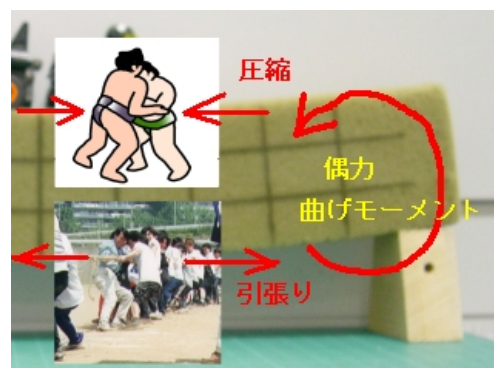


写真 1.2 上部は圧縮で下部は引張

1. 橋に載っている人や車等の重量は、重力下向きの力として桁にかかる。
2. 桁の中では、写真 1.1 (b) や写真 1.2 からわかるように、上部は水平方向に縮んでいることから水平方向の圧縮で抵抗しており、下部は伸びていることから、これも水平方向の引張りで抵抗している。どちらも水平方向の力で、桁の上半分と下半分で向きが逆になっている。重量の作用は上から下への鉛直方向の力なのに、桁はそれを水平方向の力に変換して抵抗していることは、ちょっと不思議で理解し難い。ほとんどすべての学生にとって、構造力学の最初の難所である。

¹ 英語では「ガーダ」であり、「ガード下の屋台」と言うときの「ガード」は桁のこと。なお「ガーター」は靴下留めのこと。

3. 一つの断面（写真1.1(b)と写真1.2の、スポンジに付けた縦線マーカー部分）の上部と下部に同じ大きさで逆向きの力がかかっていることから、その二つの力を作る偶力（曲げモーメント）が、最終的な桁の抵抗力になって、人や車等の重量を支えている。

という抵抗をすることになる。これは初学者にはとても難しい（第1著者も学生の時にはさっぱりわからなかった）ことで、今は理解できなくてもいい。第2,4章で学んで欲しい。

では同じ長方形断面の桁を、写真1.3のように縦向きに置いたときと、横向きに置いたときとで、どちらが強いだろう。答は前者なのだが、その理由は、第2,4章で習う次式の断面2次モーメントと断面係数

$$I \equiv \frac{bh^3}{12}, \quad W \equiv \frac{bh^2}{6}$$

が抵抗係数として関与していることにある。ただし、 b が桁の断面の幅で h が高さである。具体的には、変形のし難さを示す抵抗はこの I に比例し、幅 b には比例するだけだが、桁の高さ h についてはその3乗(h^3)に比例して強くなる。抵抗力の度合の場合には、 W 、つまり h の2乗(h^2)に比例して強くなる。この模型断面の寸法 3.5×6 (cm)を用いて I を計算すると、縦長の場合が 63.0 cm^4 、横長が 21.4 cm^4 で、その比は‘2.94’になる。実測されたたわみは写真1.3の下の写真のように、縦長の場合が約4 mm、横長が約12 mmとなるので、たわみ難さの比がおおよそ $\frac{1/4}{1/12} = \text{約}3$ 、つまりこれが上述の‘2.94’に相当している。

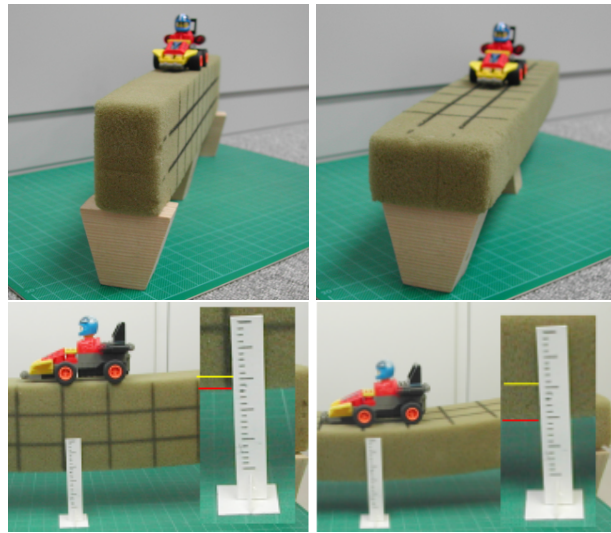


写真1.3 縦長と横長、どちらが強い

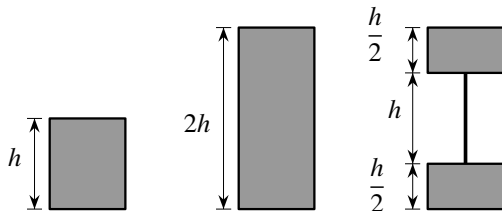


図1.1 長方形断面とI形断面



写真1.4 I形断面の身近な例はレール

表1.1 効率的な断面形状とその性能比較表および実例

	矩形(高さ h)	矩形(高さ $2h$)	I形(高さ $2h$)	断面の幅 b は三つ共同じ
コスト	1	2	$1 + \alpha$	断面積比 (ウェブ分の α は小さい)
たわみ難さ	1	$8 (= 2^3)$	7	断面2次モーメント I の比
抵抗力	1	$4 (= 2^2)$	3.5	断面係数 W の比

このことを踏まえ、図1.1に示した同じ幅 b を持つ三つの断面形の性能を、一番左の矩形断面を基準にして比較したのがその下の表1.1である。コストは断面積で、抵抗力は断面係数 W で評価し、この三つの断面形を比較して総合的に判断すれば、一番右のI形断面が経済的・力学的に最も合理的であることがわかる。こういったことを、この文書がカバーしている「構造力学」という科目で習い、それを身に付けていなければ、より合理的な橋梁デザイン²はできないのだ。

² 土木構造物のほとんどは税金を使った公共事業における成果品であるため、まず確保すべき安全性とほぼ同様の重要さで経済性も考慮しなければならない。

この図 1.1 の一番右の断面は、厚い板（フランジ）を上下方向に縦の薄い板（ウェブ）で距離を離しているだけだ。これはどこかで見たことのある形ではないだろうか。そう、写真 1.4 に示した線路のレールの断面と同じである。この図のようにレールは、バラスト（砂利）でできた弾性的に抵抗する床の上に、枕木を介して支えられた「けた」と同じ抵抗作用で列車³を支えている。だから抵抗係数（曲げ剛性）を大きくする必要があって、図の左に黒い図形で示したような I 形のような断面になっているのだ。

ところで、毛利元就の「3本の矢」という逸話がある。Wikipedia⁴から引用すると

ある日、元就は三人の息子（隆元・元春・隆景）を枕元に呼び寄せ、1本の矢を折るよう命じた。息子たちが難なくこれを折ると、次は3本の矢束を折るよう命じたが、息子たちは誰も折ることができなかった。元就は一本では脆い矢も束になれば頑丈になるということを示し、三兄弟の結束を強く訴えかけた<後略・注略>

というもの⁵だ。では逆に、三人で力を合わせたら折ることができただろうか。半径 r の1本の円形断面 \odot の断面2次モーメントと断面係数は $I_0 = \pi r^4/4$, $W_0 = \pi r^3/4$ である。もし矢を横に並べ $\odot\odot\odot$ のようにすると断面2次モーメントも断面係数も3倍になるだけだから三人で力を合わせたら折ることができただろう。しかし、もし矢を $\odot\odot$ のように組むと、断面2次モーメントは $11I_0$ と1本の11倍になり、上下端の断面係数が $W_U = {}^{33}W_0/(3+2\sqrt{3}) \approx 5.11W_0$, $W_L = {}^{33}W_0/(3+\sqrt{3}) \approx 6.97W_0$ になる。折ることを議論するのであれば断面係数を比較検討すればいいので、3本を三角形にくみ上げると5倍以上強くなることがわかる。もしこの元就の逸話を作った人が構造力学をちゃんと勉強していたら、三人で3本の矢を折るように命じて、例えば「つまり凡庸な戦略なら3倍の軍勢が来たら負けるかもしれないが、いい軍師を雇用して戦略を練ることによっては5倍の軍勢に対しても国を守ることができる。」とでも追加していたかもしれない。呵呵。閑話休題。☆



写真 1.5 プレートガーダ橋

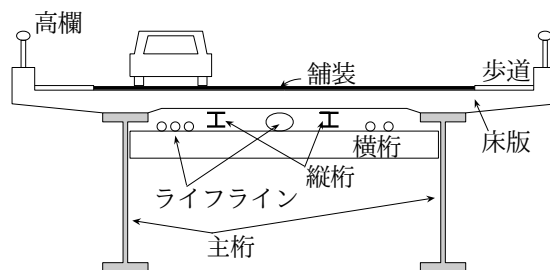


図 1.2 2主桁橋梁の標準的な断面

最初に示した桁橋の例に用いた牛越橋も、実は、写真 1.5 のように下から見ると I 形断面の桁 2 本（主桁）に支えられていることがわかる。図 1.2 に示したような断面の主桁がプレートガーダ（^{ぼんげた} 鋸桁）と呼ばれ、この図は鋼の桁橋断面の代表例である。「主桁」だけでなく「縦桁」や「横桁」も『I 形断面』の部材でできていることが多い。ちなみに、写真からもわかるように、人や車だけではなくライフライン（ガスや水道等）も渡していることに注意⁶すべきである。

³ 実は列車の床もたわんでいるということも、第1著者が学部2年生のときの物理学の講義で小出昭一郎先生が「警告」なされた。「警告」と書いたのは、周りをいつも観察しなさいというお叱りだったからである。

⁴ 2008年11月27日現在、数字の使い方が統一されていない。http://ja.wikipedia.org/wiki/元就/

⁵ どうやら「3本の矢」と「材料力学」で検索するとこのノートもヒットするらしく、Northwestern 大学つながりの広島国際学院大学の元家勝彦先生から2014年9月26日にメールをいただいた。三人には3本を折らせるべきであり、そのとき重ねた矢の接着の有無を問題にすべきであって、実はそれはそもそも Aesop 寓話にある話だと教えていただいた。この文書の記述は、矢をしっかり握っていることを前提にしている。やはりこの逸話はかなりの論理矛盾を含んでおり、これを作った人はかなりの勉強不足だったようだ。

⁶ 東北地方には、秋に「芋煮会」という行事があって、河原で鍋を囲んで友人との親睦を深める催しがある。できればその際には、橋の下を覗き込んでいろいろと力学的なことに思いを巡らせて欲しい。

そこで、桁の力学的な抵抗の特性を見るために、主にフランジ部が材料の持つ最大の抵抗力 S で荷重を支えている状態を図 1.3 に示した。簡単のために、薄いウェブはあまり抵抗しないものとして無視する。上と下のフランジに、同じ大きさの最大抵抗力 S が逆向きの力として発生し、それが作る偶力で荷重を支えていると考えていいので、図からも明らかなように、もし $h_1 < h_2$ であれば、曲げモーメント（偶力）の「最大抵抗モーメント」も $M_1 < M_2$ となり、右の断面の方が大きい抵抗力を持っていることになる。これは「テコ」の原理から類推するとわかり易いかもしれない。

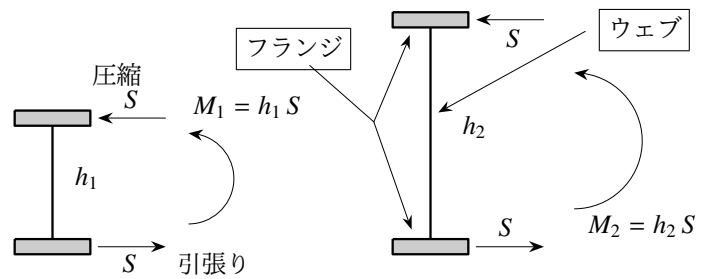


図 1.3 桁高と曲げモーメントの大小

と考えると、もし $h_1 < h_2$ であれば、曲げモーメント（偶力）の「最大抵抗モーメント」も $M_1 < M_2$ となり、右の断面の方が大きい抵抗力を持っていることになる。これは「テコ」の原理から類推するとわかり易いかもしれない。



写真 1.6 JR 仙台駅新幹線 14 番ホーム

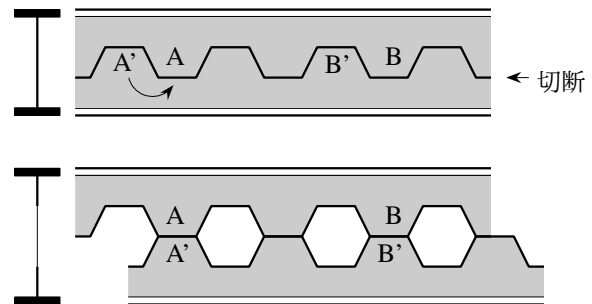


図 1.4 孔開き板

ここでは、ウェブと呼ばれる部分が無視していたが、実際に橋を見に行くとわかるように、そこはかなりしっかりした板に見える。本当に無視していいのだろうか。実はウェブは、第 8 章で述べるような意味で剛性を確保している部品であり、桁という構造の主要な働きを考察する場合には、ある程度は無視してもいい。例えば写真 1.6 は JR 仙台駅新幹線ホームであるが、天井を支えている梁を見ると六角形の黒い部分が見える。これは I 形桁のウェブ板に六角形の孔が開いているのだ。いわゆる孔開き板と呼ばれるもので、図 1.4 に示したように、通常の I 形桁を図のように切断し、A' を A に、B' を B に合わせて、合わせた面をすべて溶接することでできる。これで桁の高さも大きくできて強くすることができる。使われる箇所⁷にもよるが、このくらいの孔は開いていてもいいということだ。

トラス — 桁からウェブを無くしてしまおう：孔開き板を紹介したが、もしそれでもいいのなら、上下フランジ間の距離をもっと離して、ついでにウェブの部分もほとんど無くしてしまったらどうなるだろうか。つまりそれは図 1.5 のようになる。この形式をトラスと呼ぶ。

この形式の橋梁の場合には

- それぞれの部材（弦材）は桁ほどは太くなくてもいい。

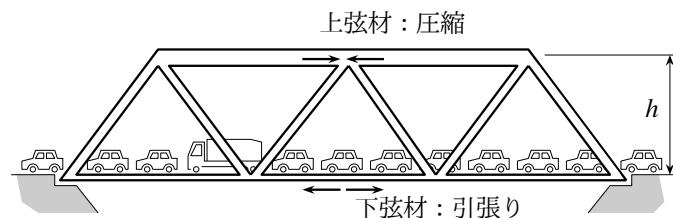


図 1.5 トラス構造 — 上弦材圧縮・下弦材引張り

⁷ 柱や横梁と交差する箇所のようなせん断力が比較的大きくなる所には孔が無い。

- 桁高 h を図のように大きくでき、つまり、抵抗モーメントを大きくできる。
- 各弦材は、曲げではなく、単純に圧縮か引張だけで抵抗すればいい。
- 弦材のつなぎ目（格点）は柔らかくてもいい。極端には、格点は「ピン留め」でもいい。

という特徴をもつことになる。弦材のつなぎ目がピンであったりして柔らかい（回転可能な）ので、図のように、一つのパネルを三角形にして安定なものにし、それを連続して組み合わせて安定な構造にしている。

こうすることによって、上弦材は常に圧縮された状態で抵抗し、下弦材は引張られた状態になる。斜めの部材（斜材）は、その部材と荷重の位置関係によって圧縮だったり引張だったりするが、桁のような曲げによる抵抗はほとんど生じないため、個々の部材は単純な抵抗を持った構造でいい。また例えば p.478 の写真にある松齢橋の上下の弦材を注意深く観察すればわかるように、通常は下弦材は上弦材よりも細くなっている。図 1.5 でもわざと

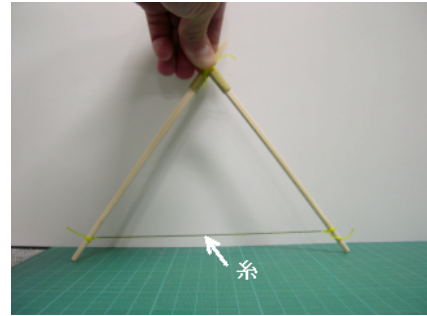
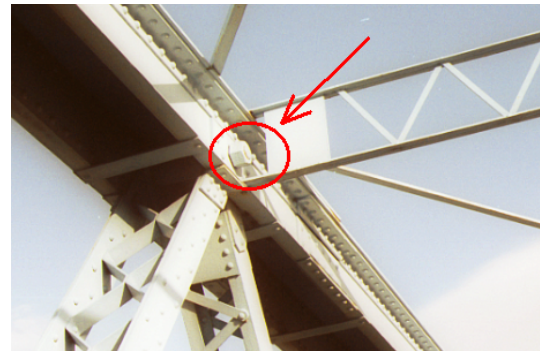


写真 1.7 引張側はケーブル可

のように描いてみた。そして下弦材には引張だけが生じているので、極端なことを言えば、理屈上は下弦材はケーブルでもいいから、写真 1.7 の模型のように、糸でも十分抵抗できている。格点がピンでできている実例⁸を写真 1.8 に示した。この例の三角形のパネル以外に、鉛直材が入っているトラス等もあるが、それぞれの形式の特徴等については橋梁工学の本等を参考にして欲しい。それぞれの形式にはそれぞれの力学的特徴があるのであろうが、著者是不勉強なので、それについてはコメントできない。個人的には、写真 1.8 (a) の左奥に写っている新しいトラス橋のような正三角形を並べただけのものより、p.478 の松齢橋のような曲弦トラスが増えて欲しいと感じているのではあるが、最近では合理化のためにそれが難しいようだ。



(a) 元は鉄道橋、今は歩道橋



(b) 格点はピン（大きなボルト）で接合

写真 1.8 トラス橋の例 — 伊達橋（福島のア武隈川に架かる）

アーチ: では、トラスの上弦材をもっとガッチリとした部材にして、斜材をすべて取り除き、しかも下弦材を写真 1.7 のようにケーブルにしたものはどうだろう。写真 1.9 は、ちょっとだけ台形にした木片⁹を 7 個並べて置いたもので、それぞれの木片同士は接着されていないが、下に「ひも」（タイと呼ぶ）をつけてある。木片の部分は、トラスの上弦材同様、主として圧縮力で抵抗し、タイ

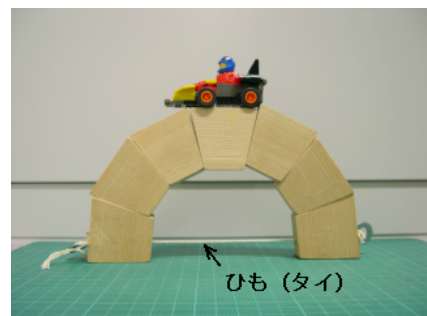


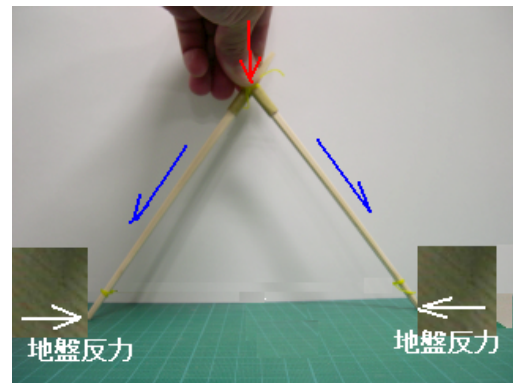
写真 1.9 タイドアーチ

⁸ ピンではない場合の格点付近には、副次的な曲げモーメントが発生してしまう。

⁹ 秋田大学の後藤文彦先生作。



(a) 御霊屋橋 (仙台の広瀬川)



(b) アーチの働きの模型

写真 1.10 普通のアーチの働き



(a) 大橋 (広瀬川) — 塞がったスパンデル部



(b) 鋼アーチ橋の例 — 十綱橋 (福島飯坂温泉)

写真 1.11 コンクリートアーチと鋼アーチ

がトラスの下弦材と同じ引張で抵抗している。単に木片の重さ（と木片間の摩擦）だけで抵抗しているので、1個でも取り去ると崩壊してしまう。もちろん、タイを切った場合にも崩壊する。このように円弧のような形¹⁰にした部材（アーチリブと呼ぶ）で主に圧縮で抵抗する形式をアーチと呼ぶ。

さて写真 1.10(a) は、これも広瀬川に架かる御霊屋橋であるが、タイは見えない。すなわち、写真 1.10(b) に示したように、もし地盤が強固で地盤反力が期待できるならタイは不要になる。通常の多くのアーチにはタイは無く、それは、地盤が強固な場所にアーチが建設されていることを意味している。実は、東京の隅田川に架かる「永代橋」がタイドアーチであるが、「タイ」はケーブルではなく、桁の中に隠された鋼板でできている。また、この御霊屋橋ではアーチの上に道路があるので「上路形式」に分類される。この上路とアーチリブの間の部分をスパンデルと呼ぶが、この御霊屋橋の場合はそこに鉛直材が配置されている。これに対して、東北大学川内キャンパスに近い「広瀬川に架かる大橋（写真 1.11(a)）」のように、スパンデル部が塞がって（多分中空）いる場合もある。写真 1.11(b) は鋼アーチの一例である。鋼アーチの場合のリブには、桁と同様、I形や箱形断面がよく用いられるが、この例の場合には、2対の溝形鋼を向き合わせて造った（やや古いから多分；呵呵）箱断面の比較的細い部材を造り、それを2本にして主なリブとして上下に配置し、その間を筋交いで組んで1本のリブ（ブレーストリブ）にしていると思われる。

¹⁰ 円弧状に見えてもアーチではない橋梁もある。例えば p.784 の写真の岩国の錦帯橋は張り出し（片持ち）梁を重ねたものであって、圧縮で抵抗するアーチではない。アーチ状の桁橋。

吊構造： 橋梁をもっと長くするためには、非常に高い引張強度を持つことができる¹¹鋼ケーブルを利用した吊構造が採用される。具体例が写真 1.12 の吊橋である。比較的短いトラス形式の桁を何本もつないで、その自重をケーブルで支えることによって、自動車等の荷重はその短い個々の桁が支えているというのが、大まかな働きである。自然界の写真 1.14 のようなものをヒントにしたのだろう。もう一つの形式は写真 1.13, 1.15 の斜張橋だ。

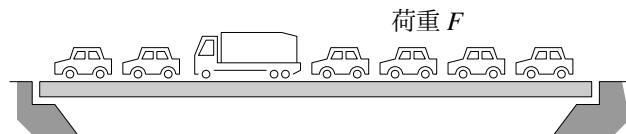


写真 1.12 吊橋 — 南備讃瀬戸大橋

このように、形式毎にもその力学的特徴は異なっているし、用いる材料の持つ特性も異なる。したがって橋梁を設計する際には、どんな材料を使えばいいかという材料力学と、どのような形式がいいかという構造力学、さらに各部材が破壊するまでにはどのような抵抗を示すかについての一般的な連続体力学、この三つの力学をバランスよく理解しておく必要があるというわけだ。

1.2 力学と設計 — デザインとはどういった行為か

最終的に、橋梁を「デザインする」という行為のステップを大まかにまとめると、次のようになる。



1. 建設位置を決めて、そこに相応しい形式を思い浮かべながら、材料（鋼がいいかコンクリートにするか）を選ぶ。したがって、材料科学的な知識に加えて、建設位置付近の社会や文化を理解する人文科学や社会科学的な知識・能力も必要になる。
2. 同時にその形式（桁にするかトラスがいいか、あるいはアーチにするか、それとも吊橋か）や断面の形（矩形でいいか、台形にするか、それともパイプがいいか）等を設定して、次のステップで用いなければならない式の各種係数 D や W , D_{ult} , W_{ult} （定数とは限らない）を決める。 D は曲げ剛性と呼ばれ、 W は断面係数と呼ばれる。いずれも第 4 章で習う重要なパラメータである。ここでは材料力学的かつ構造力学的・連続体力学的な知識と能力が必要になる。通常は、設計しようとしている断面に対して最も不利になるような荷重 F の載せ方を、これも第 2, 4 章で習う影響線を用いて決めることになる。
3. 建設したあとのことを予測する：通常、実物大の実験をして橋の安全を確認することは不可能であるから、力学や数学を用いて、そしてコンピュータを駆使して橋の性能を予測する必要がある。すなわち、材料と形を選んで決定した係数を用いて、次式群の「微分方程式（ここでは梁理論を例とした）」を、境界値問題として [多くの場合コンピュータで] 解くことによって、構造物の内部に生じる「最大抵抗力」 σ^{12} を計算する。

つり合い式:	$\frac{d^2 M}{dx^2} + F = 0$	あるいは	$\frac{d^2 M_{ult}}{dx^2} + \gamma_f F = 0$
抵抗則:	$M = D \frac{d^2 (\text{たわみ})}{dx^2}$	あるいは	$M_{ult} = D_{ult} \frac{d^2 (\text{たわみ})}{dx^2}$
使用中の最大抵抗力:	$\sigma = \frac{M}{W}$	あるいは	$\sigma_{ult} = \frac{M_{ult}}{W_{ult}}$

¹¹ Argonne 国立研究所の井口道生先生のお話では、冷戦時代のソ連は有線ミサイルを飛ばしていたらしい。

¹² ギリシャ文字とその読み方は p.1012 にまとめたので、早めに覚えて欲しい。

最終的には、モデルや解法に近似があるのでコンピュータの結果を正しく理解して判断するために、ここでも力学的に正確な知識と、第5章の数値解析法の基礎知識とが必要になる。

4. 予測された「最大抵抗力」を用いて、次の「安全条件」を満たしているかどうかをチェックする。

$$\sigma \leq \frac{\text{材料・構造の真の強度}}{\gamma} \quad \text{あるいは} \quad \gamma_s \frac{\sigma_{\text{ult}}}{\text{材料・構造の真の強度}_{\gamma_m}} \leq 1$$

ただし、 γ は安全率と呼ばれ、予想できない事態を想定した安全のための余裕係数¹³ (≈ 1.7) である。この「あるいは」を挟む二つのフローのうちの左側のフローは許容応力(度)設計法と呼ばれる設計法の考え方で、右のは限界状態設計法の中の終局状態設計法の考え方に相当するが、本質的な安全確保の思想は同じである。「あるいは」の右のステップにある γ_f や γ_s , γ_m は、上述の安全率 γ に相当する荷重係数やその他の要因の余裕係数¹⁴ である。

5. 安全が確保されていればデザイン(設計)は終わりである。もし確保できない場合には、作業ステップ‘1’か‘2’に戻ってデザイン変更をした上で、上に示した微分方程式の係数を算定し、所定の安全が確保されるまで繰り返す¹⁵。ただし、橋梁のような公共構造物の場合は公的資金によって建設されるため、上式の安全条件の不等号は可能な限り等号に近くなるようにする(経済的観点から力学的な効率を最大化する)のが目標であるが、費用対便益を第一に追求する¹⁶ことを構造技術者はすべきではない。

これが設計という行為の大まかなフロー¹⁷である。

形式とスパンの間の合理的な組み合わせ: 現実に建設されているデータからまとめられた、経済的・力学的に合理的な形式とスパンの組み合わせを表 1.2 [168]¹⁸ に示した。例えば 100 m の支間長の橋梁を設計しなければならないとしよう。この表からわかることは、少なくとも 8 種類ほどの形式が可能であるということだ。つまり、いわゆるデザイン(形式選定)の自由度はスパン毎にたくさんあり、材料の選択(適材適所)も念頭に置くと、設計の自由度は無限であることを示している。もし読者が橋梁技術者として仕事をするのであれば、架設現場付近の社会や文化を理解した上で、それを活かして自由にデザインできる¹⁹ことを覚えておいて欲しい。そして、そのデザインを実現するためには、正しい力学の理解が必要であることもわかると思う。

汎用プログラムがあれば力学は要らない? さて今日は、パーソナルコンピュータ上で非線形の動的解析までできる汎用プログラムが、以前よりは廉価で入手できる。それがあれば、どんな構造でも強度計算はできてしまう。だから構造力学の勉強はしなくてもいい!・・・と言えるだろうか。数値解析は、数値を入力しなければできない。どんな断面の形がいいのかは教えてくれない。ケーススタディはできても、普遍的な特性を教えてく

¹³ 破断強度で算定すると土木構造の場合の安全率は3程度になる。これに対して象徴的に(土木構造の安全性を謳うためか)航空機の安全率は1と言われることがある。それはフライト毎に点検があるからということであったが、航空工学の先生から聞いた話では、土木構造の1.7に対応する安全率は1.5だとのこと。TV番組で知ったことだが、零戦の設計者堀越二郎氏は当時の1.8という安全率を下げた(確か1.6)らしい。また、第1著者が昔読んだ零戦についての堀越氏自身の本(多分カッパ・ブックスだったか)の淡い記憶からであるが、資材不足のためにエレベータ等とのケーブルに工夫をしたこと(剛性低下式操縦索と呼ぶらしい)によって高速時の操縦・飛行性能が思いがけず上がったことはとても興味深い。

¹⁴ 2011年3月11日の東北地方太平洋沖地震による震災、特に原子力発電所の災害に関連して「想定」という言葉が毎日のように流れた。安全率を1.7に設定したのは、実はそれ以上の作用もある確率で生じると「想定」していて、それを超えた作用に対しても、どのように壊れて構造がどういう性能を発揮すべきかということも可能な限り検討することになっていたはずだ。ただ残念なことに、そういう作用が実際にどのように発生するのか、そして設計上の数値的・実験的シミュレーションの精度が十分なのか、という点で100%の安心を得ることが不可能だということも事実である。したがって「想定外」という言葉を我々土木屋は使ってはいけない。あるTV番組で中村桂子女史は「『想定外』という言葉は何でも知っている(と思っている)人が使う言葉だ」とおっしゃっていた。

¹⁵ つまり設計という作業は本来一種の逆問題なのだが、実際には順問題を繰り返す手法を用いている。

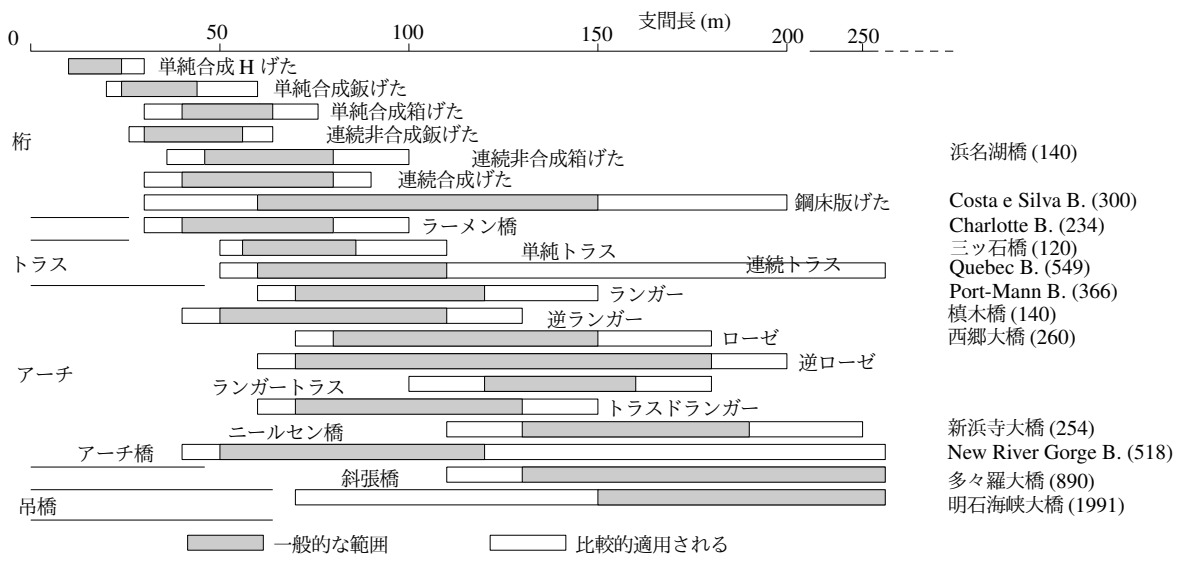
¹⁶ 現在の社会の悪い部分の多くが、これ(換金化)を原因の一つにしていると思う。「 θ/c 信奉は疎外を生む」とか。呵呵。

¹⁷ もちろん、設計書保管庫で過去の類似例を探すという便法があるのは事実ではあるが。

¹⁸ 正しいデータは文献[168]を参照のこと。トレースの許可は長岡技術科学大学の長井正嗣先生からメール(2005/2/21)でいただいた。

¹⁹ 第1著者の個人的な希望だが、斜張橋・コンクリート斜張橋はこれ以上造らないで欲しい。審美的にもよくないし力学的にも美しくないと思う。東北大学の倉西茂先生がお好きではない(構造力学的過ぎる)フィーレンデル橋の方がよっぽどいい。

表 1.2 形式とスパンの間の経済性と力学上合理的な組み合わせ



れることはない。例えば、この章の最初の方で述べたような、縦長の断面と横長の断面のどちらがどのくらい強度が大きくて、そしてそれはなぜなのかについて数値解析の結果は決して教えてくれない。のちに学ぶ座屈における細長比と構造の境界条件等との関係や、動的解析における固有振動数とモードと構造形態や境界条件との関係等についても、やはり力学として学んで身に付けておかなければ、数値解析ツールを使う資格は無いと思う。文献 [117] で引用されていたのだが、茶道の心得²⁰に「守・破・離」というものがあるらしい。「守」とは、ひたすら学ぶ（覚える）こと。「破」は、教えの言葉から抜け出して真意を会得すること。「離」とは、型にはとらわれなくて自由に飛翔する境地で、順に、下手・上手・名人と対比されるらしい。多分「守」がなければその上も無いということではないのだろうか。キュビズムの流れの中のある独自のものを発展させた Picasso のデッサン力や対象を写し取る技術がものすごいということは、読者も知っていると思う。やはり、常に必要なのは基本²¹である。力学は、土木構造に携わる技術者の基本・心得²²であると考えている。

工学とは: さて、「工学」は「理学²³」と同じく「自然科学」で²⁴ある。『「科学」は「予測すること」と同義』²⁵であり、そのためには何らかの科学的な道具すなわち構造物を設計する場合には「物理学」や「数学」「化学」を用いて、建設したあとの性能（昨今はそう呼ぶらしい）を予測しなければならない。これが「デザイン」という行為である。狭い意味の「デザイン（意匠）」の場合であっても同様に、建設後の表現を、心理

²⁰ 川上不自の『不白筆記』にある記述で、他にも剣道等でも流用されている心得らしい。
²¹ H. Gardner 氏は著名な心理学者らしいが、立派な社会学者になることについて次のように述べて [13] いる。「ひとつは必ず<修養>の年月を持つこと。これは知識習得には必要です。もうひとつは、<創造性>の大切さです。創造性は古い考え方を打ち破り、世界についての新しい真実を発見する推進力になるからです。」と、「守・破」に言及している。ただし、『創造性』は結果的に身に付くもの、あるいは結果を形容する言葉で、まず大事なのは『想像力』だと第1著者は考えているが。
²² 近年、「工学」という修飾語付きの倫理が取りざたされているが、なぜそのような修飾語が必要なのか理解できない。倫理は倫理であろう。それは大学で学ぶものでもなく、身に付けていない人には、もはや技術者・研究者として仕事をする資格は無いのではないだろうか。他人の図表の無断コピー添付のような軽いものも含め、学位論文草稿等ですつとたくさん見つけることができる。自分のことは棚に上げて注意を書いておきたい。
²³ 統一理論の S. Weinberg 博士は、結論が完全に逆だがどちらにも間違いは全く無い二つの論文を書き、どちらを投稿するか悩んだという。そのとき投稿した論文がノーベル賞につながっていったらしい。理学（理論物理）は面白い。
²⁴ ただ、「科学・技術」の「技術」と「科学」は別であるという見方 [123, 147] は確かにうなずけるものがある。2009 年頃から新聞等では「科学」と「技術」の間に中黒を入れるようになった・・・と思ったのだが、また元に戻った。
²⁵ 村上陽一郎氏かどなたかの著作か随筆で読んだもので、著者のオリジナルではない。

学や社会学等の「社会科学」的道具を用いて「科学した」上で決定している²⁶のと同じである。「理学」が事実の裏に秘めた真実を予測・探求するのに対し、「工学」は真実を追いながらも、それがほぼ不可能なくらいの複雑な系を対象としているために、事実（実現象）を説明できる真実のかけらやモデルを構築し、さらに適切な予測ツールを開発し、それを用いることによってできるだけすぐに社会に役立たせようとする学問である。さて最後に、その自然を支配している最も基本的な法則のほんの一部を並べておく。

MURPHY'S LAW

If anything can go wrong, it will.

Corollaries:

1. Nothing is as easy as it looks.
3. If there is a possibility of several things going wrong, the one that will cause the most damage will be the one to go wrong.
5. Left to themselves, things tend to go from bad to worse.

その他の系や法則については文献[11]を! その中からいくつかp.210にも引用しておいた。

演習問題 1-1

1. Murphy's law の文献[11]に紹介されている Cole's law とはどのような内容か想像してみよ。綺麗に発音してごらん。



写真 1.13 多々羅大橋 1999年竣工 (中沢正利先生撮影)

²⁶ もちろん、科学的には定量化できない(かなあ? [28, 137])「芸術的な観点」が第1要素であると主張する向きはあろうが、それだけなら第1著者のような似非インテリの反感を買うだけで、損をするのはデザイナーだ。どこかの使い難い本屋や食堂のように。

写真 1.14 かずら橋 徳島県祖谷²⁷

‘馬から落馬:’ 国鉄では長年漢語を多用していたが、あるときからそれをやめたというニュースを聞いた記憶がある。車両の扉を開けるときの車掌へのホーム（フォーム?）アナウンスが、「ドア開扉願います」だった。今は「ドアを開けてください」だ。ところがインターネットを探すと、今でも車両の場合の「ドア開扉」は一つの実用単語のようだがなぜだろう。漢語と例えば、卒論発表等で普段使いもしない漢語のような言葉を使う学生が絶えない。文献 [136] にはその理由について興味深い考察があるが、卒論発表でスーツを着ることと同じで、本質ではないところを心配するからという見方は正しいのではないか。最近はその本質を無視した行事等が多いのではないか。英語が大切なことは認めるが、小学校で英会話を教えたり、修士論文審査会を英語でやったり、2 次的な目的の方を優先しているとしか思えない。まずは頭の中で使っている言語で論理的な表現ができるようになる教育が必要だ。

²⁷ 橋梁の写真は <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node20.html> に。

‘see no evil, hear no evil, speak no evil.’ 三猿を英語ではこう言う。1981年の米国雑誌 ‘Audubon’ には、双眼鏡で何かを観ている猿・メガホンで何かを叫んでいる猿・盗聴器で電話を聞きながら録音している猿が並んで座っている一コマ漫画があった。



写真 1.15 櫃石島橋・岩黒島橋 斜張橋 1988年竣工



‘Beats me!’ ボスの秘書さんの一人 Barbara はとても早口で、最初の頃は時々挟む ‘Ok?’ 以外は何も聞き取れなかった。彼女に何か質問して、このように答えたときは、そのあとにすぐ ‘But don’t hit me!’ っておっしゃる、とても愉快な方でした。もう一人の Erica はラトビア人でたいへんお世話になったが、‘Alles in Ordnung.’ が口癖だった。そのボスの部屋のそばには実験室があり、そこの技術職員 John はドイツ人だった。Erica は彼ととても仲がよかったが、どうやら戦争中に逃げて来るときドイツ人にすごく世話になったからということだった。このフロアには力学系の研究室があったのだが、教授もラトビア人や日本人・オランダ人・イラン人・ユダヤ人と多彩だった。一階下にもチェコ人とウクライナ人。皆、世界的に著名な先生達だ。